LA MATEMATICA E I MODELLI BIOLOGICI

Mirella Cappelletti Montano

Orientamento Consapevole A. A. 2025/2026

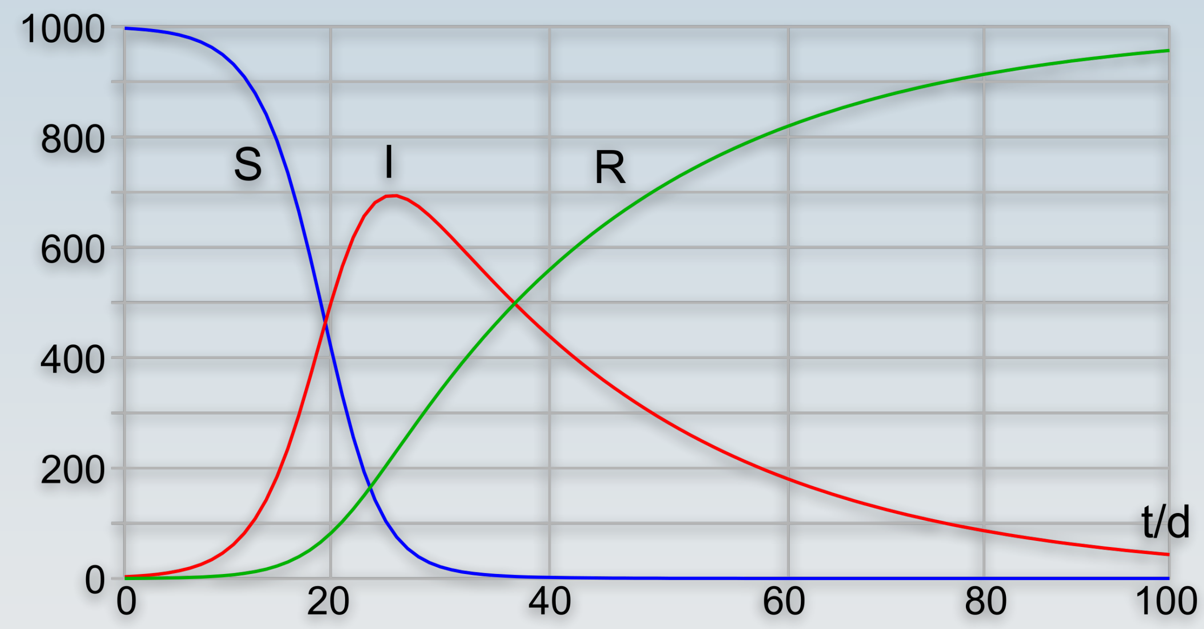
Dipartimento di MATEMATICA
Università degli Studi di Bari Aldo Moro

COS'È UN MODELLO MATEMATICO?

Un modello matematico è una possibile rappresentazione dell'evoluzione nel tempo di un fenomeno fisico, biologico, economico, tramite l'uso di concetti matematici.

Uno degli scopi principali dei modelli matematici è, quindi, quello di fare previsioni.

Un modo per misurare l'efficacia di un modello è vedere di quanto l'evoluzione reale del fenomeno stesso differisce da quella prevista dal modello, attraverso esperimenti o l'utilizzo di dati già acquisiti.



Molto spesso i modelli matematici sono codificati tramite “il calcolo differenziale”. Ci sono comunque modelli costruiti utilizzando altre teorie matematiche (metodi iterativi, teoria dei giochi, calcolo combinatorio, calcolo stocastico,…)

Un fenomeno può essere rappresentato attraverso più modelli, che ne evidenziano aspetti diversi.

Allo stesso modo, un modello matematico può descrivere più fenomeni distinti. Per esempio, alcuni modelli sullo studio di come varia una popolazione nel tempo possono essere usati in Economia.

UN PO' DI STORIA

L'idea che si potesse rappresentare la realtà (o aspetti di essa) tramite la Matematica non è venuta naturalmente.

Il fatto stesso che vi siano leggi che governano i fenomeni naturali (in particolare i fenomeni fisici) e che esse possano essere espresse in forma matematica è stato a lungo dibattuto, soprattutto per motivi religiosi, e solo a partire dal 1600 si è pervenuti a un'idea più moderna di Scienza.

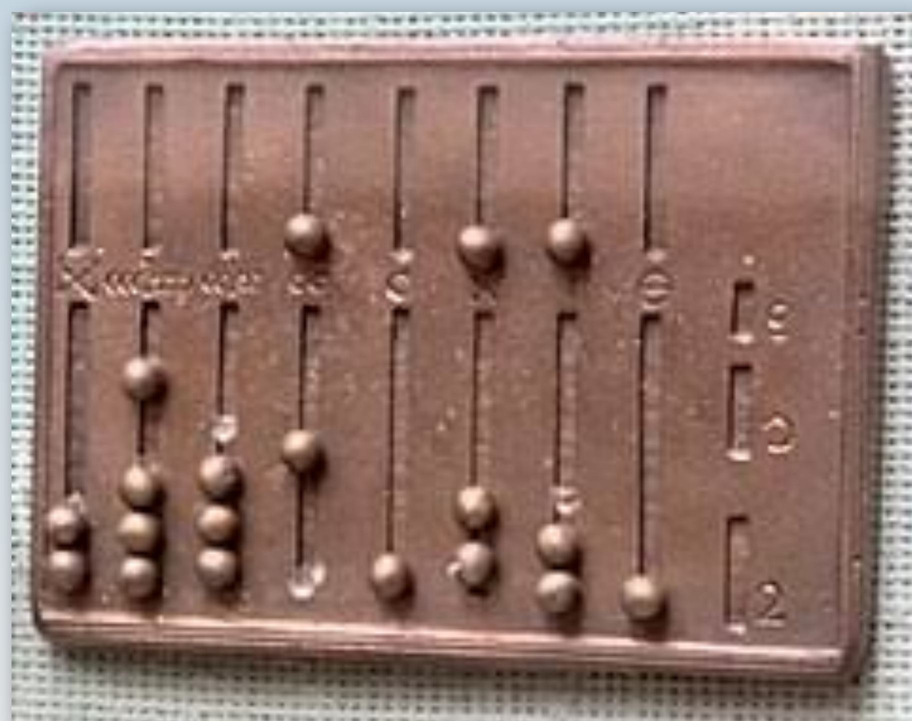
I NUMERI DI FIBONACCI

Uno dei "primi" e più noti tentativi di utilizzare la matematica per spiegare fenomeni biologici è dovuto a Fibonacci.

Leonardo da Pisa (1170-1242), detto **Fibonacci**, è noto soprattutto per aver scritto il *Liber Abbaci* (1202), un trattato di Matematica destinato ai mercanti, per aiutarli a gestire la propria contabilità, ad effettuare cambi di valute e calcolare il prezzo delle merci.

Il libro contiene una delle prime trattazioni presentate nel mondo occidentale della numerazione posizionale indiana (unità, decine, centinaia…) che Fibonacci aveva appreso durante un suo soggiorno nell'attuale Algeria.

Il sistema numerico decimale, benché molto più pratico di quello fino ad allora in uso (in cui le cifre scritte usando i numeri romani e i calcoli erano svolti attraverso il cosiddetto **abaco**) stentò molto ad essere accettato in Europa. Addirittura nel 1280 la città di Firenze proibì l'uso delle cifre indo-arabe, soprattutto dello 0. Si riteneva, infatti, che esso potesse essere utilizzato per inviare messaggi segreti e, infatti, il termine "cifra" deriva proprio da questo.



Nel Liber Abbaci, oltre all'introduzione del sistema numerico decimale, sono presentate altre importanti nozioni, come alcuni criteri di divisibilità, gli algoritmi per il calcolo di radici quadrate e cubiche, la definizione di numeri primi e numeri perfetti.

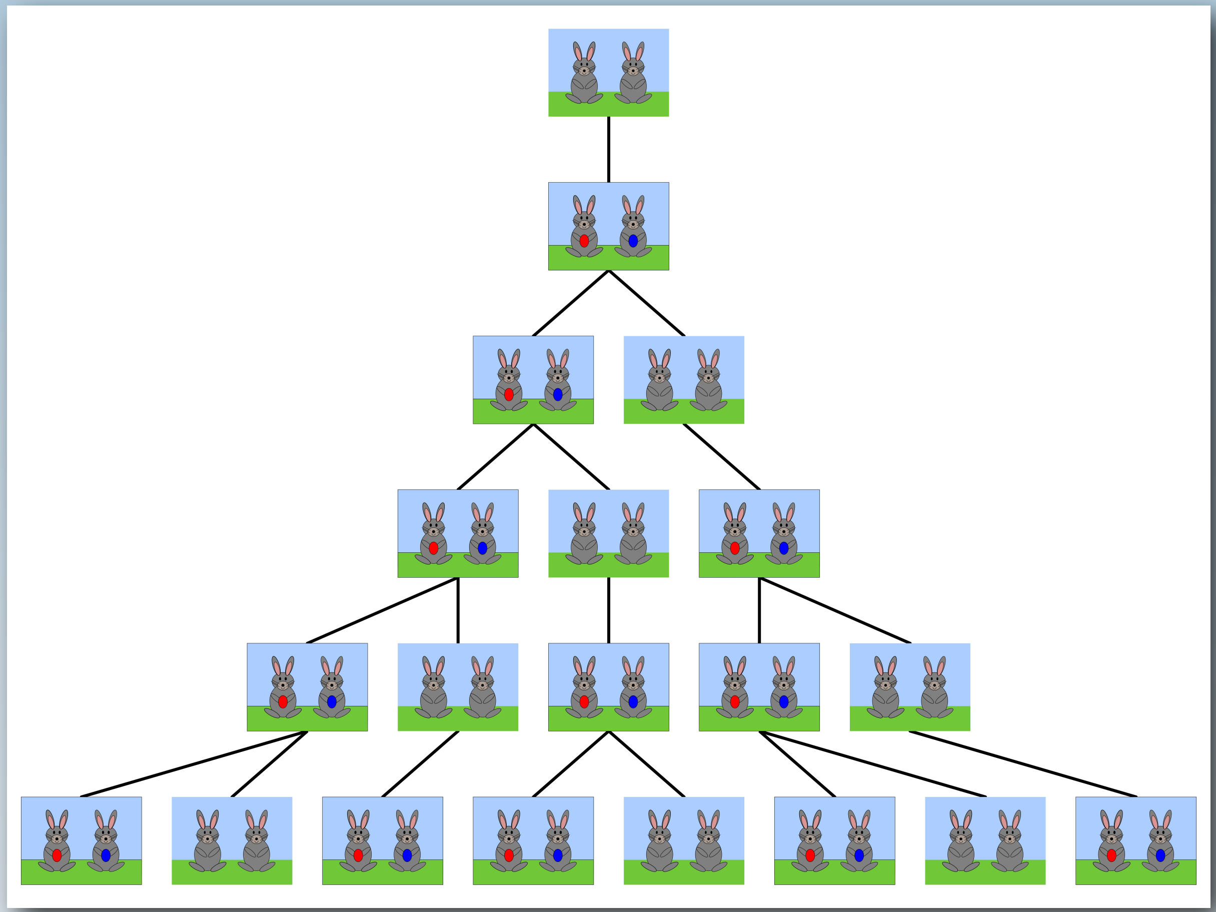
Queste questioni sono affrontate anche attraverso una serie di esempi esplicativi e interessanti problemi.

Nel XII capitolo del Liber Abbaci, viene presentato un problema su come evolve una certa popolazione ne tempo.

Il problema esposto da Fibonacci è il seguente:

Un allevatore dispone di una una coppia di conigli (maschio e femmina) appena nati. Questa coppia diventa fertile al compimento del primo mese di età. Appena fertili, i conigli ogni mese danno vita a un'altra coppia di conigli (maschio e femmina). A loro volta, essi sono fertili al compimento del primo mese di vita e, da quel momento, generano una coppia di conigli (maschio e femmina) al mese.

Quante coppie di conigli ci saranno nell'allevamento dopo un anno?



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FibonacciRabbit.svg?uselang=it

Si inizia con 1 coppia di conigli.

Dopo 1 mese, essa sarà fertile.

Dopo 2 mesi, si hanno a disposizione 2 (1+1) coppie di conigli, di cui, però, solo una fertile.

Dopo 3 mesi, ci saranno 3 (2+1) coppie di conigli, perché solo una di esse ha potuto generare.

Dopo 4 mesi, ci saranno 5 (3+2) coppie di conigli, in quanto solo 2 delle coppie precedenti sono fertili.

....e così via.

Indichiamo con F_n il numero delle coppie di conigli dopo n mesi.

In particolare, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 2$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

La risposta alla domanda è $F_{12} = 233$, ma certamente possiamo ripetere questo procedimento per ogni numero naturale n, ottenendo quella che prende il nome di **sequenza (o successione) di Fibonacci**

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610….

I numeri di Fibonacci, hanno la straordinaria proprietà di comparire in Natura in molte situazioni.

Ad esempio, la maggior parte dei fiori hanno un numero di petali (3, 5, 8, 13, 21…) che è uno dei numeri di Fibonacci.

Le inflorescenze che si trovano al centro di girasoli, margherite o nel cavolo romano si dispongono in spirali orarie e antiorarie, il cui numero è generalmente un numero di Fibonacci.

Una branca della Botanica, detta **Filotassi**, studia il modo in cui fiori, foglie o rami sono distribuite nello spazio, al fine di ottimizzare l'utilizzo delle risorse (sole, acqua…) e difendersi dagli agenti esterni.

In genere, le foglie sui rami si dispongono in modo che esse non si coprano l'un l'altra e possano essere ugualmente esposte alla luce del sole. Se si prende come punto di partenza la foglia più esterna di un ramo e si conta quante foglie ci sono finché non se ne trova un'altra allineata a questa, il risultato è spesso un numero di Fibonacci.

NUMERI DI FIBONACCI E SEZIONE AUREA

I numeri di Fibonacci possono essere legati anche al cosiddetto rapporto aureo, o sezione aurea.

Supponiamo di voler dividere un segmento in due parti di lunghezza a e b con $a > b$ in maniera tale che valga la seguente proporzione

$$a + b : a = a : b$$

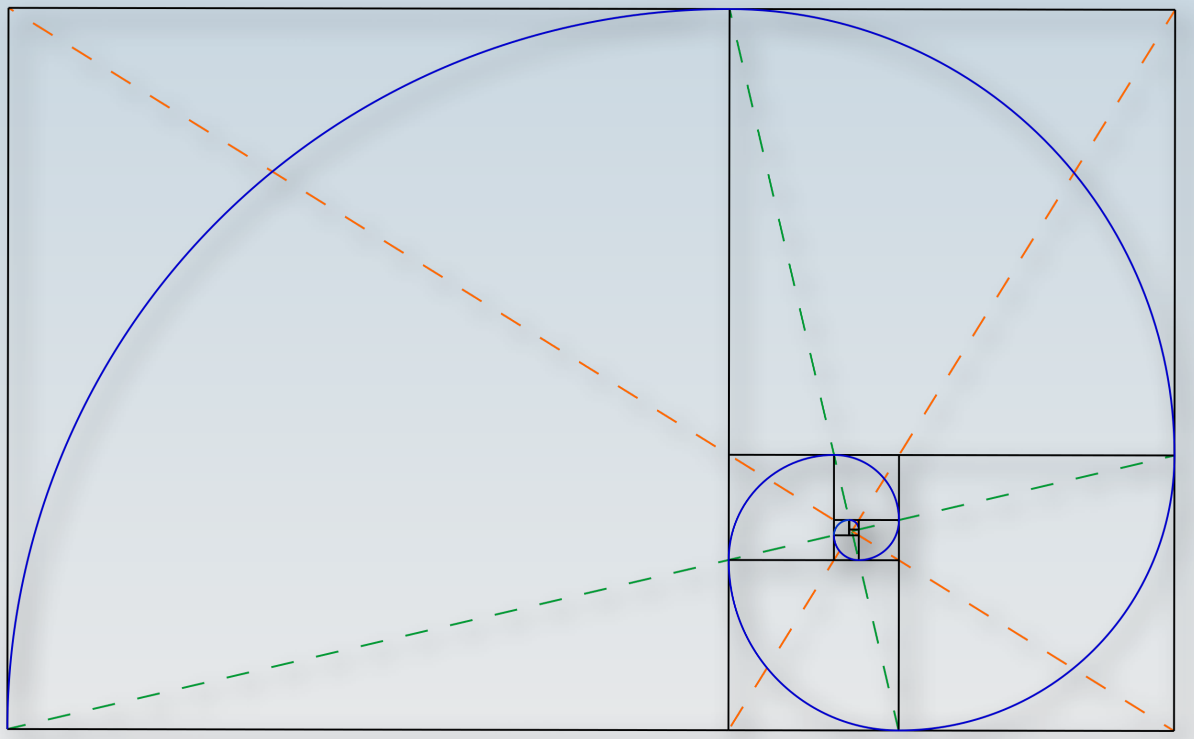
Qualunque sia la lunghezza del segmento in questione, abbiamo che

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}6803398$$

Il numero $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ prende il nome di sezione aurea.

La sezione aurea è nota fin dall'antichità per i suoi rapporti con il mondo dell'arte.

In particolare, il cosiddetto rettangolo aureo (ossia un rettangolo di lati $a+b$ e a tali che $\dfrac{a+b}{a} = \phi$) era considerato esteticamente il più piacevole da guardare e le sue proporzioni sono state utilizzate in molte opere d'arte.



Consideriamo i numeri della successione di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233….

Osserviamo che

$$\frac{1}{1} = 1 \qquad \frac{5}{3} \simeq 1{,}66666 \qquad \frac{21}{13} \simeq 1{,}615 \qquad \frac{89}{55} \simeq 1{,}61818 \qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{2}{1} = 2 \qquad \frac{8}{5} = 1{,}6 \qquad \frac{34}{21} \simeq 1{,}619 \qquad \frac{144}{89} = 1{,}6179 \qquad \ldots\ldots$$

$$\frac{3}{2} = 1{,}5 \qquad \frac{13}{8} = 1{,}625 \qquad \frac{55}{34} \simeq 1{,}6176 \qquad \frac{233}{144} \simeq 1{,}61805 \qquad \ldots\ldots$$

Il rapporto $\dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ si avvicina sempre più a ϕ man mano che n aumenta.

Matematicamente si dice che $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$. Questo risultato fu provato da Eulero.

LA NASCITA DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

I numeri di Fibonacci possono essere considerati poco più di un "gioco" matematico. Lo studio dei fenomeni naturali e biologici tramite la Matematica non si diffuse per molti secoli ancora.

In realtà fu solo a partire dal 1500 che si fece strada la curiosità di investigare le cause ultime che generano i fenomeni naturali.

I principali autori di questa "rivoluzione" furono Galileo e Newton.

IL MONDO È MATEMATICO

Per Galileo, tutto ciò che è intorno a noi è scritto in leggi matematiche, ed è compito dello scienziato individuare queste leggi e comprenderle.

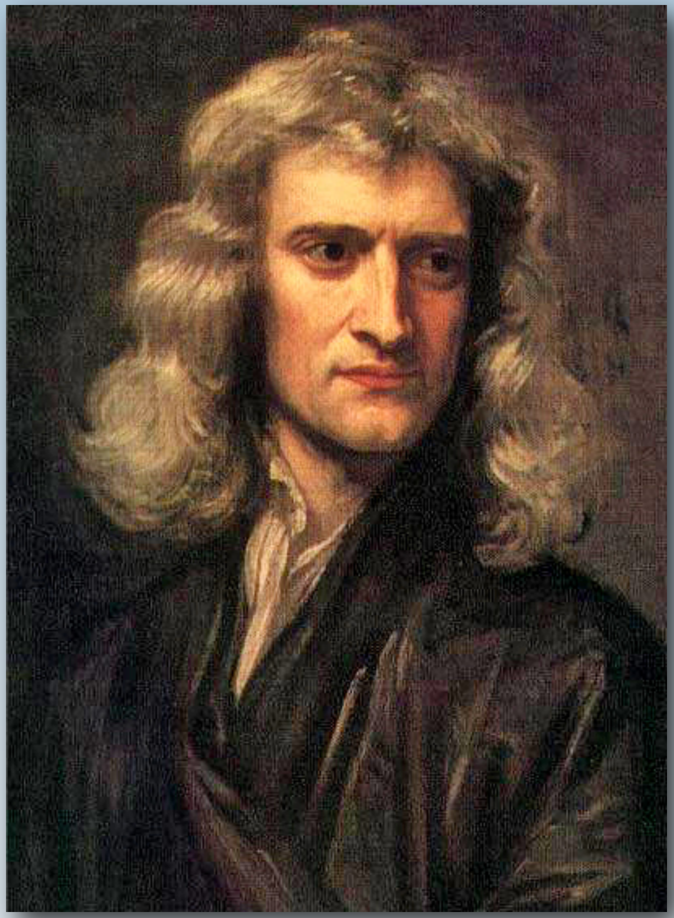
Purtroppo, la Matematica a disposizione all'epoca di Galileo era inadeguata per questo compito. L'espressione in leggi matematiche che governano la realtà fisica attorno a noi necessitò della creazione di una nuova branca della Matematica, detta CALCOLO DIFFERENZIALE.

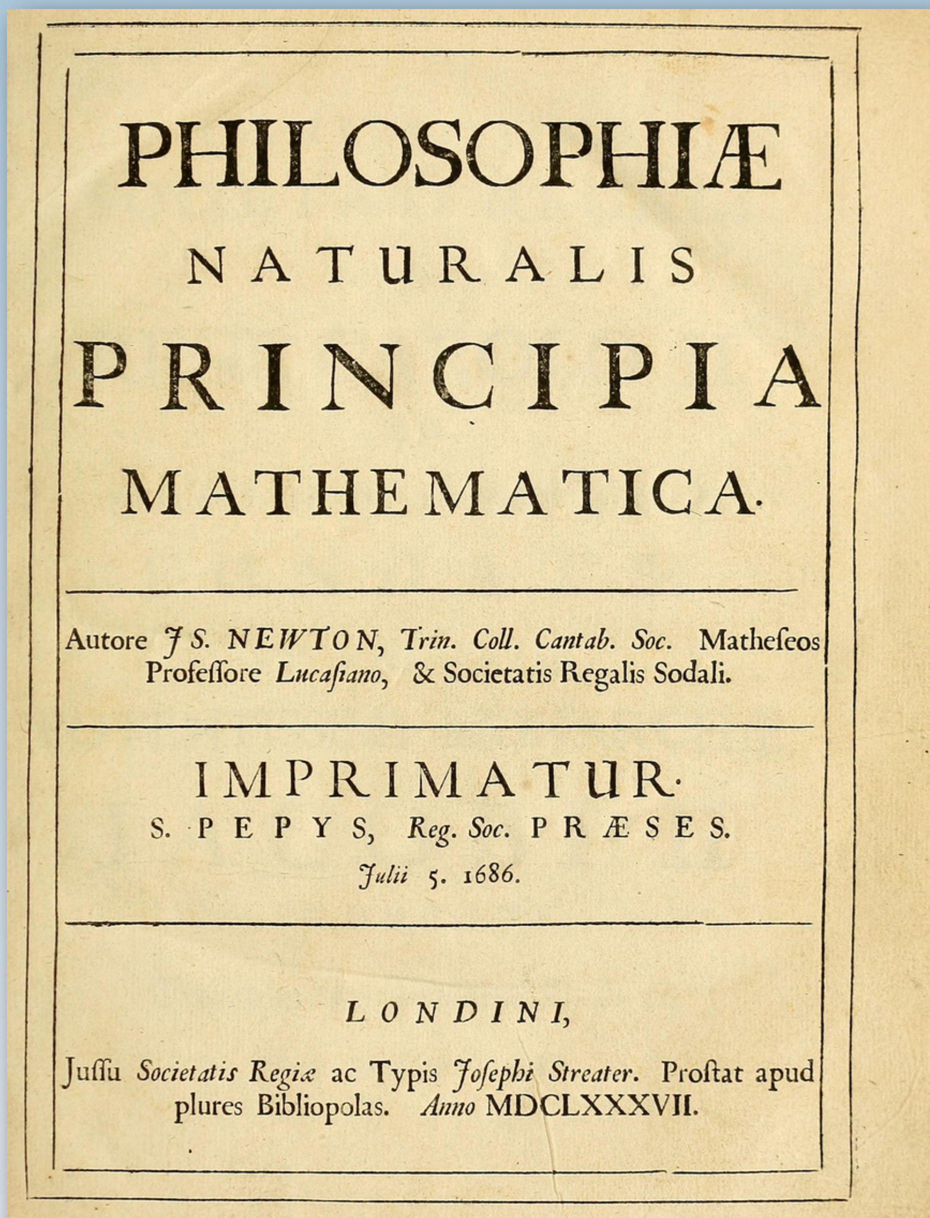
IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Il Calcolo Differenziale venne introdotto (più o meno indipendentemente) da Isaac Newton (1642-1726) e da Gottfried Leibniz (1646-1716).

Fu Newton, però, che intuì che le leggi che governano il mondo attorno a noi possono essere espresse attraverso di esso.

Per Newton tutti i fenomeni possono essere visti come il "moto" di un qualche ente e studiare come varia un fenomeno nel tempo significa studiare la velocità di questo moto.





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Nel suo libro più famoso, I *Principia Mathematica*, pubblicato nel 1687, Newton pose le basi della Fisica Classica (Leggi della Dinamica, Legge della Gravitazione Universale).

La formulazione matematica delle leggi della Fisica classica è il primo esempio moderno di Modello Matematico.

MODELLI MATEMATICI IN BIOLOGIA

Nel tempo, la Matematica ha aumentato il suo raggio d'azione al di fuori dal campo della Fisica e i modelli matematici sono diventati un metodo di analisi in discipline come la Biologia, l'Economia o le Scienze sociali.

Il problema fondamentale nel trasferimento dei metodi matematici in questi ambiti è proprio l'assenza di leggi "certe" come la Legge di Gravitazione Universale. Per questo, in taluni casi, i modelli matematici in queste scienze consentono di fare previsioni meno accurate. Nonostante ciò, l'approccio "matematico" sostanzialmente funziona.

Presenteremo ora due modelli che descrivono il modo in cui u**na popolazione si evolve nel tempo**, il modello di Malthus e il modello Logistico.

Entrambi i modelli valgono sotto queste ipotesi semplificative:

- POPOLAZIONE ISOLATA (ossia non ci sono scambi con l'esterno, né in termini di risorse, né in termini si emigrazioni o immigrazioni);

- POPOLAZIONE INDISTINGUIBILE per sesso ed età.

Il modello di Malthus e il modello logistico sono descritti rigorosamente usando il calcolo differenziale. Noi utilizzeremo un altro approccio, i cosiddetti METODI ITERATIVI.

Cos’è un processo (o metodo) iterativo?

Sia T una trasformazione che a un dato in entrata u_0 associa un dato in uscita $u_1 = T(u_0)$.

Applichiamo nuovamente la trasformazione T al dato u_1 ottenendo così un valore $u_2 = T(T(u_0)) = T(u_1)$.

Iterando il procedimento, al passo n-simo avremo $u_{n+1} = T(u_n)$.

In questo modo, a partire dal dato u_n possiamo calcolare u_{n+1}.

IL MODELLO DI MALTHUS

Il modello di Malthus è dovuto all'economista inglese Thomas Malthus (1766-1834), che lo introdusse nel trattato "*An essay on the principles of population as it effects the future improvement of the society*" del 1798.

Nei suoi studi di natura economica Malthus si riferiva alla popolazione umana, ma il modello si può applicare a molte altre specie, da mammiferi a batteri.

Immaginiamo di voler stimare come varia una popolazione anno dopo anno (o fissiamo un altro intervallo di tempo a nostro piacere).

Denotiamo con N_0 la popolazione al tempo iniziale.

Denotiamo con N_1 la popolazione attesa dopo un anno.

Denotiamo con N_n la popolazione attesa dopo n anni.

Siamo interessati a studiare il cosiddetto **tasso di crescita della popolazione**, ossia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la quantità

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n}$$

Il tasso di crescita rappresenta la variazione in termini assoluti tra la popolazione in due anni successivi rapportata con la popolazione N_n.

Il modello di Malthus prevede che il tasso di crescita di una popolazione è **costante** nel tempo.

Detta a tale costante, che si determina sperimentalmente e varia da specie a specie, abbiamo

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = a \qquad \text{ossia} \qquad N_{n+1} = (1 + a)N_n$$

La trasformazione che stiamo utilizzando è, quindi,

$$T(x) = (1 + a)x$$

In particolare, $N_1 = (1 + a)N_0$; inoltre

$$N_2 = (1 + a)N_1 = (1 + a)(1 + a)N_0 = (1 + a)^2 N_0 \, .$$

Iterando il procedimento

$$N_{n+1} = (1 + a)N_n = (1 + a)(1 + a)^n N_0 = (1 + a)^{n+1} N_0 \, .$$

Otteniamo, quindi, una formula "chiusa", che dipende solo da N_0.

Non sempre una cosa del genere è possibile.

$$N_n = (1+a)^n \; N_0$$

Come varia il parametro a? Sicuramente $1 + a > 0$ in quanto le popolazioni sono numeri positivi, quindi $a > -1$.

Se 1+a>1, ossia $a > 0$, allora $(1+a)^n$ tende ad essere sempre più grande all'aumentare di n; la popolazione, quindi, cresce molto velocemente al variare di n.

Se $1 + a = 1$, ossia $a = 0$, allora $N_{n+1} = N_0$, ossia la popolazione si mantiene costante nel tempo.

Se $0 < 1 + a < 1$, ossia $-1 < a < 0$, $(1+a)^n$ tende ad essere sempre più vicino a 0 al variare di n. La popolazione decresce in maniera molto rapida fino ad estinguersi.

Come si può determinare sperimentalmente il parametro a?

Bisogna avere a disposizione dei dati reali, ottenuti, per esempio, tramite un esperimento o un censimento.

Poiché $N_1 = (1 + a)N_0$, segue facilmente che $a = \dfrac{N_1}{N_0} - 1$.

Come valore per N_0 e N_1 per calcolare a scegliamo quelli relativi ai dati sperimentali al passo $n = 0$ e $n = 1$.

USANDO IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Sia $N(t)$ il numero di membri di una certa popolazione all'istante t e denotiamo con $N'(t)$ la velocità con cui la popolazione varia all'istante t.

Chiamiamo $\dfrac{N'(t)}{N(t)}$ "tasso di aumento della popolazione".

Il modello di Malthus prevede che il tasso di aumento della popolazione è costante, ossia $\dfrac{N'(t)}{N(t)} = K$, con $K \in \mathbb{R}$.

Se $N(0) = N_0$ il modello di Malthus è rappresentato da

$$\begin{cases} N'(t) = KN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

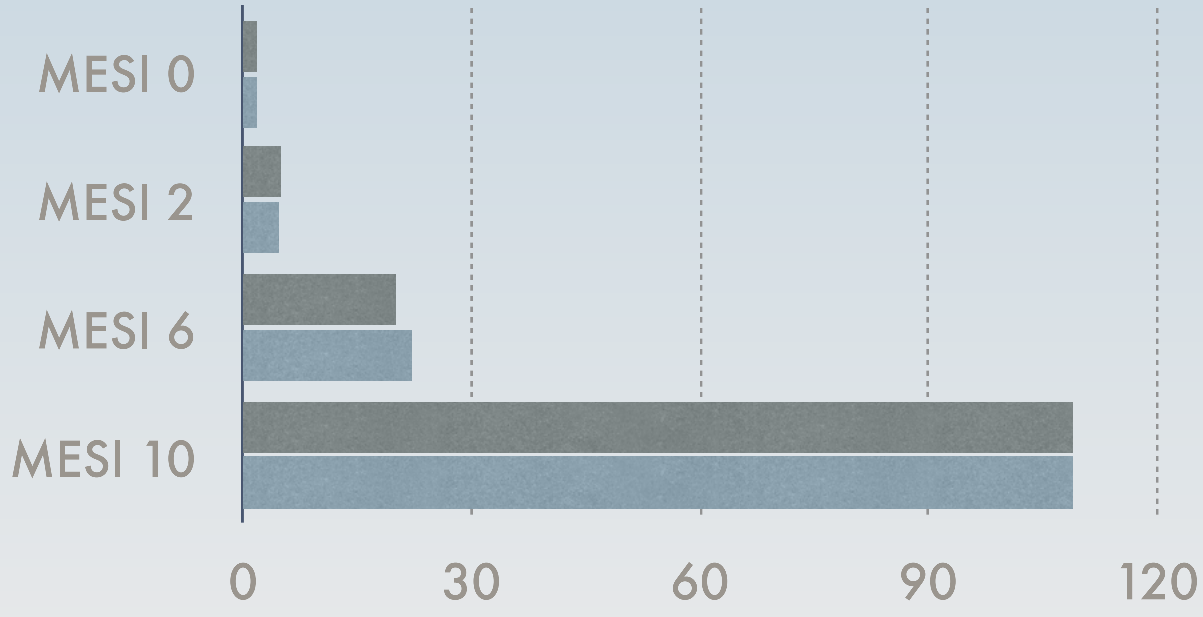
L' unica soluzione è $N(t) = N_0 e^{Kt}$.

DISCUSSIONE SUL MODELLO

Come ogni modello matematico, il modello di Malthus deve essere sottoposto a verifiche sperimentali. Due esperimenti in particolare permettono di capire bene quali sono i suoi punti di forza e di debolezza.

Esperimento n. 1: Nel 1975 il biologo Braun studiò dei piccoli roditori IN LABORATORIO. Le condizioni di vita erano quindi ideali e ai roditori venivano forniti cibo, acqua e risorse a volontà.

La popolazione iniziale era composta da 2 individui e si osservò come essa cresceva nell'arco di alcuni mesi. L'accordo tra i dati sperimentali e i valori attesi utilizzando il modello di Malthus era pressoché perfetto.



Esperimento n. 2: Negli anno ’30 il biologo russo G. F. Gause (1910-1986) effettuò un altro esperimento.

Mise 5 protozoi in una provetta che conteneva del brodo di coltura e contò il numero di protozoi ogni giorno per 6 giorni.

Anche in questo caso, all’inizio c’era accordo tra dati reali e dati estrapolati dal modello di Malthus.

A un certo punto, però, la crescita della popolazione rallentò e il numero dei protozoi si assestò su una popolazione pressoché costante di poche centinaia di individui.

Secondo le stime ottenute attraverso il modello di Malthus, al sesto giorno ci sarebbero dovuti essere migliaia e migliaia di protozoi.

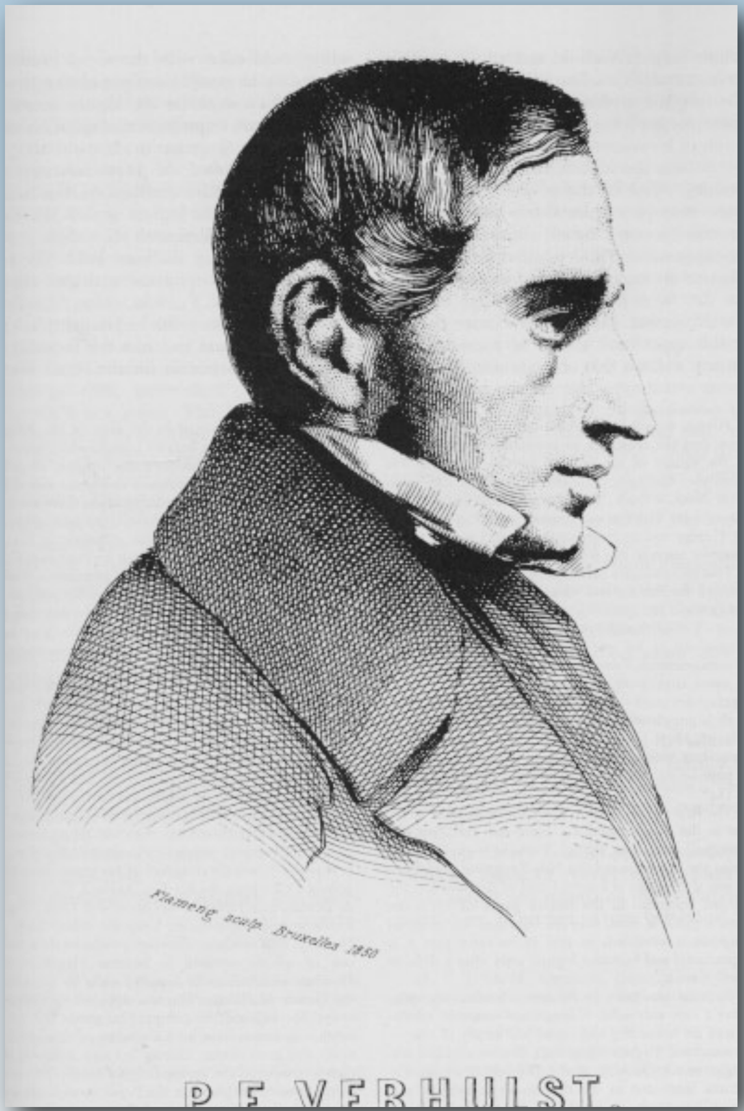
Conclusioni: Il modello di Malthus descrive la crescita di una popolazione in condizioni ottimali di cibo e risorse. Se ci sono abbastanza risorse la crescita di una popolazione è molto rapida.

Se le risorse cominciano a scarseggiare a seguito dell'aumento della popolazione, nelle fasi iniziali il modello di Malthus descrive bene la situazione, ma a un certo punto la crescita frena e sembrerebbe assestarsi su un valore "costante".

IL MODELLO LOGISTICO

Il modello logistico fu introdotto dal biologo-matematico P. F. Verhulst (1804-1849) nel 1837.

Esso rappresenta, in un certo senso, un “correttivo” del modello di Malthus.



Sia N_0 la popolazione a $t = 0$, denotiamo con N_1 la popolazione attesa dopo un anno e con N_n la popolazione attesa dopo n anni.

Nel modello logistico, risulta che esistono a, b costanti positive tali che

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = a - bN_n.$$

Di qui segue che

$$N_{n+1} = N_n(a - bN_n) + N_n = (1 + a)N_n - bN_n^2$$

Quando N_n è un numero "piccolo" (quindi nelle prime fasi in cui studiamo il fenomeno), la quantità bN_n^2 è anch'essa "piccola", quindi il modello logistico all'inizio si comporta quasi come quello di Malthus; all'aumentare della popolazione la presenza di bN_n^2 diventa più rilevante.

Anche in questo caso si possono determinare a e b in maniera "sperimentale", avendo a disposizione dei dati reali: in particolare, dobbiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} N_1 = (1+a)N_0 - bN_1^2 \\ N_2 = (1+a)N_1 - bN_2^2\,. \end{cases}$$

Come valori di N_0, N_1 ed N_2 consideriamo i dati reali ottenuti tramite le rilevazioni demografiche o esperimenti.

USANDO IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Assumendo che, all'istante $t = 0$ la popolazione sia N_0, il modello logistico è

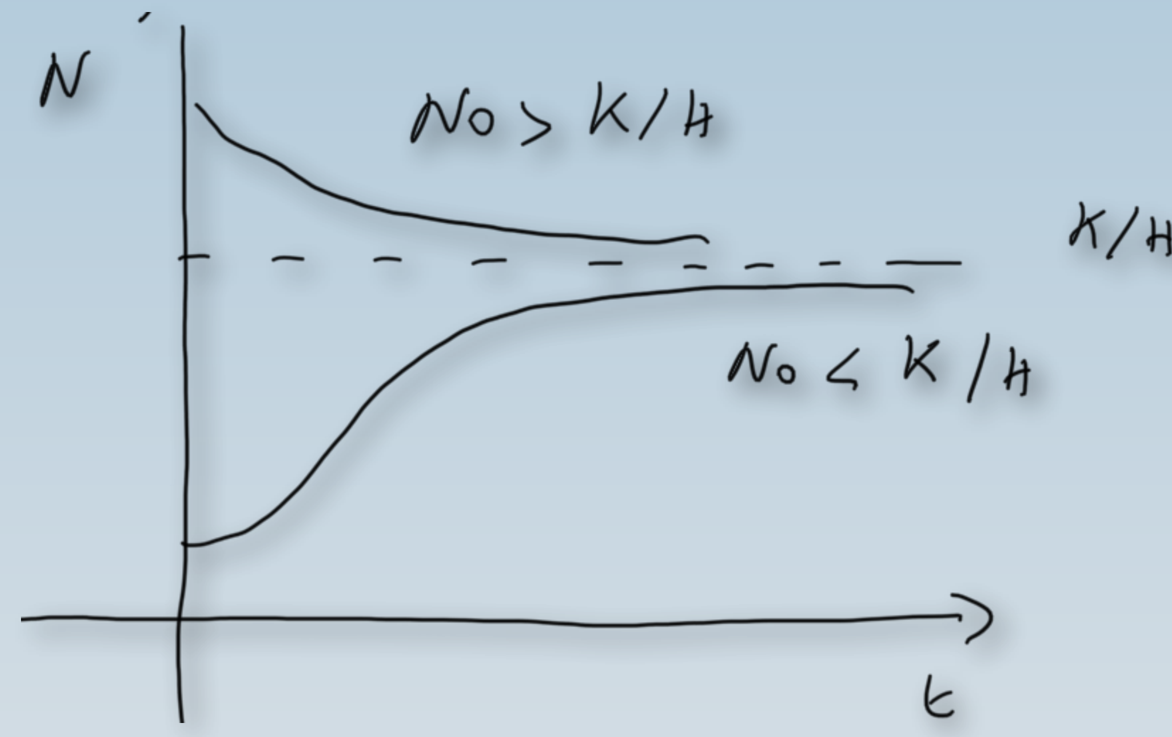
$$\begin{cases} N'(t) = (K - HN(t))N(t) \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

con H, K costanti opportune.

La soluzione di questo problema è

$$N(t) = N_0 \frac{K/He^{Kt}}{K/H - N_0 + N_0 e^{Kt}}$$

Il grafico di questa funzione è rappresentato nella figura di fianco; K/H è detto "valore di equilibrio", nel senso che $\lim_{t\to+\infty} N(t) = K/H$.



DISCUSSIONE SUL MODELLO

I dati sperimentali mostrano che il modello logistico si accorda molto meglio del modello di Malthus per rappresentare la crescita di una popolazione (vedasi l’esperimento di Gause).

Sussistono però delle criticità. Per esempio, due economisti, Pearl e Reed, utilizzando il modello logistico, analizzarono la popolazione degli USA dal 1790 al 1910, ottenendo un accordo molto buono con i dati reali. Secondo le loro stime, però, il valore “costante” verso cui si sarebbe assestata la popolazione era di circa 200.000.000 abitanti, mentre la popolazione degli USA al 2018 consta di più di 327.000.000 di abitanti.

Il modello logistico, quindi, è sicuramente più efficace di quello di Malthus nel rappresentare la realtà, ma può esso stesso essere soggetto a correttivi.

MODELLI PREDA-PREDATORE

IL MODELLO DI LOTKA-VOLTERRA

Il prossimo modello coinvolge l'interazione di due specie diverse.

La sua nascita partì da una osservazione sperimentale. Il biologo U. D'Ancona (1896-1964), studiando la variazione del pescato nell'Adriatico nel periodo 1914-1923, notò un anormale aumento del numero dei pesci predatori (cioè che si nutrono di altri pesci) sul totale del pesce pescato. La sua ipotesi fu che il rallentamento della pesca dovuto alla I Guerra Mondiale aveva influito in modo diverso su prede e predatori, favorendo questi ultimi. La pesca, insomma, modificava in qualche modo quello che sarebbe stato l'equilibrio naturale tra specie diverse.

Espresse queste sue idee al suocero, il matematico Vito Volterra (1860-1940), che si occupò di creare un modello che spiegasse il fenomeno.

Per far ciò, Volterra studiò preliminarmente il problema senza considerare il fenomeno esterno della pesca, che però poi potè includere facilmente. Il suo approccio riuscì a trovare una spiegazione matematica all'evidenza sperimentale.

Il modello implementato da Volterra prevede che:

- Le popolazioni di preda e predatori vivono in un ambiente isolato, non soggetto a migrazioni;
- Le prede hanno risorse infinite a disposizione;
- I predatori si nutrono solo delle prede;
- Non ci sono interazioni con altre specie.

Denotiamo con x_n e y_n il numero (rispettivamente) di prede e predatori nell'n-simo intervallo di tempo in cui si studia il fenomeno.

Le prede, in assenza di predatori, crescono secondo un modello Malthusiano, perché hanno infinite risorse a disposizione.

I predatori, in assenza di prede, decrescono secondo un modello Malthusiano, perché non hanno cibo.

Se introduciamo l'effetto della predazione, il tasso di crescita della popolazione delle prede all'n-simo intervallo di tempo diminuirà per effetto dei predatori di una quantità proporzionale al numero di predatori y_n.

Allo stesso modo, il tasso di crescita della popolazione dei predatori aumenterà di una quantità proporzionale al numero di prede x_n.

In definitiva

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = a - cy_n \qquad \text{e} \qquad \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n} = b + dx_n$$

con $a > 0$ e $-1 < b < 0$.

Dette x_0 e y_0 le popolazioni iniziali di prede e predatori otteniamo le relazioni

$$\begin{cases} x_{n+1} = (a+1)x_n - cx_ny_n \\ y_{n+1} = (b+1)y_n + dx_ny_n \end{cases}$$

Tale modello matematico viene detto modello di Lotka–Volterra, in quanto fu determinato,indipendentemente, da Volterra e dalla statistico A. J. Lotka (1880-1949) nello stesso anno (1926).

Le costanti a, b, c, d, con $c, d > 0$, si determinano sperimentalmente con metodi simili a quelli già visti.

Si può dimostrare è che l'andamento del numero di prede e predatori è ciclico.

Se aumenta il numero di prede, ovviamente i predatori hanno più risorse, quindi aumenta anche il loro numero. Ma un eccessivo numero di predatori produce una diminuzione nelle prede. Se diminuiscono le prede, diminuisce l'unica risorsa dei predatori e, quindi, diminuisce il loro numero. A quel punto, le prede sono soggette a una minore attività di predazione e il loro numero può aumentare nuovamente…di qui il ciclo si ripete.

Inoltre, il valor medio di numero di prede e predatori durante ogni ciclo rimane costante.

GRAZIE PER L'ATTENZIONE!