

INIZIEREMO ALLE 15:00

RICORDATE DI UTILIZZARE
COME ALIAS IL VOSTRO
NOME & COGNOME

ALTRIMENTI NON RIUSCIREMO
AD ATTRIBUIRE LA PRESENZA

Geometrie non euclidee

Una introduzione storica e concettuale

AMEDEO ALTAVILLA

- Euclide e il significato storico degli *Elementi*.
- I postulati, con attenzione speciale al quinto.
- Due millenni di tentativi di deduzione del postulato delle parallele.
- Il ruolo di Saccheri.
- La geometria neutrale.
- La nascita delle geometrie non euclidee nel XIX secolo.
- I modelli e il cambiamento di prospettiva: dalla ricerca di una contraddizione alla scoperta di nuove geometrie.

PLIMPTON 2000 a. C.

- Euclide scrive gli *Elementi* intorno al 300 a.C.: non inventa tutta la geometria greca, ma la organizza in una struttura deduttiva.
- Il valore storico dell'opera non è solo nei risultati, ma nel **metodo assiomatico**:
 - pochi **principi iniziali**; *descrivono l'esperienza*
 - **dimostrazioni** in catena;
 - costruzioni con riga e compasso. **VEDI PROSSIMA SLIDE**
- Per secoli gli *Elementi* sono stati il modello stesso di rigore matematico.

Importante

La crisi del quinto postulato nasce *dentro* la tradizione euclidea: non come rifiuto di Euclide, ma come tentativo di completarlo.

I postulati di Euclide

TERMINI PRIMITIVI: PUNTO RETTA PIANO
CONGRUENZA... UGUAGLIANZA

- I primi quattro postulati appaiono semplici e “costruttivi”:

- 1 per due punti passa una retta;
- 2 un segmento si può prolungare;
- 3 si può descrivere un cerchio con centro e raggio dati;
- 4 tutti gli angoli retti sono uguali.

} RIGA

} COMPASSO

- Il **quinto postulato** ha una forma molto più complessa:

se una trasversale incontra due rette e gli angoli interni da una parte sommano meno di due retti, allora le due rette, prolungate, si incontrano da quella parte.

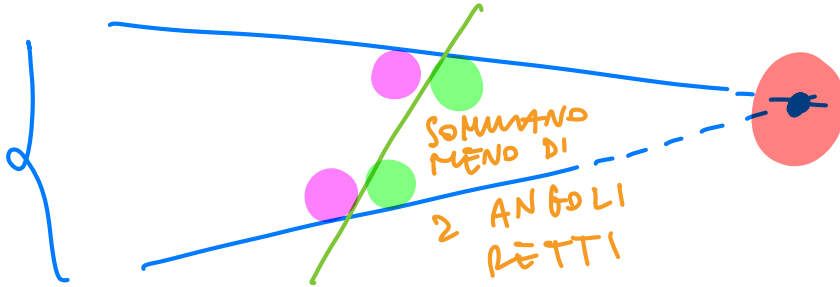
- Già gli antichi notarono che questo postulato sembrava meno “evidente” degli altri.

Proviamo con un disegno:

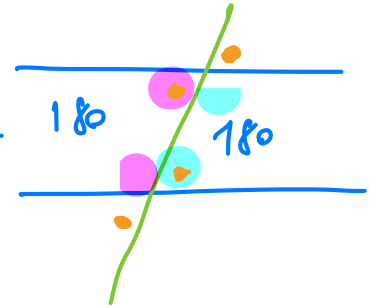


5° postulato e teorema sulle rette parallele tagliate da una trasversale

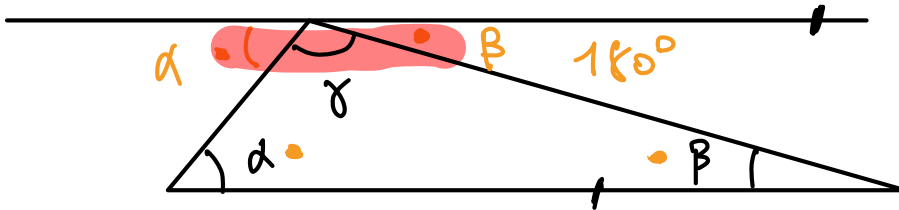
due
rette



PARALLELE

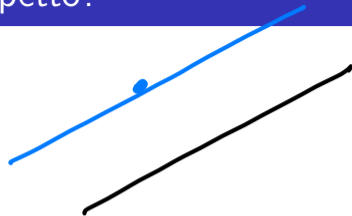


Somma angoli interni triangolo 180°



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Perché il quinto postulato sembrava sospetto?



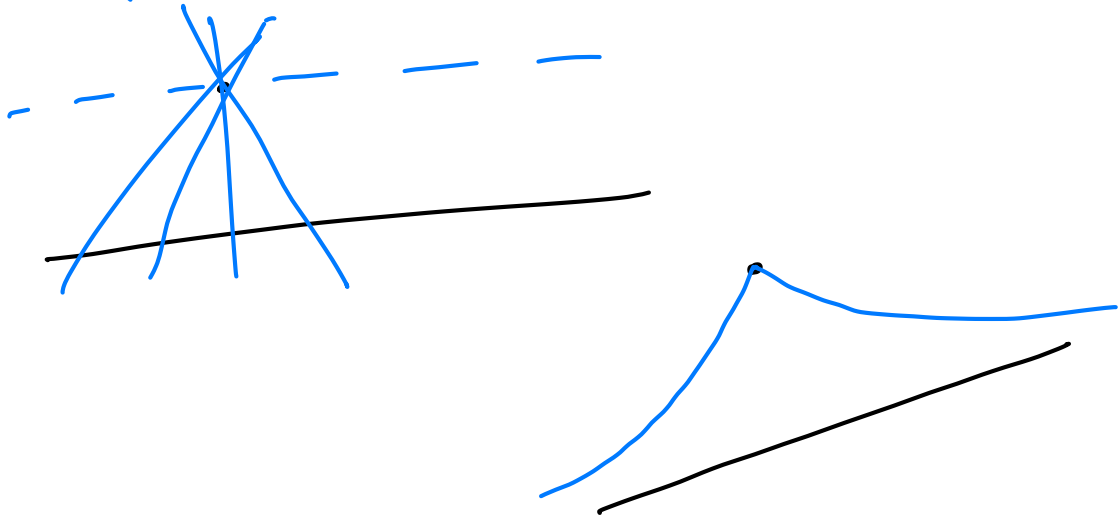
- È più lungo, meno intuitivo, meno “locale”.
- Non parla di una costruzione immediata, ma di un incontro che avviene *prolungando indefinitamente* le rette.
- Storicamente si pensò spesso che dovesse essere un **teorema**, non un postulato.
- Una formulazione moderna equivalente è l'assioma di Playfair:
per un punto esterno a una retta passa una e una sola parallela.



COSA VUOL DIRE NEGARLO? ↴ DISEGNO


La nozione di \otimes può essere espressa
come:

per un punto esterno ad una retta
o non c'è alcuna parallela oppure
non è detto che sia unico



I tentativi di dimostrarlo

- Per quasi duemila anni molti matematici provarono a dedurre il quinto postulato dagli altri.
- Strategia tipica:
 - ① assumere falso il postulato delle parallele;
 - ② sviluppare le conseguenze di tale ipotesi;
 - ③ sperare di arrivare a una contraddizione.
- Il punto cruciale: spesso le “contraddizioni” erano in realtà solo conseguenze controintuitive, non logicamente impossibili.

 \rightsquigarrow ASSURDO
in geom.
euclidea

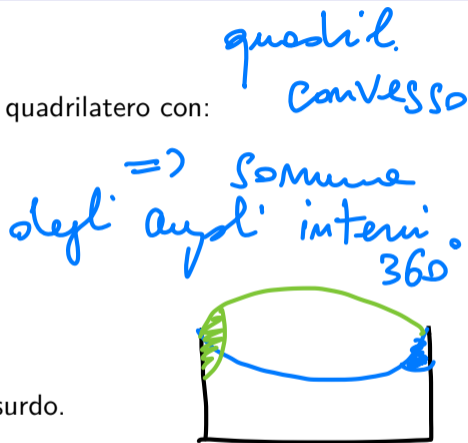
Passaggio storico decisivo

A un certo punto si capì che l'ipotesi negatrice del quinto postulato poteva descrivere una geometria coerente, diversa da quella euclidea.

Saccheri: il tentativo più famoso prima della svolta

- Giovanni Girolamo Saccheri (1667–1733) studia un quadrilatero con:
 - lati laterali congruenti;
 - due angoli retti alla base.
- Dimostra che gli angoli al vertice sono uguali.
- Distingue allora tre casi:
 - 1 ipotesi dell'angolo retto;
 - 2 ipotesi dell'angolo ottuso;
 - 3 ipotesi dell'angolo acuto.
- Il suo scopo era eliminare i casi non euclidei per assurdo.

Facciamo un Disegno:



Perché Saccheri è importante?

- Anche se voleva difendere Euclide, Saccheri sviluppa un'intera teoria delle conseguenze dell'ipotesi dell'angolo acuto.
- In retrospettiva, quelle conseguenze anticipano la geometria iperbolica.
- La sua opera mostra un fatto storico fondamentale:
prima ancora di accettare le geometrie non euclidee, i matematici ne avevano già dimostrato molti teoremi.
- Hartshorne osserva che i tre casi di Saccheri corrispondono ai casi semiiperbolico, semieuclideo e semiellittico.¹

¹R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Sez. 34.

- **Geometria neutrale** = geometria in cui *non* si assume alcun assioma sulle parallele.
- Nel linguaggio di Hilbert: è una geometria che soddisfa incidenza, ordine e congruenza, ma non assume l'assioma euclideo delle parallele.
- È il terreno comune fra:
 - geometria euclidea;
 - geometria iperbolica;
 - alcune versioni semiellittiche.
- Serve per separare ciò che dipende davvero dal quinto postulato da ciò che non ne dipende.

Che cosa resta vero senza il quinto postulato?

- Molta della geometria elementare dei triangoli non usa il postulato delle parallele.
- In particolare, in geometria neutrale restano validi i criteri classici di congruenza:
 - **LAL** (SAS);
 - **LLL** (SSS);
 - criteri del tipo **ALA/AAL** nella formulazione moderna.
- Restano validi anche:
 - il teorema del triangolo isoscele;
 - il teorema dell'angolo esterno.

Messaggio didattico

La congruenza dei triangoli appartiene al nucleo “pre-parallele” della geometria.

Esempio chiave: perché la congruenza non dipende dal quinto postulato

- Negli *Elementi*, il quinto postulato compare per la prima volta solo nella proposizione I.29.
- Quindi tutta la parte precedente sui triangoli è, in linea di principio, indipendente dalle parallele.
- In una formulazione moderna (assiomi di Hilbert), la geometria neutrale conserva proprio questo blocco teorico.
- Questo è il punto ideale per mostrare in dettaglio un criterio di congruenza, per esempio **LAL**:

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad \angle BAC = \angle B'A'C' \implies \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Dimostrazione (schema) del criterio LAL

Siano $\triangle ABC$ e $\triangle A'B'C'$ tali che

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad \angle BAC = \angle B'A'C'.$$

- 1 Portiamo idealmente il triangolo ABC sopra il triangolo $A'B'C'$, facendo coincidere il vertice A con A' .
- 2 Facciamo coincidere il lato AB con il lato $A'B'$. Poiché $AB = A'B'$, il punto B cade esattamente su B' .
- 3 Poiché gli angoli compresi sono uguali, il lato AC si dispone lungo la stessa direzione di $A'C'$.
- 4 Siccome $AC = A'C'$, anche il punto C cade esattamente su C' .
- 5 Quindi i due triangoli coincidono interamente:

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Punto concettuale

In questo ragionamento non si usa in alcun modo il quinto postulato: si usano solo uguaglianza di segmenti, uguaglianza di angoli e l'idea di sovrapposizione rigida.

CRITERIO LLL

Che cosa invece cambia davvero?

- La somma degli angoli interni di un triangolo non è più forzata a essere 180° .
- Si aprono tre scenari concettuali:
 - caso euclideo: somma = 180° ;
 - caso iperbolico: somma $< 180^\circ$;
 - caso ellittico/semiellittico: somma $> 180^\circ$.
- La teoria delle parallele diventa il vero punto discriminante tra le diverse geometrie.

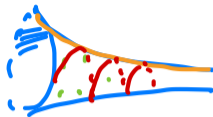
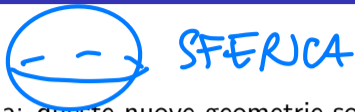
Idea forte

Il quinto postulato non governa *tutta* la geometria: governa soprattutto il comportamento globale delle rette e degli angoli nei triangoli.

Proviamo con un disegno:

- Dopo Saccheri, Legendre e altri, arriva il cambio di prospettiva.
- Gauss comprende per primo la possibilità di una geometria non euclidea, ma non pubblica.
- Bolyai e Lobachevsky sviluppano in modo esplicito una nuova geometria in cui per un punto esterno a una retta passano più parallele.
- Non si tratta più di una *reductio ad absurdum* fallita:
si tratta della nascita di una nuova teoria matematica.

Dal sospetto alla consistenza: i modelli

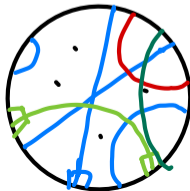


- Resta però una domanda: queste nuove geometrie sono coerenti?
- La risposta arriva con i **modelli**:
 - Beltrami;
 - Klein;
 - Poincaré.

→ SFERA DI BELTRAMI

- Un modello mostra che, se la geometria euclidea è coerente, allora anche la geometria iperbolica lo è.
- Esempio celebre: il **disco di Poincaré**, in cui le “rette” sono archi ortogonali al bordo del disco.






Facciamo un disegno



- La vicenda del quinto postulato mostra che:
 - l'evidenza intuitiva non coincide con la deducibilità logica;
 - cambiare un assioma può generare intere teorie nuove;
 - il metodo assiomatico non serve solo a fondare una teoria, ma anche a confrontarne più di una.
- Le geometrie non euclidee non distruggono Euclide:
ne chiariscono il raggio d'azione.

Domanda:
che cosa in geometria dipende davvero dalle parallele?

16.10

-  Euclide, *Elementi*.
-  G. G. Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733).
-  Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, 2000.
-  Roberto Bonola, *La geometria non-euclidea*.
-  T. L. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*.