

Corso di Laurea in Triennale in Informatica
Analisi Matematica - corso B
Docente: Anna Valeria Germinario

Programma A.A. 2019/2020

Insiemi numerici, i numeri reali

Richiami di insiemistica e di logica. Gli insiemi numerici: i numeri naturali, interi, razionali. Rappresentazione decimale dei numeri razionali. I numeri reali come allineamenti decimali. Le proprietà algebriche e di ordinamento dei numeri reali. La proprietà di completezza: sezioni dei reali ed elementi separatori. Rappresentazione grafica dei numeri reali. Estremi di un insieme numerico: maggioranti minoranti, massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore. Insiemi limitati. Intervalli. Teorema di esistenza dell'estremo superiore. Radice n-esima. Potenze e logaritmi. Il principio di induzione.

Funzioni reali di variabile reale

Definizione di funzione. Dominio, immagine e grafico. Funzioni reali di variabile reale e loro grafico. Funzioni iniettive, surgettive, bigettive. Funzione inversa. Funzione composta. Funzioni limitate. Massimo e minimo di una funzione. Funzioni pari e funzioni dispari. Funzioni monotone e loro proprietà. Invertibilità delle funzioni strettamente monotone. Le funzioni elementari: funzioni lineari e funzione valore assoluto, funzioni potenza, funzioni esponenziali, funzioni logaritmo. Operazioni con i grafici. Polinomi quadratici. Funzioni periodiche. Funzioni trigonometriche seno, coseno e tangente e loro inverse.

Successioni numeriche e loro limiti

Proprietà vere definitivamente. Definizione e primi esempi di successioni. Successioni definite per ricorrenza. Successioni convergenti, divergenti, indeterminate e relativi esempi. Successioni limitate. Unicità del limite. Limitatezza delle successioni convergenti. Teoremi della permanenza del segno. Teoremi di confronto. Successioni monotone e loro limite. Il numero di Nepero, definizione e teorema sulla monotonia della successione che lo definisce. L'insieme dei numeri reali ampliato. Teoremi algebrici per il calcolo di limiti di successione. Forme di indecisione. Criterio della radice per le successioni, criterio del rapporto per le successioni, rapporto implica radice e loro applicazioni. Gerarchia degli infiniti, logaritmi, potenze, esponenziali, fattoriale. Limiti di rapporti tra successioni.

Limiti di funzioni e funzioni continue

Limiti di funzioni: definizione mediante le successioni. Limiti finiti e infiniti all'infinito. Limiti finiti e infiniti al finito. Limite destro e limite sinistro. Asintoti. Non esistenza dei limiti. Funzioni continue e punti di discontinuità. Limiti delle funzioni monotone. Limiti delle funzioni elementari. Intorni di punti in \mathbb{R} ampliato e proprietà vere definitivamente. Limite del prodotto di una funzione limitata e di una funzione infinitesima. Limiti e operazioni. Forme di indecisione. Teoremi di confronto. Teoremi della permanenza del segno. Teorema sul cambio di variabile nei limiti. Limiti notevoli. Stime asintotiche nel calcolo dei limiti. Proprietà globali delle funzioni continue o monotone. Teorema degli zeri. Teorema di esistenza dei valori intermedi. Teorema di Weierstrass. Monotonia e invertibilità.

Calcolo differenziale

Definizione di rapporto incrementale e di derivata. Interpretazione geometrica. Derivate delle funzioni elementari. Punti di non derivabilità: punti di flesso a tangente verticale, punti angolosi e cuspidi. Relazione tra continuità e derivabilità. Regole algebriche di derivazione. Derivazione e funzione composta. Derivazione e funzione inversa. Applicazione del calcolo differenziale allo studio degli estremi relativi di una funzione: teorema di Fermat. Punti critici. Teorema di Lagrange. Test di monotonia. Classificazione dei punti critici di una funzione. Teorema di De L'Hopital. Funzioni convesse. Derivabilità e convessità. Punti di flesso. Derivabilità in un punto come limite della derivata. Applicazioni del calcolo differenziale allo studio del grafico di funzioni. Differenziabilità: definizione ed equivalenza con la derivabilità. Nozione di "o piccolo". Polinomi di Taylor. Formula di Taylor con resto di Peano. Formula di Taylor con resto di Lagrange. Simboli di Landau. Calcolo di limiti mediante sviluppi.

Serie numeriche e di potenze

Definizione di serie numerica e di somma parziale. Convergenza, divergenza, irregolarità di una serie numerica. Studio del carattere della serie geometrica. Serie telescopiche. Operazioni algebriche con le serie. Condizione necessaria per la convergenza. Serie a termini positivi e loro carattere. Criteri del confronto, del confronto asintotico, della radice, del rapporto. Studio del carattere della serie armonica e della serie armonica generalizzata. Assoluta convergenza. Criterio di Leibnitz. Serie di potenze e loro raggio di convergenza. Serie di Taylor, funzioni sviluppabili in serie di Taylor, esempio di funzione non sviluppabile in serie di Taylor.

Calcolo integrale

Definizione di integrale definito secondo Riemann. Integrale delle funzioni costanti. Esempio di funzione non integrabile (funzione di Dirichlet). Classi di funzioni integrabili. Proprietà dell'integrale definito: linearità, additività, positività e monotonia. Teorema della media integrale. Primitive e loro proprietà. Formula fondamentale del calcolo integrale. Esistenza di primitive: funzione integrale e teorema fondamentale del calcolo integrale. Definizione di integrale indefinito e sue proprietà. Integrali indefiniti immediati. Integrazione per scomposizione, Integrazione per sostituzione. Integrazione per parti. Integrazione di funzioni razionali fratte. Integrale e simmetrie. Serie armonica generalizzata e integrali. Definizione di integrale improprio. Criteri di integrabilità: confronto, confronto asintotico, convergenza assoluta. Studio di integrali impropri.

Elenco dei teoremi di cui è stata presentata la dimostrazione

- Limitatezza delle successioni convergenti
- Teoremi della permanenza del segno per le successioni
- Teoremi di confronto per le successioni
- Monotonia della successione associata al numero di Nepero
- Teorema di esistenza dei valori intermedi
- Relazione tra continuità e derivabilità
- Teorema di Fermat
- Teorema di Lagrange
- Test di monotonia
- Equivalenza tra differenziabilità e derivabilità
- Esistenza del polinomio di Taylor
- Formula di Taylor con resto di Peano
- Carattere della serie geometrica
- Condizione necessaria per la convergenza
- Carattere delle serie a termini non negativi
- Criterio del confronto

- Criteri del confronto asintotico
- Carattere delle serie armoniche
- Teorema della media integrale
- Formula fondamentale del calcolo integrale
- Formula di integrazione per parti
- Formula di integrazione per sostituzione
- Integrale improprio di $f(x) = \frac{1}{x^b}$ vicino a 0 e all'infinito

Testi di riferimento

M. Bramanti, C.D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1, Zanichelli.

G.C. Barozzi, G. Dore, E. Obrecht, Elementi di Analisi Matematica, Zanichelli

M. Bramanti, Esercitazioni di Analisi matematica 1, Società Editrice Esculapio

Materiale didattico

Il materiale didattico relativo al corso (stampato delle lezioni, esercizi di riepilogo, soluzioni tracce d'esame) è disponibile sulla piattaforma di e-learning ADA del Dipartimento di Informatica.