Galois e le equazioni

Lucio Centrone
lucio.centrone@uniba.it, centrone@unicamp.br

Università degli Studi di Bari "Aldo Moro", Bari, Italy

March 30, 2026

Chi è Evariste Galois?

Chi è Evariste Galois?

Sappiamo risolvere le equazioni di secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sappiamo risolvere le equazioni di secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sappiamo risolvere le equazioni di secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sappiamo risolvere le equazioni di secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sappiamo risolvere le equazioni di secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Risolubile via radicali!

$$+\ -\ \times\ :\ \sqrt{n}$$

Risolubile via radicali!

$$+ \quad - \quad \times \quad : \quad \sqrt{n}$$

Risolubile via radicali!

$$+ \; - \; \times \; : \; \sqrt{n}$$

Risolubile via radicali!

$$+ \; - \; \times \; : \; \sqrt[]{n}$$

Risolubile via radicali!

$$+ \; - \; \times \; : \; \sqrt{n}$$

Risolubile via radicali!

$$+ \; - \; \times \; : \; \sqrt{n}$$

Risolubile via radicali!

$$+ - \times : \sqrt{n}$$

Tutte le equazioni sono risolubili via radicali?

$$-\pi x^3 + 455x^2 - 72 = 0$$

è risolubile via radicali? E questa?

$$x^{1066} - 0.3x^{78} + 100x^{30} - 1/2 = 0$$

Tutte le equazioni sono risolubili via radicali?

$$-\pi x^3 + 455x^2 - 72 = 0$$

è risolubile via radicali? E questa?

$$x^{1066} - 0.3x^{78} + 100x^{30} - 1/2 = 0$$

Tutte le equazioni sono risolubili via radicali?

$$-\pi x^3 + 455x^2 - 72 = 0$$

è risolubile via radicali? E questa?

$$x^{1066} - 0.3x^{78} + 100x^{30} - 1/2 = 0$$

Tutte le equazioni sono risolubili via radicali?

$$-\pi x^3 + 455x^2 - 72 = 0$$

è risolubile via radicali? E questa?

$$x^{1066} - 0.3x^{78} + 100x^{30} - 1/2 = 0$$

Teoria di Galois

Numeri Razionali

$$\mathbb{Q} = \begin{matrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/8 & \dots \\ 2 & 2/2 & \dots & 2/8 & \dots \\ 3 & 3/2 & \dots & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{matrix}$$

Numeri Razionali

$$\mathbb{Q} = \begin{array}{cccccc} 1 & 1/2 & \dots & 1/8 & \dots \\ 2 & 2/2 & \dots & 2/8 & \dots \\ 3 & 3/2 & \dots & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{array}$$

Quali sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2 = 0?$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

Ma $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ NON sono razionali!!!

Quali sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2 = 0?$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

Ma $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ NON sono razionali!!!

Quali sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2 = 0?$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

Ma $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ NON sono razionali!!!

Quali sono le soluzioni dell'equazione

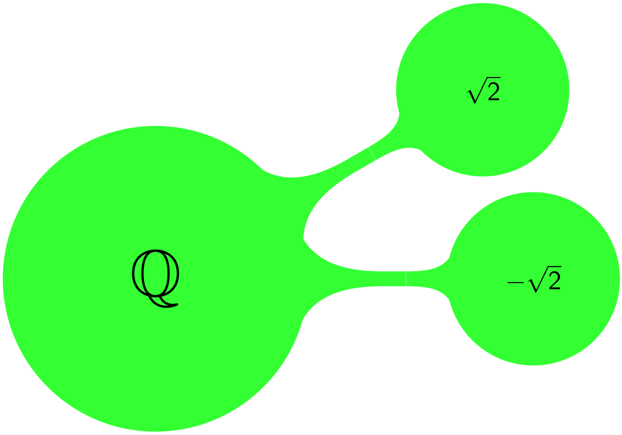
$$x^2 - 2 = 0?$$

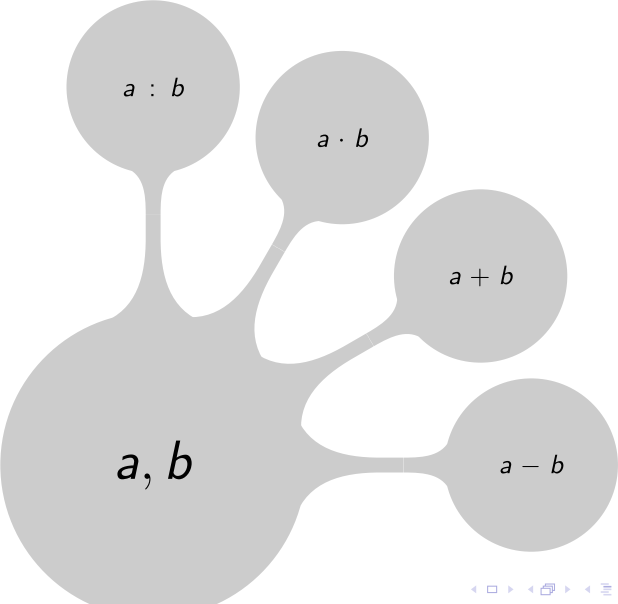
$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

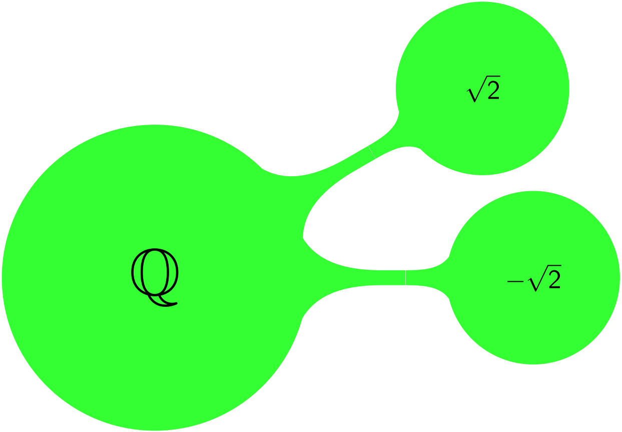
Ma $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ NON sono razionali!!!

Che facciamo? Proviamo ad **incollare** $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ a $\mathbb{Q}$?

Che facciamo? Proviamo ad **incollare** $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ a $\mathbb{Q}$?

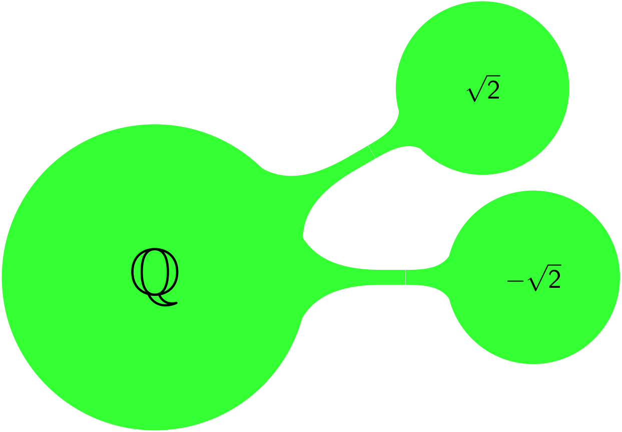

$\mathbb{Q}$
$\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}$


$a : b$
$a \cdot b$
$a + b$
$a - b$
a, b



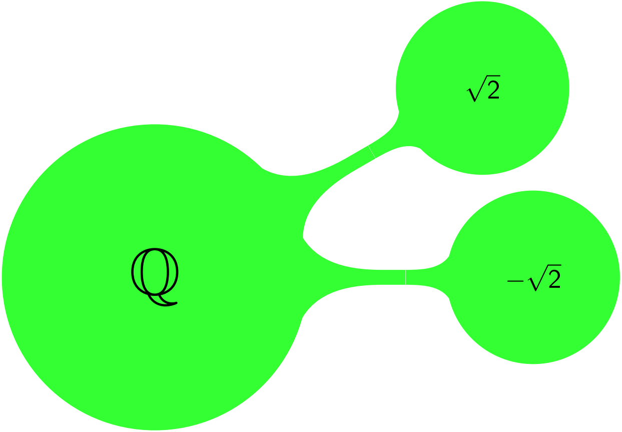
$$1 + \sqrt{2}?$$

$$1 - \sqrt{2}?$$



$$1+\sqrt{2}?$$

$$1-\sqrt{2}?$$



$$1+\sqrt{2}?$$

$$1-\sqrt{2}?$$

Siamo costretti ad inserire tutte le combinazioni algebriche di $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ per ottenere:

Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$!!!

Siamo costretti ad inserire tutte le combinazioni algebriche di $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ per ottenere:

Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$!!!

Siamo costretti ad inserire tutte le combinazioni algebriche di $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ per ottenere:

Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$!!!

Siamo costretti ad inserire tutte le combinazioni algebriche di $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ per ottenere:

Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$!!!

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$$\mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

$$\mathbb{Q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \to -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3+\sqrt{2}\cdot 7 \to -3-\sqrt{2}\cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \to -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \to -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \to -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \to -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

Questa è una *SIMMETRIA*

Diamole un nome:

$$\varphi$$

Questa è una *SIMMETRIA*

Diamole un nome:

$$\varphi$$

Questa è una *SIMMETRIA*

Diamole un nome:

$$\varphi$$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è Il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è Il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è Il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è Il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è Il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è Il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie delle radici di $x^2 - 2$

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^2 - 2 = 0$$

$$G = \{I, \varphi\}$$

$$x^7 - 2 = 0$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7$$

$$x^7 - 2 = 0$$

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5, \; x_6, \; x_7$$

$$x^7 - 2 = 0$$

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5,\quad x_6,\quad x_7$$

$$x^7 - 2 = 0$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6, \quad x_7$$

$$x^7 - 2 = 0$$

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4, \; x_5, \; x_6, \; x_7$$

$$x^7 - 2 = 0$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7$$

$$x^7 - 2 = 0$$

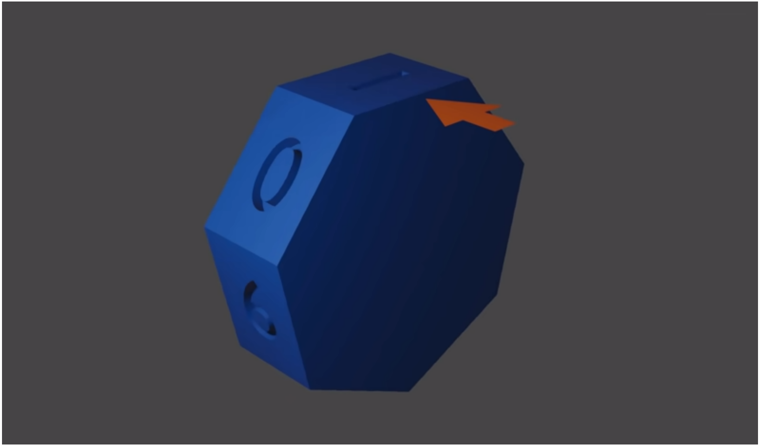
$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_5, \quad x_6, \quad x_7$$

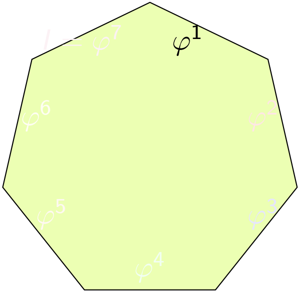
$$x^7 - 2 = 0$$

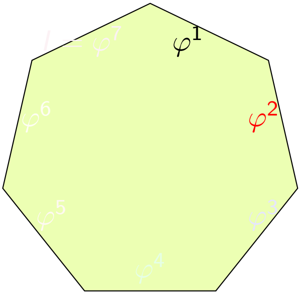
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7$$

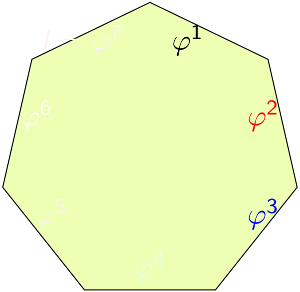
$$x^7 - 2 = 0$$

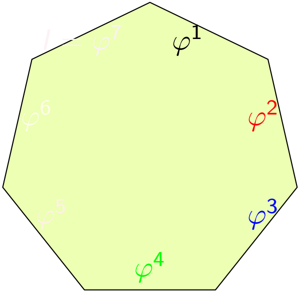
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7$$

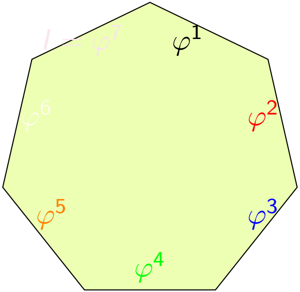


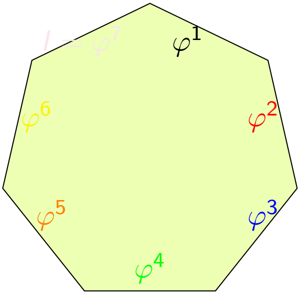

φ^1

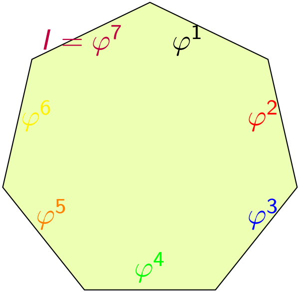

$I = \varphi^7$
φ^1
φ^2
φ^3
φ^4
φ^5
φ^6


$I = \varphi^7$
φ^1
φ^2
φ^3
φ^4
φ^5
φ^6


$I = \varphi^7$
φ^1
φ^2
φ^3
φ^4
φ^5
φ^6


$I = \varphi^7$
φ^1
φ^2
φ^3
φ^4
φ^5
φ^6


$I = \varphi^7$
φ^1
φ^2
φ^3
φ^4
φ^5
φ^6


$I = \varphi^7$
φ^1
φ^2
φ^3
φ^4
φ^5
φ^6

$$x^7 - 2 = 0$$

$$x = \sqrt[7]{2}$$

$$x^7 - 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = \sqrt[7]{2}$$

Gruppo di Galois "buono"

$$G = \{I, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6\}$$

Ciclici

Gruppo di Galois "buono"

$$G = \{I, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6\}$$

Ciclici

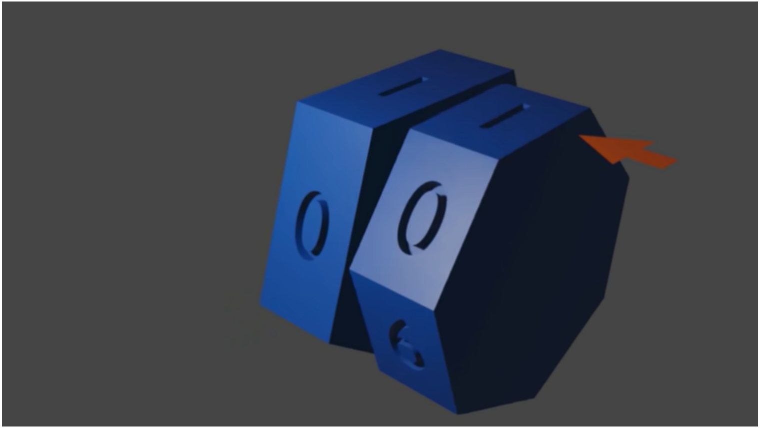
Gruppo di Galois "buono"

$$G = \{I, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6\}$$

Ciclici

$$x^{12} - x^7 - x^5 + 1 = 0$$

$$(x^7 - 1)(x^5 - 1) = 0$$



Non ciclico ma...

Abeliano!!!

Non ciclico ma...

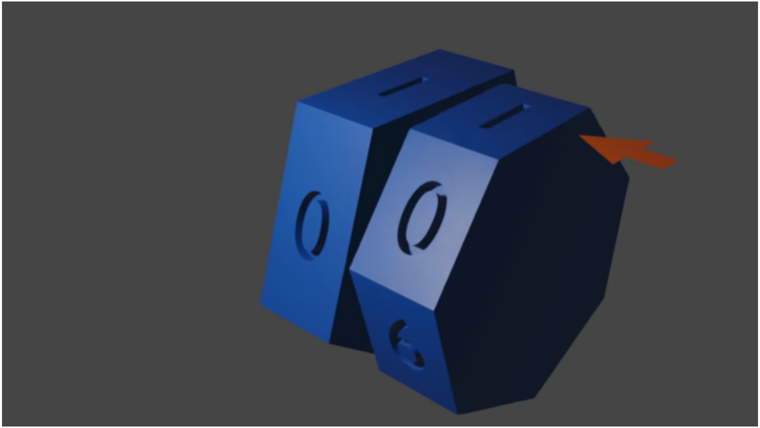
Abeliano!!!

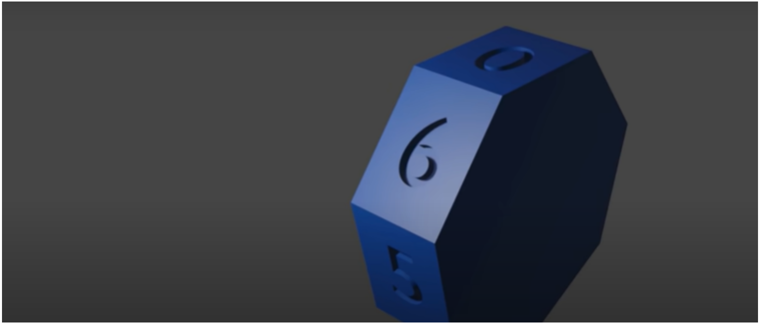
$$\varphi \circ \lambda = \lambda \circ \varphi$$

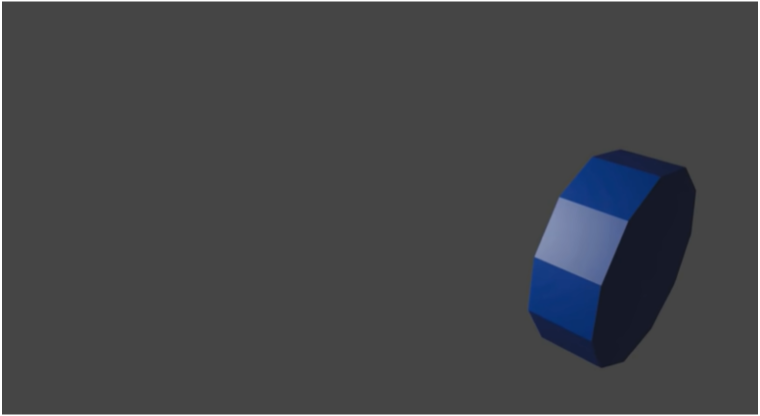
L'ordine non importa!

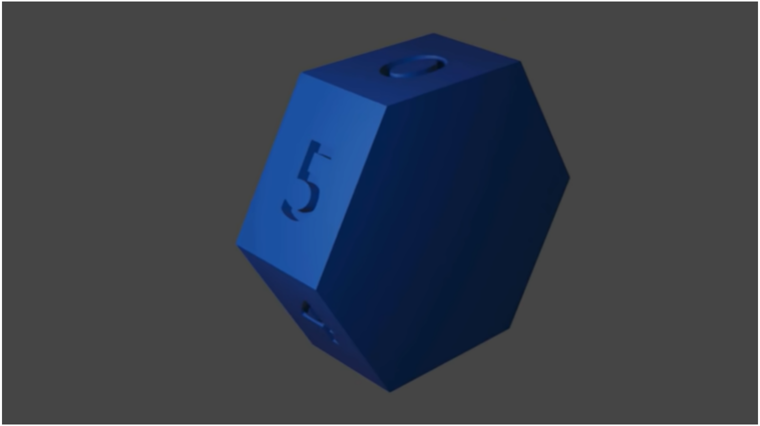
$$\varphi \circ \lambda = \lambda \circ \varphi$$

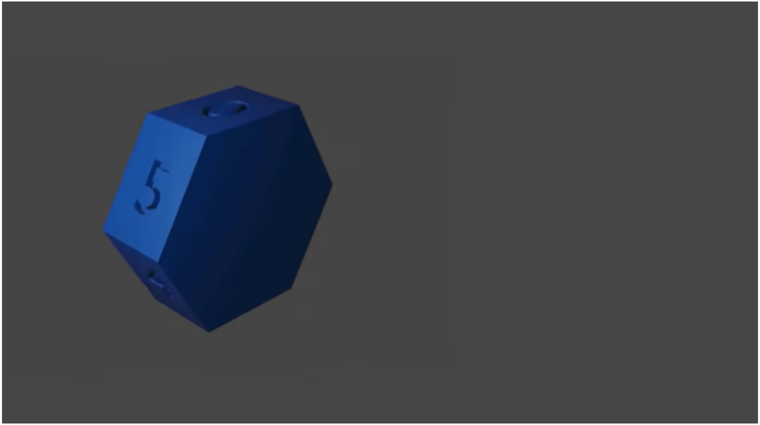
L'ordine non importa!


0
0
6

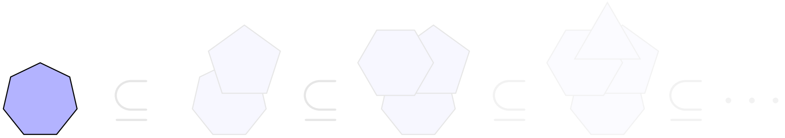

0
6
5



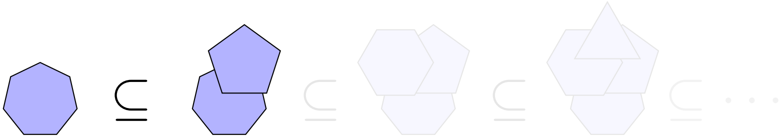

5


5

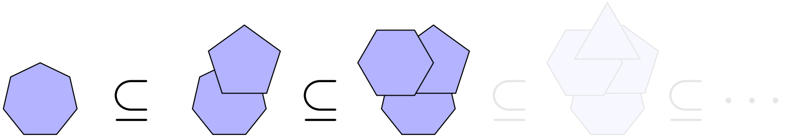
$$x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 = 0$$



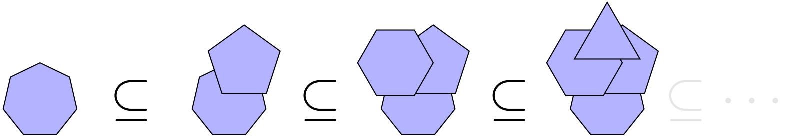
Equazione Risolubile via radicali!



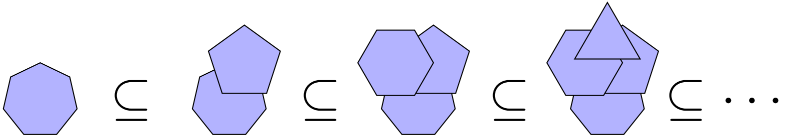
Equazione Risolubile via radicali!



Equazione Risolubile via radicali!



Equazione Risolubile via radicali!



Equazione Risolubile via radicali!

Gruppo di Galois risolubile!

Tutti i gruppi sono risolubili?

Nope!

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$$

G = tutte le permutazioni di 5 elementi = S_5

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

$G =$ tutte le permutazioni di 5 elementi $= S_5$

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

$G =$ tutte le permutazioni di 5 elementi $= S_5$

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$$

$G =$ tutte le permutazioni di 5 elementi $= S_5$

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

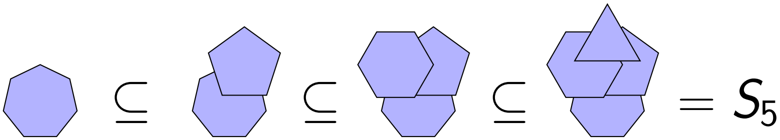
$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$$

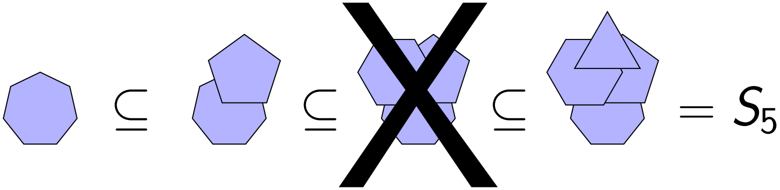
G = tutte le permutazioni di 5 elementi = S_5

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

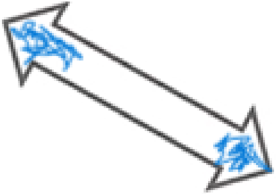
$$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$$

$G =$ tutte le permutazioni di 5 elementi $= S_5$


⊆ ⊆ ⊆ = S_5

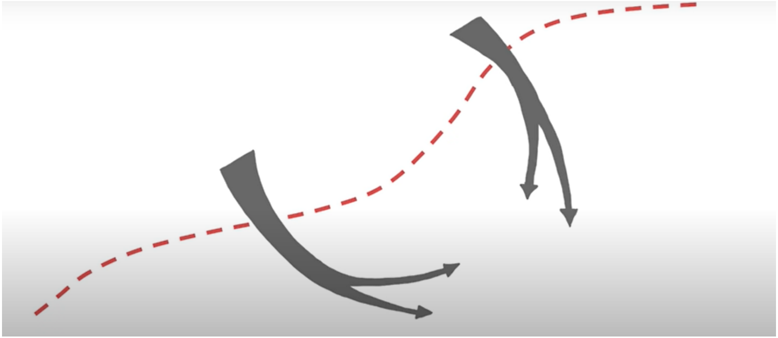

$\subseteq$
$\subseteq$
$\subseteq$
$= S_5$

$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$
Risolubile via radicali



Il gruppo di Galois G è risolubile

Equazioni



Gruppi