

La matematica nella Computer Graphics

Pierluigi Amodio

Dipartimento di Matematica

Università di Bari

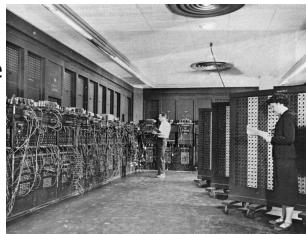
pierluigi.amodio@uniba.it

<https://www.dm.uniba.it/members/amodio>

A.A. 2025/2026

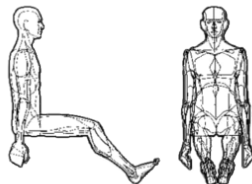
Computer Science

- La *computer science* nasce alla fine degli anni 30 per scopi militari. I primi calcolatori furono creati con l'obiettivo (di americani ed inglesi) di decrittare i messaggi cifrati dai tedeschi e per questo servivano macchine automatiche in grado di eseguire tantissime operazioni in pochissimo tempo.
- Si è quindi subito deciso di dotare i calcolatori elettronici (anni 40) di una **memoria** per immagazzinare i dati e di una **unità aritmetico logica** in grado di elaborarli.
- All'inizio non era necessario rendere semplice il loro utilizzo in quanto bastavano tecnici specializzati.
- Solo negli anni 50 si è pensato di utilizzare tutta questa tecnologia per scopi industriali ed anche di semplificarne l'uso.



Computer Graphics – CG

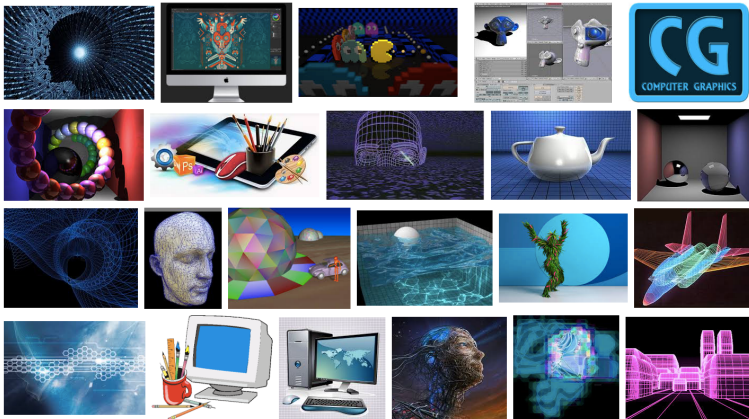
Le parole “computer graphics” furono usate per la prima volta nel 1960 da William Fetter della Boeing che disegnò una figura umana usando un computer.



La CG è un'area della Computer Science che si occupa di ...
“almost everything on computers that is not text or sound”.



The term **computer graphics** refers to anything involved in the creation or manipulation of images on computer, including animated images

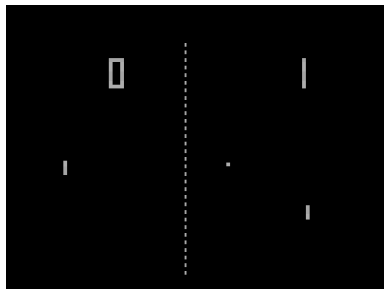


CG - Campi di applicazione

- rendere più semplice l'utilizzo degli apparecchi elettronici
- videogiochi
- fotoritocco di immagini digitali
- film d'animazione o con contenuti digitali
- progettazione
- design industriale
- ...

In ognuno di questi campi ha un ruolo fondamentale la matematica perchè ogni applicazione è basata su algoritmi numerici

CG - principali applicazioni: videogiochi



1972: Pong



2015: Fifa 16

CG - principali applicazioni: fotoritocco



creazione immagini con l'intelligenza artificiale

Le immagini generate con l'IA non vengono prese da un database di immagini pronte, ma vengono costruite matematicamente da zero ogni volta, usando modelli di intelligenza artificiale generativa.

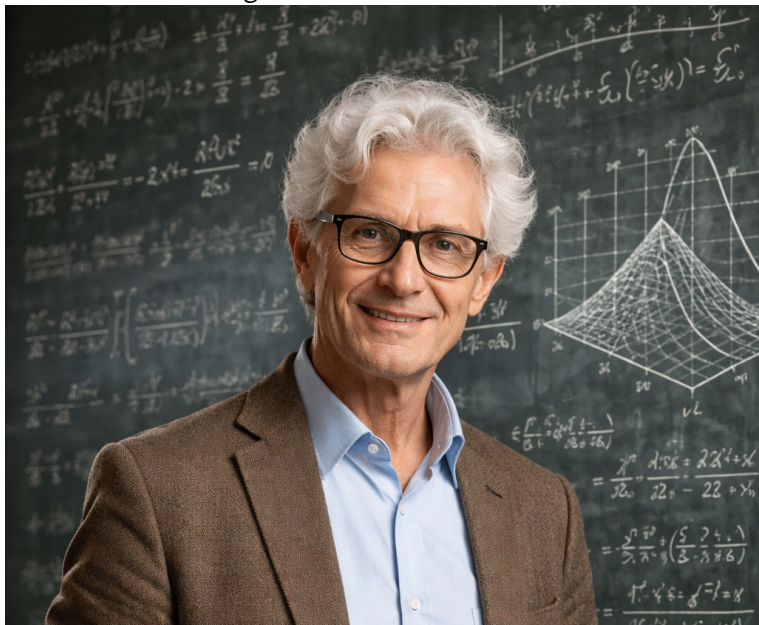
I modelli di generazione immagini sviluppati da OpenAI

- 1 Durante l'addestramento vedono milioni o miliardi di immagini insieme alle loro descrizioni testuali.
- 2 Imparano pattern statistici:
 - ▶ forme (volti, oggetti, prospettiva)
 - ▶ colori
 - ▶ illuminazione
 - ▶ texture

Quando scriviamo (“una sfera con riflessi realistici”), il modello non cerca un'immagine già esistente ma genera pixel nuovi calcolandoli numericamente.

È simile a come uno studente di disegno impara osservando molte immagini, ma poi disegna qualcosa di nuovo.

Mi crei una immagine di un professore con occhiali e capelli bianchi davanti ad una lavagna con dei numeri?



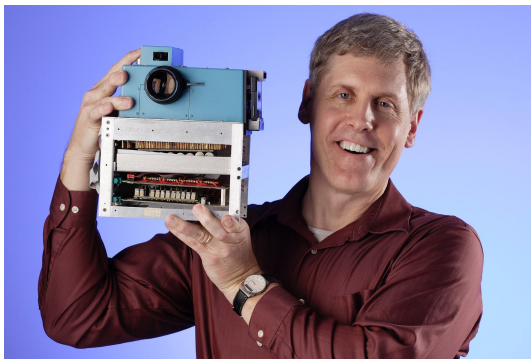
Dal rullino al digitale

Prima dell'era digitale (iniziata a metà degli anni 90) tutti i fotografi (dai grandi fotoreporter ai vacanzieri della domenica) dovevano cimentarsi con i rullini fotografici, piccoli dispositivi su cui rimanevano impresse le fotografie. Una volta terminato il rullino (con 24/36 foto), era necessario portarlo in un laboratorio specializzato che sviluppava e stampava le fotografie.



Fotografia digitale

Nel 1975 l'ingegnere della Kodak Steve Sasson riuscì a realizzare la prima fotocamera digitale.



La macchina possedeva un sensore d'immagine con una risoluzione di 0,01 megapixel (100 X 100 pixel) e richiedeva 23 secondi per registrare una singola immagine all'interno di una cassetta digitale. La fotocamera pesava circa 4kg.

Fotografia digitale

La macchina fotografica di Sasson non fu mai commercializzata perchè sarebbe stata troppo costosa e la Kodak abbandonò la ricerca. La prima macchina fotografica digitale fu commercializzata nel 1987 da una piccola società californiana: la MegaVision. Un anno dopo i giapponesi di Fuji iniziarono la commercializzazione di un loro modello di fotocamera digitale. Il prezzo partiva da 10.000\$ e arrivava fino a 40.000\$.



Foto digitali

Ormai da tanto tempo le fotografie digitali hanno conquistato il mercato e soppiantato le macchine analogiche che rimangono solo per esteti della fotografia. La qualità delle fotografie è la stessa ma la possibilità di utilizzare algoritmi numerici per migliorarle (o modificarle) alcuni aspetti rende le foto digitali migliori. Alla base di questa tecnologia, la rappresentazione dell'immagine mediante una matrice di puntini colorati (pixel).

Questo significa trasformare una fotografia in una matrice di numeri.



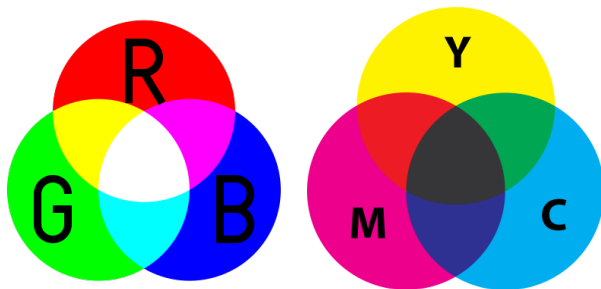
72	78	74	64	76	72	73	74	88	76	77	74	73	72	69	75	76	66	71	58	77	66	73	68	73	66	71
74	68	74	79	71	74	78	75	73	78	77	75	73	74	73	78	65	69	73	79	71	79	64	64	64	69	
72	76	73	73	71	70	80	75	82	76	73	75	69	74	73	74	68	68	69	69	69	69	67	74	69	77	
77	79	78	79	82	75	78	74	78	78	75	79	83	84	71	71	67	62	66	68	63	78	73	67	67	68	
81	88	82	82	79	82	81	75	81	72	77	78	87	73	72	70	64	66	59	69	68	67	82	67	70	74	
81	79	83	83	82	85	85	79	79	72	78	74	86	74	67	69	63	67	67	68	76	67	85	68	74	66	
88	82	79	81	87	86	86	77	71	76	76	71	71	68	67	63	65	67	73	63	68	64	64	78	62	78	
81	89	79	74	79	72	75	71	69	76	72	78	72	68	78	61	67	65	67	61	45	64	62	64	61	74	
84	85	82	80	83	79	78	68	75	73	69	69	67	67	78	67	61	62	66	62	69	64	78	65	72	67	
84	81	79	84	78	81	76	71	74	73	72	69	65	64	67	69	70	62	71	61	68	62	66	69	58	69	
86	87	84	77	71	87	72	72	77	78	75	85	78	67	67	64	68	62	69	58	64	62	71	68	69	66	
72	82	78	80	89	89	77	67	78	68	67	69	72	72	72	68	67	64	69	68	70	64	66	71	61	67	
76	75	79	73	79	73	78	74	74	72	64	70	89	71	67	65	66	72	68	71	83	85	64	69	88	62	
88	66	75	65	89	75	68	69	73	68	69	69	75	78	78	68	68	78	66	62	65	65	68	68	73	68	
79	78	76	72	74	67	78	78	72	71	68	78	69	65	63	68	69	64	68	74	78	65	65	66	66	71	
73	78	77	66	68	68	63	67	66	71	64	74	66	71	69	61	67	67	78	62	66	64	68	69	63	69	
71	75	78	73	72	69	76	75	72	68	69	67	68	72	72	78	68	69	63	68	68	72	71	62	72	67	
78	68	69	69	69	67	71	67	78	65	68	75	67	68	72	70	67	74	78	67	68	76	78	74	71	69	
69	72	72	78	69	66	73	64	75	75	64	68	62	71	75	78	69	72	75	71	67	72	76	73	75	67	
68	72	72	71	71	78	72	74	68	73	72	67	65	71	78	71	69	68	68	72	76	79	72	77	77	72	
67	68	68	71	74	71	78	67	72	78	67	73	65	72	71	68	78	68	74	73	73	67	74	78	81	74	
67	67	68	72	75	78	68	72	78	63	64	66	75	71	71	78	74	78	72	72	75	72	79	81	74	78	
68	71	72	72	72	68	69	72	64	72	68	71	59	66	74	65	71	71	64	66	77	81	83	68	78	77	
67	78	72	72	71	68	71	72	68	78	78	78	71	65	63	65	67	71	72	74	68	75	84	84	77	74	
66	67	67	71	71	68	72	75	68	65	68	74	67	65	67	67	67	72	67	69	76	78	80	83	65	77	
77	69	69	67	81	75	78	71	74	74	75	67	71	71	72	68	73	69	66	73	71	77	78	82	77	82	
68	66	76	73	71	67	75	69	73	72	73	72	67	65	67	68	75	68	77	68	80	77	68	80	78	79	
66	67	75	78	73	67	69	67	69	78	73	72	89	71	67	67	67	82	69	74	73	78	76	78	78	81	
72	68	81	67	71	75	74	67	71	73	74	86	78	69	69	73	78	76	81	69	63	73	79	88	88	79	
68	73	69	71	66	71	74	71	78	67	78	67	74	72	69	73	69	73	78	74	78	76	76	75	62	84	
73	69	69	69	69	73	76	75	73	75	78	71	71	74	78	77	73	76	71	74	67	74	73	69	65	85	
74	77	74	78	75	68	73	74	78	72	68	68	74	73	76	71	75	71	71	78	77	76	77	76	84	79	
78	76	72	72	73	74	78	71	69	78	65	81	73	75	78	74	62	78	75	77	74	62	75	79	88	79	
73	74	74	73	86	77	76	75	69	74	67	75	66	76	70	74	69	77	69	76	74	72	80	79	78	82	
79	78	77	84	75	73	74	69	78	77	74	76	75	69	69	78	75	75	69	78	75	68	85	82	72	78	
65	74	67	78	67	78	78	78	78	72	75	65	71	72	68	72	78	75	63	75	77	76	77	78	83	82	
77	71	88	64	67	69	72	74	76	72	72	68	72	71	71	75	66	73	88	69	77	75	86	81	82	81	
72	71	73	78	74	79	72	74	73	71	73	71	74	74	74	76	69	80	67	73	72	77	81	77	74	81	
67	74	76	75	74	72	79	72	67	75	74	76	65	73	78	78	76	72	75	76	78	73	76	79	79	82	
73	73	68	67	88	73	68	78	68	73	72	71	78	73	78	73	76	73	75	76	78	65	82	76	81	88	

Foto e immagini digitali

Esistono diversi formati in cui è possibile memorizzare un'immagine digitale: tra questi jpg, png, gif, tiff, pdf. Ognuno di questi ha delle caratteristiche peculiari e conserva alcune proprietà dell'immagine. Ma tutti mantengono una matrice $m \times n \times d$ di numeri che permettono di ricostruire l'immagine. Il numero $m \cdot n$ rappresenta il numero di pixel dell'immagine, mentre d rappresenta il modo in cui il colore viene decomposto:

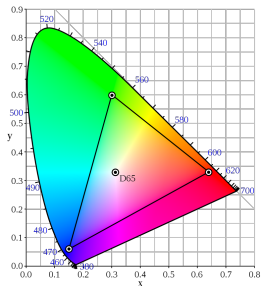
- $d = 1$: immagine in scala di grigi
- $d = 3$: immagine RGB (Red, Green, Blue)
- $d = 4$: immagine CMYK (Cyan, Magenta, Yellow, Key black)

RGB e CMYK



- L'RGB è un modello additivo: unendo i tre colori con la loro intensità massima si ottiene il bianco (tutta la luce viene riflessa).
- Il CMYK è un modello di colore a sintesi sottrattiva che viene usato nei dispositivi di stampa a colori (stampa in quadricomia).

Da RGB a CMYK e viceversa



Il “gamut” è l'intero range di colori che l'occhio umano è in grado di percepire. I modelli di colore proposti sono in grado di rappresentare solo una parte di essi che in genere dipende dal dispositivo (monitor o stampante). Esistono delle trasformazioni che permettono di passare da un modello all'altro, ma queste non sono univoche. Supponendo che esistano $n + 1$ possibili variazioni per ciascun colore primario (da 0 a n) un esempio di formule di trasformazione è il seguente:

$$(R,G,B) = ((n-(C,M,Y)) \times (n-K)) \bmod n$$
$$t = \max(R,G,B), \quad (C,M,Y) = \lceil n(1 - (R,G,B)/t) \rceil, \quad K = n - t$$

Trasformazione dell'immagine in scala di grigi (o in bianco/nero)

Il passaggio dal colore ad una scala di grigi viene fatto correttamente mediante il calcolo della **luminanza**, cioè una combinazione convessa dei tre colori primari

$$0.299 \times R + 0.587 \times G + 0.114 \times B$$

che è stata definita sperimentalmente simulando la sensibilità (media) dell'occhio umano ai vari colori.

Il passaggio da una scala di grigi al bianco/nero viene fatto attraverso un valore soglia che dipende dall'immagine che vogliamo trasformare. In matlab la matrice `uint8` viene trasformata in `logical` grazie agli operatori di confronto

Immagini digitali in matlab

Qualunque software matematico è in grado di importare e modificare immagini digitali.

Ad esempio in matlab la matrice è di tipo `uint8`, cioè ogni numero (elemento della matrice) è un intero che varia da 0 a 255 (2^8 combinazioni) e occupa un byte di memoria. Questo significa che il numero totale di colori di una immagine RGB è $2^{24} = 16777216$, cioè oltre 16 milioni. In RGB, (0,0,0) indica il nero e (255,255,255) indica il bianco. L'elemento (1,1) indica il pixel in alto a sinistra. Il primo indice indica la riga. Una immagine di buona qualità potrebbe essere 1920×1080 pixel (full HD), cioè richiede quasi 6 megabyte di memoria!

Manipolazione di immagini

Tra i tanti vantaggi di una immagine digitale c'è la possibilità di modificarla (migliorarla) intervenendo sugli elementi della matrice. Le funzioni di trasformazione

$$A(x, y) \xrightarrow{\text{filtro}} B(x, y)$$

prendono il nome di filtri. Questi possono essere di tipo:

- puntuale
- locale
- globale

Filtri

Nei filtri puntuali il pixel $B(x, y)$ dipende solo dal pixel corrispondente nell'immagine originale. Servono a modificare la luminosità dell'immagine, a ridurre le gradazioni raggruppando i colori, oppure ad eliminare alcuni colori.

Nei filtri locali il pixel $B(x, y)$ dipende dal pixel corrispondente nell'immagine originale e dai pixel intorno. Servono a smussare le alte frequenze (passa-basso) o ad evidenziare i contorni (passa-alto).

Nei filtri globali il pixel $B(x, y)$ dipende da tutti i pixel dell'immagine originale. Servono ad eliminare zone troppo chiare o troppo scure lavorando sull'istogramma delle frequenze dei colori.

Filtro puntuale

Occorre definire per ogni canale una funzione discreta

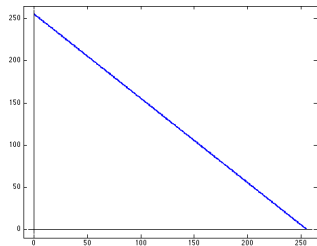
$$f : [0, 255] \Rightarrow [0, 255]$$

Per rispettare le tonalità dei colori ha senso considerare la funzione monotona crescente. Se monotona decrescente a colori chiari corrispondono colori scuri e viceversa. Ma la funzione può essere anche random o non monotona...

Esempio: $f(x) = |\sin(x)|$, dove x può essere definito in qualsiasi intervallo. Ovviamente è necessario riparametrizzare sia l'input e l'output

$$A(x, y) \xrightarrow{\text{in } [0, 4\pi]} A'(x, y) \xrightarrow{f} B'(x, y) \xrightarrow{\text{in } [0, 255]} A(x, y)$$

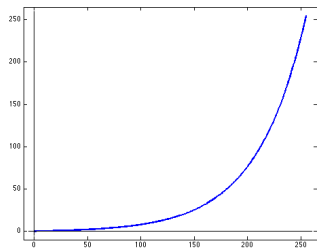
Esempio filtro puntuale: negativo



$$y = 255 - x$$



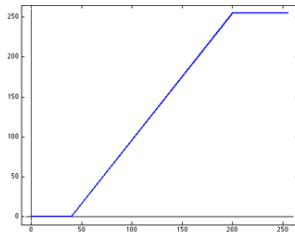
Esempio filtro puntuale: esponenziale



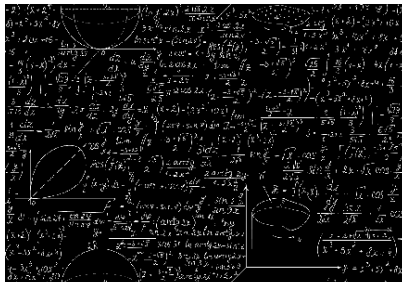
$$y = \exp\left(\frac{x \log(256)}{255}\right) - 1$$



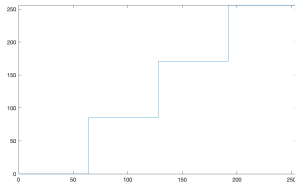
Esempio filtro puntuale: eliminazione rumore



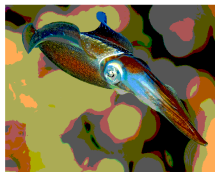
$$y = \begin{cases} 0 & x \leq 40 \\ \frac{255}{160}(x - 40) & 41 \leq x \leq 200 \\ 255 & x \geq 201 \end{cases}$$



Esempio filtro puntuale: riduzione del numero di colori



$$y = \left\lfloor \frac{kx}{256} \right\rfloor \frac{256}{k-1}$$



ku4

Esempio filtro locale: media mobile (passa-basso)



Solo una parte della lavagna è stata filtrata. Sapresti riconoscerla?

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

I valori della matrice sono tutti non negativi e la somma è 1.

Esempio filtro locale: filtro gaussiano

$$M = \frac{1}{273} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 1 \\ 7 & 26 & 41 & 26 & 7 \\ 4 & 16 & 26 & 16 & 1 \\ 1 & 4 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

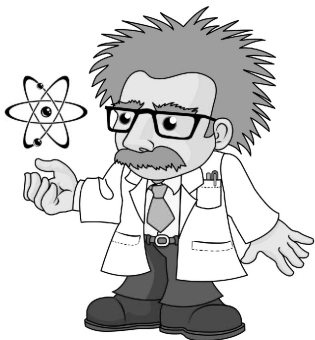
che deriva dall'approssimazione della funzione gaussiana

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

dove σ è la deviazione standard e x e y rappresentano la distanza dal centro. Per ottenere la matrice bisogna scegliere $\sigma^2 = 4/\log(41)$ oppure passo di discretizzazione (la distanza tra due pixel adiacenti)

$$h = \sqrt{\log(41)/4}.$$

Esempio filtro locale: estrazione di contorni (passa-alto)



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La somma degli elementi è 0.

Esempio filtro locale: filtro laplaciano

Un altro esempio è quello di combinare il risultato con il kernel $(-2, 0, 2)$ con quelli ottenuti con rotazioni di 90, 180 e 270 gradi e poi facendo una media di questi. Infine il filtro laplaciano che utilizza la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Filtri globali: istogramma di una funzione

L'istogramma associato ad una fotografia conta quanti pixel sono associati ad un determinato colore



Valori piccoli dei pixel indicano le ombre, valori grandi le luci mentre quelli centrali i cosiddetti mezzitoni. Se i picchi sono all'inizio dell'istogramma la foto è troppo scura, se sono alla fine, la foto è troppo chiara. Una foto ben bilanciata ha un istogramma a campana.

Grafica raster vs. grafica vettoriale

Tutte le immagini che abbiamo considerato hanno diverse estensioni (.jpg, .tif, .png, .gif) ma sono sempre caratterizzate dai pixel che le compongono. Sono chiamate immagini raster (o bitmap).



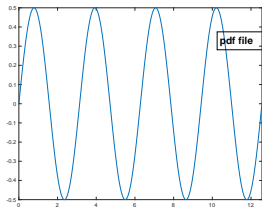
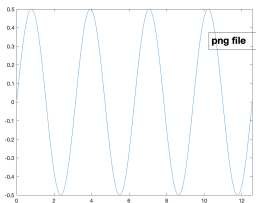
Esistono altri tipi di immagini che sono descritte mediante un insieme di primitive geometriche che definiscono punti, linee, curve e poligoni. Queste sono le immagini vettoriali ed il formato associato è definito attraverso equazioni matematiche ed è indipendente dalla risoluzione; infatti può essere ingrandito all'infinito senza subire perdite di qualità e definizione.

Rappresentazione in matlab (vettoriale)

Come abbiamo visto il *matlab* può importare e visualizzare immagini raster, ma tutte le primitive di cui dispone per disegnare curve e superfici permettono di creare immagini vettoriali.

I file `.fig` (che però è un formato proprietario, i file possono essere visualizzati solo in matlab), memorizzano le informazioni su tutte le curve presenti, ed infatti queste possono modificate.

Se memorizzassimo un file `.fig` in uno `.pdf` o `.eps`, questo rimarrebbe vettoriale, ed infatti qualunque zoom della figura non mostrerebbe pixel. Viceversa la conversione in un file `.jpg` o `.png` trasformerebbe l'immagine in una matrice di pixel perdendo di definizione se ingrandita.



CG - principali applicazioni: film con contenuti digitali



1977: Guerre stellari

Film principali con contenuti digitali

- *Guerre Stellari* (1977) di George Lucas
- *Alien* (1979) di Ridley Scott,
- *E.T. l'extraterrestre* (1982) di Steven Spielberg
- *Ritorno al futuro* (1985) di Robert Zemeckis
- *Chi ha incastrato Roger Rabbit?* (1988) di Robert Zemeckis,
- *Toy Story* (1995) di John Lasseter
- ...
- *Titanic* (1999) di James Cameron
- *Avatar* (2009) di James Cameron

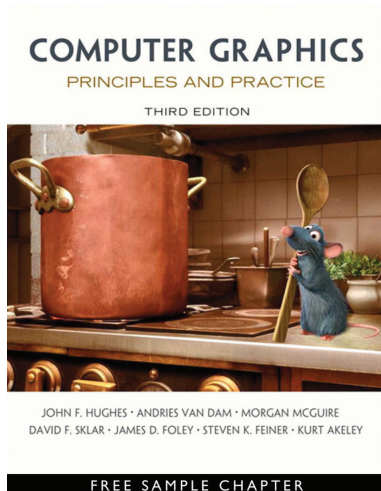
Vita di Pi (2012)



Film di animazione



1995: Toy Story



Film di animazione

Ma tutto cominciò con ...



1984: André e Wally B

Alle origini dell'animazione

Per costruire film di animazione computerizzata serve la matematica. Infatti ciascun oggetto è costruito a partire da

- alcuni (pochi) punti di controllo che lo identificano,
- funzioni matematiche che realizzano la ricostruiscono.

A seconda della scelta delle funzioni abbiamo una forma differente. Per muovere l'oggetto è poi sufficiente muovere i punti di controllo



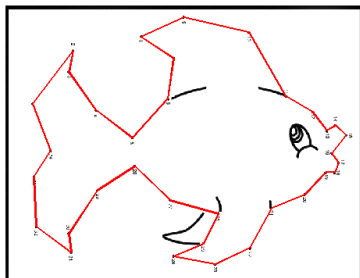
Unisci i puntini

Cosa si ottiene se uniamo i puntini (da 1 a 34) con una matita? Proviamo a risolvere questo gioco con la matematica.



La curva che unisce i puntini è detta interpolante. Se vogliamo unire i puntini con dei segmenti abbiamo una curva lineare a tratti. Nulla vieta però di utilizzare qualcosa di più complesso...

Alcune soluzioni

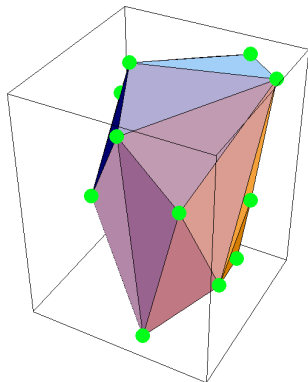
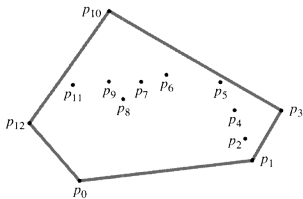


soluzioni ottenute modificando
l'interpolante o i parametri
che li caratterizzano.
Conoscere la matematica
permette di risolvere
correttamente il problema.



Creare forme partendo dai puntini

Si è però visto che, quando vogliamo creare delle forme (curve o superfici) particolari partendo dai puntini, è più facile che questi non siano interpolanti ma piuttosto di “controllo”, evitando ad esempi che il risultato “esploda” come nel caso precedente. Per questo si utilizzano particolari funzioni che fanno rimanere il risultato all’interno del dominio generato dai punti



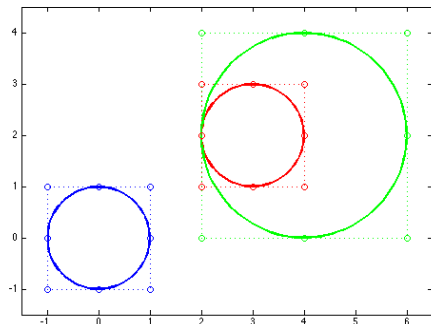
Computer-aided geometric design – CAGD

- è la scienza che si occupa di creare forme o oggetti in 3D partendo da puntini e regole di composizione
- è un settore a metà tra geometria computazionale e CAD che utilizza la descrizione matematica per costruire e rappresentare curve, superfici e volumi su un computer
- si occupa sia di oggetti con una geometria ben definita che di oggetti *free form*

Le più importanti funzioni matematiche che si usano nella CAGD sono le B-spline e le NURBS.

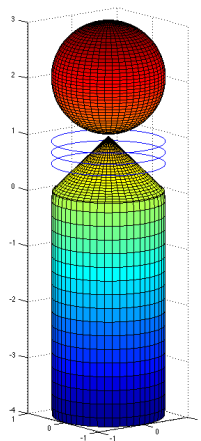


Rappresentazione di curve



Trasformazioni geometriche partendo dai punti di controllo

Rappresentazione di superfici



Rappresentazione di curve e superfici classiche.

Ogni magia è possibile nella Computer Graphics!!



Sveglia! La matematica ti offre opportunità. Approfittane!!