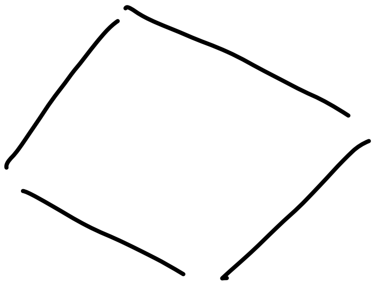
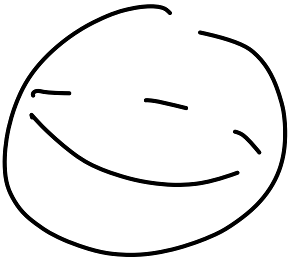
Geometria sferica

Dalla sfera-terra alla teoria assiomatica





Struttura della presentazione

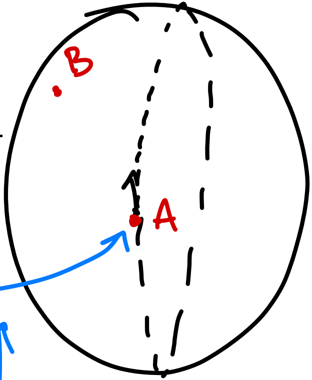
- Parte I: la sfera come modello intuitivo della Terra.
- Meridiani, paralleli, equatore, poli.
- Le “rette” della geometria sferica: i cerchi massimi.
- Distanze, angoli, triangoli sferici.
- Esempi sorprendenti: somma degli angoli interni $> 180^\circ$.

- Parte II: termini primitivi e assiomi della geometria sferica.
- Conseguenze dei primi assiomi.
- Angoli e triangoli: primi risultati essenziali.

Idea di partenza

- Nella geometria euclidea usuale lavoriamo sul piano.
- Qui invece immaginiamo di muoverci sulla superficie di una sfera.
- Il modello più naturale è la Terra:
  - i punti sono posizioni sulla superficie terrestre;
  - i cammini più naturali seguono i grandi cerchi;
  - le nozioni geometriche cambiano.
- La geometria sferica è quindi una geometria *non euclidea*.

[DISEGNO]

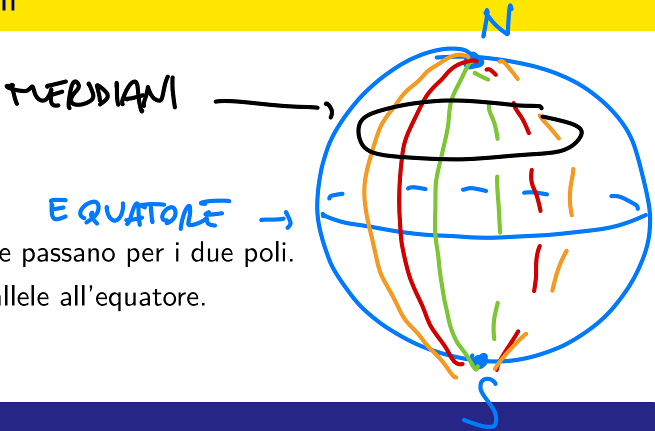


RETTA

CERCHIO MASSIMO

Poli, equatore, meridiani, paralleli

- Fissiamo sulla sfera:
  - il **Polo Nord**;
  - il **Polo Sud**;
  - l'**equatore**.
- I **meridiani** sono le circonferenze che passano per i due poli.
- I **paralleli** sono le circonferenze parallele all'equatore.
- L'equatore è il parallelo più grande.



Osservazione

Meridiani ed equatore hanno un ruolo speciale: sono esempi di **cerchi massimi**.

[DISEGNO]

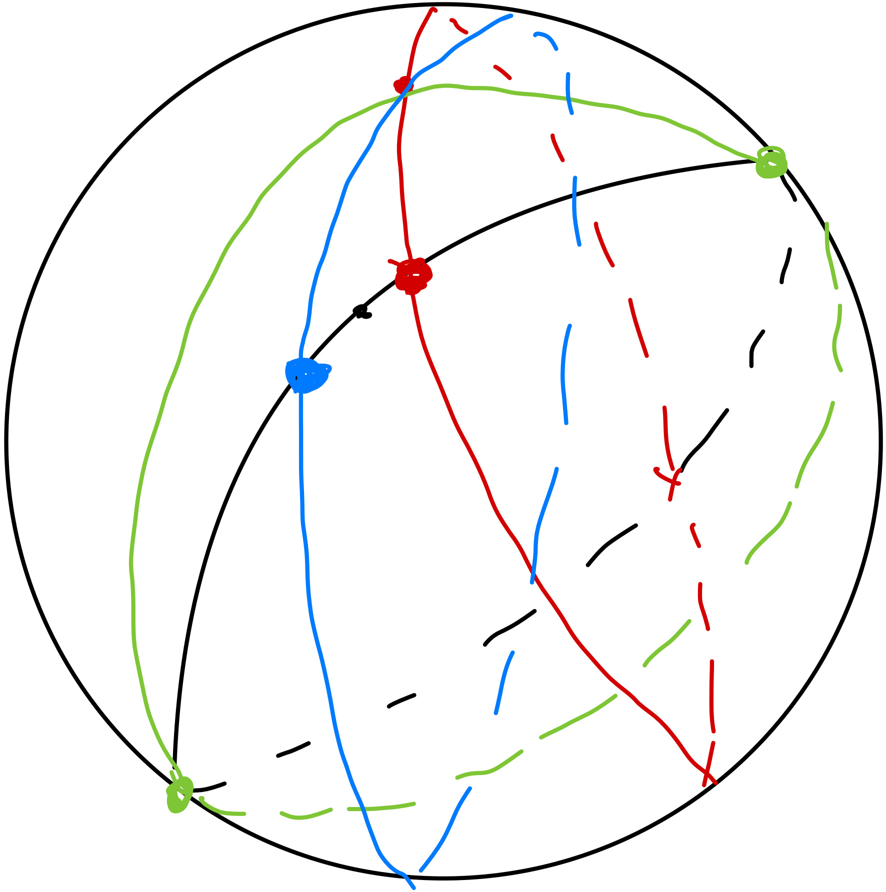
Cerchi massimi e “rette” sferiche

- In geometria piana le rette sono le linee fondamentali.
- Sulla sfera, il loro analogo naturale è dato dai **cerchi massimi**.
- Un cerchio massimo è una circonferenza ottenuta tagliando la sfera con un piano che passa per il centro.
- Esempi:
  - l’equatore;
  - ogni meridiano.

Messaggio importante

Nella geometria sferica le “rette” non sono infinite come nel piano: sono chiuse e tornano su se stesse.

[DISEGNO]



Prima differenza fondamentale con il piano

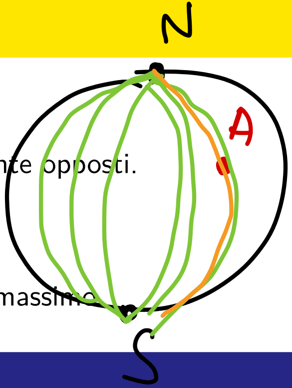
- Nel piano euclideo due rette distinte:
  - o si incontrano in un punto;
  - oppure sono parallele.
- Sulla sfera due cerchi massimi distinti si incontrano sempre.
- Anzi, si incontrano in **due punti antipodali**.

Conclusione

Nella geometria sferica non esistono rette parallele.

[DISEGNO]

Punti antipodali



- Due punti della sfera si dicono **antipodali** se sono diametralmente opposti.
- Esempio: Polo Nord e Polo Sud.
- Due punti antipodali stanno sempre su molti cerchi massimi.
- Due punti non antipodali determinano invece un unico cerchio massimo.

Differenza rispetto al piano

Nel piano, due punti distinti determinano sempre una sola retta. Sulla sfera questo fallisce per i punti antipodali.

[DISEGNO]

Come si misura una distanza sulla sfera

- Fra due punti della sfera non prendiamo la corda interna.
- La distanza sferica è la lunghezza dell'**arco più corto** del cerchio massimo che li unisce.
- In altre parole:

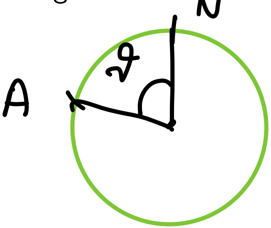
  misuriamo la distanza sulla superficie.

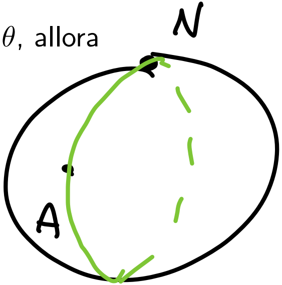
- Se il raggio della sfera è R e l'arco sottende un angolo al centro θ, allora

$$\text{lunghezza dell'arco} = R\theta$$

  con θ in radianti.

[DISEGNO]





Spiegazione intuitiva della formula $s = R\theta$

- Su una circonferenza completa l'angolo al centro è 2π.
- La lunghezza totale è $2\pi R$.
- Quindi una parte che corrisponde a un angolo θ occupa la frazione

$$\frac{\theta}{2\pi}$$

della circonferenza intera.
- Perciò la sua lunghezza è

$$\frac{\theta}{2\pi} \cdot 2\pi R = R\theta.$$

Questa è la stessa formula della lunghezza dell'arco in una circonferenza.

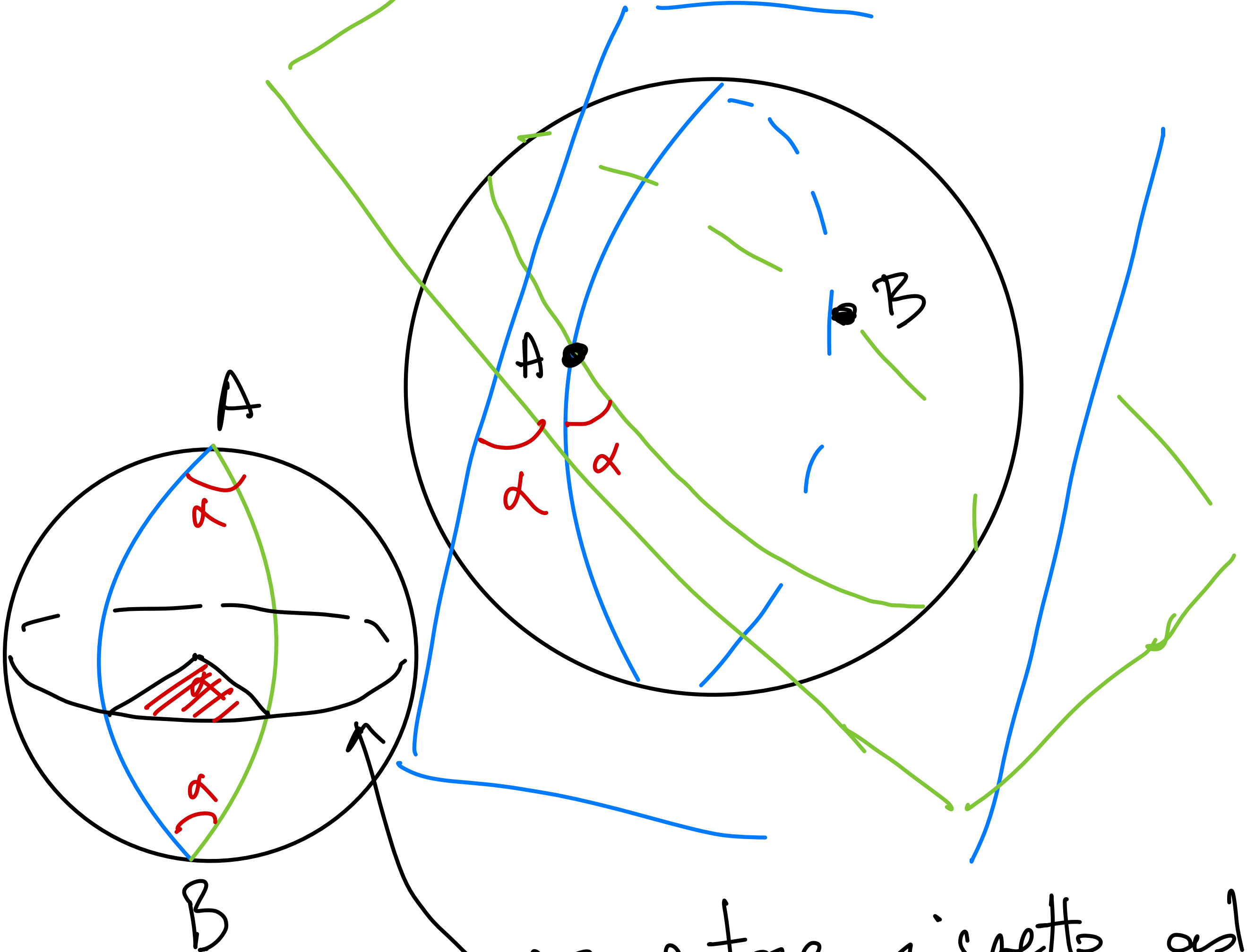
Come si misurano gli angoli sulla sfera

- Un angolo sferico è formato da due archi di cerchi massimi che si incontrano.
- La sua misura si può pensare come l'angolo formato dalle tangenti agli archi nel punto d'incontro.
- Equivalentemente, se i due cerchi massimi provengono da due piani passanti per il centro, l'angolo sferico coincide con l'angolo fra questi due piani.

Idea

L'angolo non si misura "dentro la sfera", ma localmente nel punto di intersezione delle due linee sferiche.

[DISEGNO]



equatore rispetto ad A e B

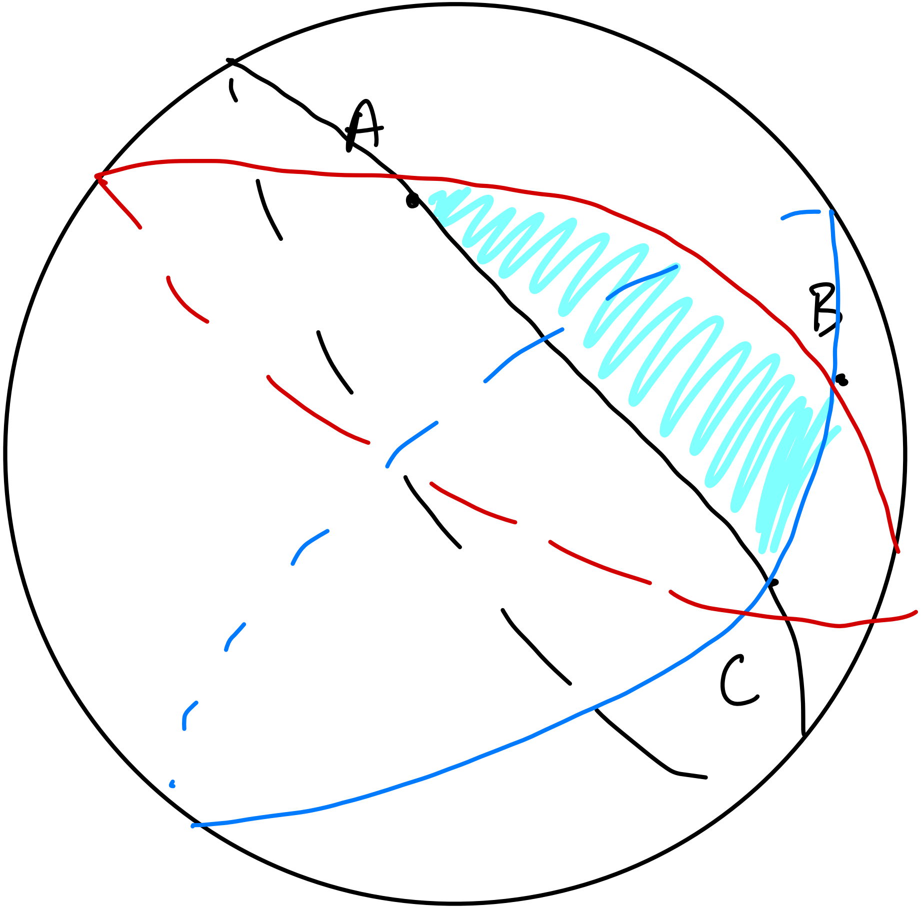
Un triangolo sferico

- Un **triangolo sferico** è una figura delimitata da tre archi di cerchi massimi.
- I lati sono archi.
- I vertici sono punti della sfera.
- Gli angoli sono angoli fra archi di cerchi massimi.

Attenzione

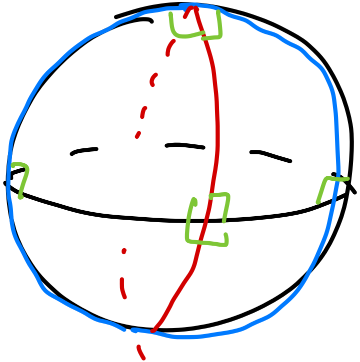
Non bisogna pensare a un triangolo “piatto disegnato sopra una sfera”: i lati non sono segmenti euclidei, ma archi di grandi cerchi.

[DISEGNO]


A
B
C

Esempio classico: un triangolo con tre angoli retti

- Consideriamo:
  - un meridiano;
  - un secondo meridiano a 90° dal primo;
  - l'equatore.
- Prendiamo come vertici:
  - il Polo Nord;
  - due punti dell'equatore separati da 90°.
- Otteniamo un triangolo con tre angoli tutti di 90°.

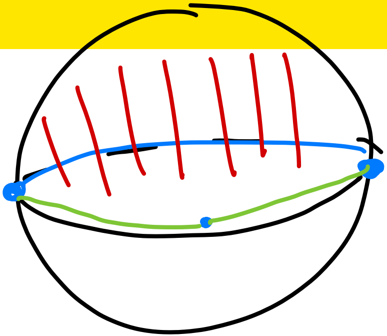


$$90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ.$$

Conclusione

Nella geometria sferica la somma degli angoli interni di un triangolo è maggiore di 180°.

Perché questo è sorprendente?



- Nel piano euclideo siamo abituati a:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

- Sulla sfera invece:

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ.$$

- Più grande è il triangolo sferico, più la somma degli angoli può superare 180°.

Messaggio geometrico

La curvatura positiva della sfera si manifesta nel fatto che i triangoli "hanno più angolo" del previsto.

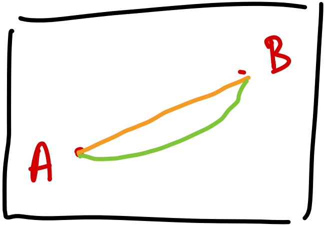
Meridiani e rotte terrestri

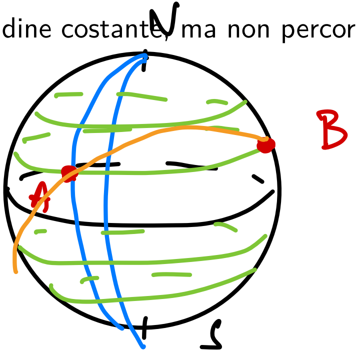
- Se si viaggia lungo un meridiano si segue un cerchio massimo.
- Anche l'equatore è un cerchio massimo.
- In navigazione e in aviazione, il percorso più corto fra due punti della Terra è, idealmente, un arco di cerchio massimo.
- Per questo sulle mappe piane le rotte reali possono apparire curve.

[DISEGNO]

Paralleli: perché non sono “rette” sferiche

- I paralleli, tranne l’equatore, non sono cerchi massimi.
- Quindi non rappresentano le linee fondamentali della geometria sferica.
- Seguire un parallelo significa restare a latitudine costante, ma non percorrere in generale il cammino più corto.





Riassunto della parte intuitiva

- I punti stanno sulla sfera.
- Le “rette” sono i cerchi massimi.
- Due rette sferiche si incontrano sempre.
- La distanza si misura lungo l’arco più corto.
- I triangoli sferici hanno somma degli angoli maggiore di 180°.

Ora proviamo a riscrivere tutto in forma assiomatica.

Passaggio al linguaggio assiomatico

- Finora abbiamo ragionato guardando la sfera come oggetto nello spazio.
- Adesso vogliamo descrivere la geometria sferica *dall'interno*.
- Come in Euclide, distinguiamo:
  - termini primitivi;
  - definizioni;
  - assiomi;
  - teoremi.

Scopo

Capire quali proprietà bastano per sviluppare la teoria senza appoggiarsi ogni volta al modello concreto della sfera nello spazio.

Termini primitivi

Assumiamo come termini primitivi:

- **punto**;
- **cerchio massimo**; ⇝ intuitivamente sappiamo cosa sono. Prendono il ruolo di retta e piano
- **sfera**.

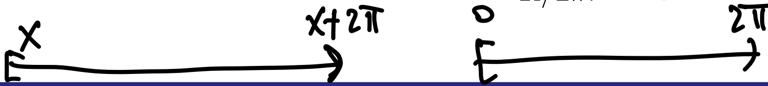
Osservazione

All'inizio non diciamo *che cosa sono* veramente: ne fissiamo solo le proprietà tramite gli assiomi.

Assiomi A-1 e A-2

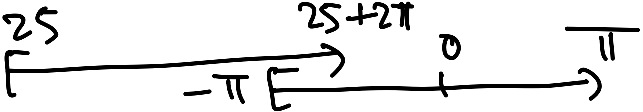
A-1. Una sfera e un cerchio massimo sono insiemi di punti. Sulla sfera esistono almeno due punti.

A-2. I punti di un cerchio massimo sono in corrispondenza biunivoca con i punti di $\mathbb{R}/2\pi$. e cioè ??



Interpretazione

Un cerchio massimo può essere "etichettato" come una circonferenza: muoversi di 2π significa tornare al punto di partenza.



Commento su A-2

- L'assioma A-2 ci permette di pensare un cerchio massimo come una circonferenza parametrizzata.
- In particolare:
  - si può parlare di punti separati da π;
  - si può parlare di archi più corti e più lunghi;
  - diventa naturale introdurre la nozione di antipodo.

[DISEGNO]

Definizione di punti antipodali

Due punti della sfera si dicono **antipodali** se esiste un cerchio massimo che li contiene e in cui le loro etichette differiscono di π.

Idea

Sono punti opposti sullo stesso grande cerchio: stanno a mezza circonferenza di distanza.

Assioma A-3

A-3. Ogni punto della sfera ha al più un antipodo. / o antipodale

Perché serve?

Garantisce che la nozione di "punto opposto" è ben definita.

Conseguenza intuitiva: se un punto B è l'antipodo di A, allora A è l'antipodo di B.

Proposizione. Se un cerchio massimo contiene un punto, allora contiene anche il suo antipodo.

$f : \mathcal{C} \longrightarrow [0, 2\pi)$ $\qquad f(p) = y \in [0, 2\pi)$

Idea della dimostrazione.

- Sul cerchio massimo i punti sono etichettati modulo 2π.
- Se un punto ha etichetta x, il suo antipodo ha etichetta $x + \pi$.
- Dunque si trova sullo stesso cerchio massimo.

$f(q) = x$

$f^{-1}(x+\pi)$

$\cap$

$\mathcal{C}$

corrisp. biunivoca

$f^{-1}(x+\pi) = r$ $\qquad f(q) = x$ $\quad f(r) = x+\pi$

Assioma A-4

A-4. Due punti distinti che non siano antipodali appartengono a un unico cerchio massimo.

Confronto con il piano

Nel piano: due punti distinti determinano una sola retta.
Sulla sfera: questo vale solo se i due punti non sono antipodali.

Conseguenze di A-4

$S=\{p,q,\dots\}$ $\quad p\in S \quad q\in S \quad C\ni p,q$

$\# 2$

Proposizione 1. Per ogni punto della sfera passa almeno un cerchio massimo.

Proposizione 2. Ogni punto della sfera possiede un antipodo.

Idea della dimostrazione.

- Per la proposizione precedente, il punto A appartiene ad almeno un cerchio massimo.
- Per A-2 i punti di quel cerchio massimo sono in corrispondenza con una circonferenza di lunghezza 2π.
- Sulla circonferenza, al punto che rappresenta A corrisponde un punto opposto a distanza π.
- Quel punto è l'antipodo di A.
- Per A-3 tale antipodo è unico.

Commento. Questi risultati formalizzano fatti che nel modello concreto sembrano ovvi, ma che ora diventano teoremi.

Assioma A-5

A-5. Due cerchi massimi distinti si incontrano in almeno un punto.

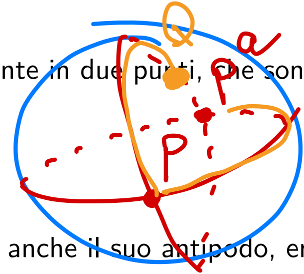
Interpretazione

[redacted].

NON CI SONO PARALLELE!!!

Teorema: due cerchi massimi distinti si incontrano in due punti antipodali

Teorema. Due cerchi massimi distinti si incontrano esattamente in due punti, che sono antipodali.



Dimostrazione: idea

1. Per A-5, si incontrano almeno in un punto P.
2. Poiché ciascun cerchio massimo che contiene P contiene anche il suo antipodo, entrambi contengono anche P^a.
3. Quindi hanno almeno due punti in comune.
4. Se avessero in comune due punti non antipodali, per A-4 esisterebbe un unico cerchio massimo che li contiene.
5. Quindi i due cerchi coinciderebbero, contro l'ipotesi.

Definizione di distanza

Siano A, B due punti della sfera.

$\mathcal{C}$

- Se A e B non sono antipodali, stanno su un unico cerchio massimo.
- Su quel cerchio guardiamo la differenza delle etichette.
- Riduciamo tale differenza all'intervallo $(-\pi, \pi]$.
- La **distanza** $d(A, B)$ è il valore assoluto di quel numero.

$f : \mathcal{C} \to (-\pi, \pi]$

Interpretazione

La distanza è la lunghezza dell'arco più corto, misurata in radianti sulla sfera di raggio 1.

$d(A,B) = |f(A) - f(B)|$

Assioma A-6

A-6. Se A, B, C stanno sullo stesso cerchio massimo e B è tra A e C, allora

$$d(A, C) = d(A, B) + d(B, C).$$

Significato

La distanza è additiva lungo uno stesso arco, proprio come accade su un segmento del piano.

[DISEGNO]

Osservazioni sulla distanza

- Per ogni coppia di punti:
$$0 \leq d(A, B) \leq \pi.$$
- La distanza massima possibile è π.
- Essa si ha esattamente tra punti antipodali.

Commento

Questo riflette il fatto che su una sfera un “segmento rettilineo” non può essere più lungo di una semicirconferenza.

Bilancio dopo i primi sei assiomi

Con A-1,...,A-6 abbiamo già formalizzato:

- l'esistenza dei punti e delle linee sferiche;
- la parametrizzazione dei cerchi massimi;
- la nozione di antipodo;
- l'unicità del cerchio massimo per punti non antipodali;
- l'intersezione dei cerchi massimi;
- la nozione di distanza e la sua additività.

Adesso possiamo parlare di angoli e triangoli.

Raggi e angoli sferici

- Dopo aver introdotto i cerchi massimi, si definiscono i **raggi sferici** e poi gli **angoli sferici**.
- Intuitivamente, un angolo sferico è formato da due semicerchi massimi uscenti da uno stesso punto.
- La misura dell'angolo è compresa tra 0 e π.

[DISEGNO]

Fatto fondamentale sugli angoli

- Gli angoli sferici si comportano in parte come gli angoli del piano.
- Si possono definire:
  - angoli retti;
  - angoli acuti;
  - angoli ottusi.
- Molte proprietà elementari restano vere, ma il contesto globale è molto diverso.

Perpendicolarità fra cerchi massimi

- Due cerchi massimi sono perpendicolari se formano angoli retti nei loro punti di intersezione.
- Esempio:
  - equatore e un meridiano sono perpendicolari;
  - due meridiani a 90° sono perpendicolari ai poli.

[DISEGNO]

Triangoli sferici: definizione

- Un triangolo sferico è delimitato da tre archi di cerchi massimi.
- Ciascun lato ha lunghezza $< \pi$.
- I tre vertici non devono essere allineati sullo stesso cerchio massimo.

Confronto col piano

I lati non sono segmenti, ma archi; tuttavia il linguaggio di lati, vertici e angoli resta valido.

Primo teorema sui triangoli

Teorema. In un triangolo sferico, la somma di due lati è maggiore del terzo.

Commento Esiste quindi anche in geometria sferica una forma di disuguaglianza triangolare.

Idea della dimostrazione Si ragiona sul fatto che il lato più corto tra due punti è l'arco minore del cerchio massimo che li congiunge.

Teorema chiave

Teorema. La somma degli angoli interni di un triangolo sferico è maggiore di 180°, cioè

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi.$$

Esempio già visto Il triangolo formato da due meridiani ortogonali e dall'equatore ha

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Nome

La quantità

$$(\alpha + \beta + \gamma) - \pi$$

si chiama **eccesso sferico**.

Triangoli speciali

- **Triangolo equilatero sferico**: lati uguali.
- **Triangolo isoscele sferico**: due lati uguali.
- **Triangolo rettangolo sferico**: un angolo retto.

Domanda interessante

In che misura i teoremi elementari sui triangoli isosceli restano veri sulla sfera?

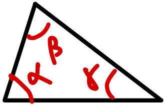
Triangolo isoscele

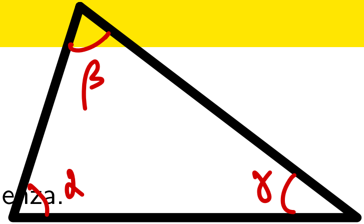
Proposizione. In un triangolo sferico isoscele, gli angoli alla base sono uguali.

Idea della dimostrazione La simmetria che scambia i due lati uguali lascia fisso il vertice principale e manda un lato nell'altro.

Messaggio

Alcune simmetrie dei triangoli del piano sopravvivono anche nella geometria sferica.





- Anche nella geometria sferica si studiano criteri di congruenza.
- Alcuni sono analoghi a quelli del piano.
- Altri hanno comportamenti diversi, proprio a causa della curvatura della sfera.

Osservazione importante

In geometria euclidea *AAA* non implica la congruenza, ma solo la similitudine; in geometria sferica, invece, su una sfera fissata, *AAA* implica la congruenza.

In geometria sferica due triangoli che hanno i tre angoli congruenti sono congruenti.

Un risultato da ricordare

Fatto importante. Più il triangolo sferico è grande, più grande può essere il suo eccesso angolare.

Conseguenza intuitiva La somma degli angoli di un triangolo non è un numero fisso universale, ma dipende dalla figura.

Contrasto col piano

Nel piano:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

sempre.
Sulla sfera:

$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

e il valore cambia da triangolo a triangolo.

Verso risultati più avanzati

Le prossime tappe naturali sarebbero:

- area dei triangoli sferici;
- formule di trigonometria sferica;
- legge dei seni e legge del coseno sferiche;
- applicazioni ad astronomia e navigazione.

Ma qui ci fermiamo

L'obiettivo di oggi è soprattutto capire:

come nasce una geometria diversa da quella del piano e come la si può descrivere in modo assiomatico.

Conclusioni

- La sfera fornisce un modello geometrico concreto e intuitivo.
- I cerchi massimi giocano il ruolo delle rette.
- Non esistono parallele.
- Le distanze si misurano lungo archi.
- I triangoli hanno somma degli angoli maggiore di 180°.
- La teoria può essere organizzata assiomaticamente.

La sfera è un primo laboratorio naturale di geometria non euclidea.

Riferimenti

- M. A. Whittlesey, *Spherical Geometry and Its Applications*, CRC Press, 2020.
- Euclide, *Elementi*.
- R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, 2000.

Riferimenti

- M. A. Whittlesey, *Spherical Geometry and Its Applications*, CRC Press, 2020.
- Euclide, *Elementi*.
- R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer, 2000.

Algebra lineare

Geometria affine

Geometria 1 — 1° sem

Geometria 2 — 2° sem

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$