

**Algebra Superiore**  
**Programma del Corso**  
**A.A. 2017-2018**

Docente: Prof. Roberto La Scala

**Moduli finitamente generati su domini ad ideali principali:  
gruppi abeliani e l'azione di un singolo operatore lineare**

L'anello degli endomorfismi di un gruppo abeliano; moduli e rappresentazioni: esempi fondamentali; rappresentazione regolare destra e sinistra di un anello; moduli ciclici e ideali annullatori; moduli liberi e basi; invarianza del rango di un modulo libero; omomorfismi fra moduli liberi; matrici e cambiamenti di base; convenzioni di riga e colonna; determinante non-nullo o unitario; endomorfismi ingettivi o surgettivi; somme dirette di moduli; domini ad ideali principali (PID): richiami; moduli finitamente generati; i sottomoduli di un modulo libero sono liberi; modulo delle relazioni (sizigie); matrici di presentazione e cambiamenti di presentazione; matrici elementari, operazioni elementari; matrici equivalenti ad elementi in un PID; forma normale di Smith e di Hermite; algoritmi per i domini euclidei; fattori invarianti e fattori determinantali; struttura dei moduli f.g. su PID; modulo di torsione: sua decomposizione; rango di un modulo f.g.; decomposizione e composizione di moduli ciclici; moduli di torsione e loro decomposizione in  $p$ -componenti; moduli ciclici primari e divisori elementari; struttura dei moduli f.g. in termini di sottomoduli ciclici primari; invarianza nei teoremi di struttura; classi di isomorfismo di moduli f.g.; struttura dei gruppi abeliani finiti:  $p$ -gruppi; classi di isomorfismo dei gruppi abeliani finiti: partizioni; endomorfismi di spazi vettoriali e  $K[\lambda]$ -moduli; similitudine di matrici ad elementi in un campo; presentazione di un  $K[\lambda]$ -modulo: matrice caratteristica; fattori invarianti della matrice caratteristica; similitudine su  $K$  ed equivalenza su  $K[\lambda]$ ;  $K[\lambda]$ -moduli ciclici: matrice compagne; forma canonica razionale (Frobenius); divisori elementari potenze di polinomi lineari: blocchi di Jordan; forma canonica di Jordan; polinomio minimo e polinomio caratteristico; teoremi di Caley-Hamilton e Frobenius; polinomio minimo e diagonalizzabilità di un endomorfismo; decomposizione semisemplice-nilpotente di un endomorfismo.

**Teoria delle rappresentazioni e dei caratteri di un gruppo finito**

Rappresentazioni di un gruppo e di un algebra; Algebra gruppale; Rappresentazioni di un gruppo ciclico: trasformata discreta di Fourier; Azione su insiemi; Rappresentazione regolare sinistra e destra; Rappresentazione canonica di  $\mathbb{S}_n$ ; Azione sui laterali sinistri di un sottogruppo;  $G$ -moduli e sottomoduli; Mod-

uli ciclici; Moduli semplici e semisemplici; Decomposizione a blocchi di una rappresentazione; Prodotto interno  $G$ -invariante; Rappresentazioni unitarie; Il complemento ortogonale è un sottomodulo; Teorema di Maschke; Omomorfismi di  $G$ -moduli: intertwining maps; Rappresentazioni equivalenti; Lemmi di Schur; Dimensione dello spazio dei  $G$ -omomorfismi: intertwining numbers; L'algebra commutante di una rappresentazione:  $G$ -endomorfismi; Prodotto tensoriale di vettori e matrici; Struttura dell'algebra commutante; Teorema di Wedderburn-Artin; Il centro dell'algebra delle matrici; Struttura del centro dell'algebra commutante; Carattere di una rappresentazione; Carattere della rappresentazione canonica di  $\mathbb{S}_n$ ; Carattere della rappresentazione regolare; I caratteri sono funzioni di classe; Spazio delle funzioni di classe e sua dimensione; Tavola dei caratteri; Prodotto interno fra caratteri; Relazione fra caratteri di tipo I; Irreducibilità e molteplicità mediante il prodotto interno fra caratteri; I caratteri sono uguali se e solo se le rappresentazioni sono equivalenti; I caratteri del gruppo simmetrico sono reali; Caratteri di  $\mathbb{S}_3$ ; Decomposizione in irriducibili del carattere della rappresentazione regolare; Il centro dell'algebra gruppale è lo spazio delle funzioni di classe; Lo spazio delle funzioni di classe ammette la base ortonormale dei caratteri irriducibili; Le rappresentazioni irriducibili di un gruppo abeliano sono tutte lineari; Relazione fra caratteri di tipo II; Rappresentazione prodotto tensoriale del prodotto diretto di due gruppi; Tavola dei caratteri del prodotto diretto di due gruppi; Rappresentazione ristretta e indotta; La rappresentazione matriciale indotta è ben definita e non dipende dal trasversale; La rappresentazione indotta dalla rappresentazione banale; Il carattere della rappresentazione indotta; Teorema di reciprocità di Frobenius; Rappresentazioni del gruppo quoziente.

**Testi consigliati:**

1. N. Jacobson, Basic Algebra I, Freeman e Co, New York, 1989
2. M. Artin, Algebra, Bollati Boringhieri, Torino, 1997
3. S. Lang, Algebra, Springer GTM, New York, 2002
4. B.E. Sagan, The symmetric group, Springer GTM, New York, 2000