Geometria oltre Euclide

dall’Ottica di Euclide alla Geometria Proiettiva

Francesco Bastianelli

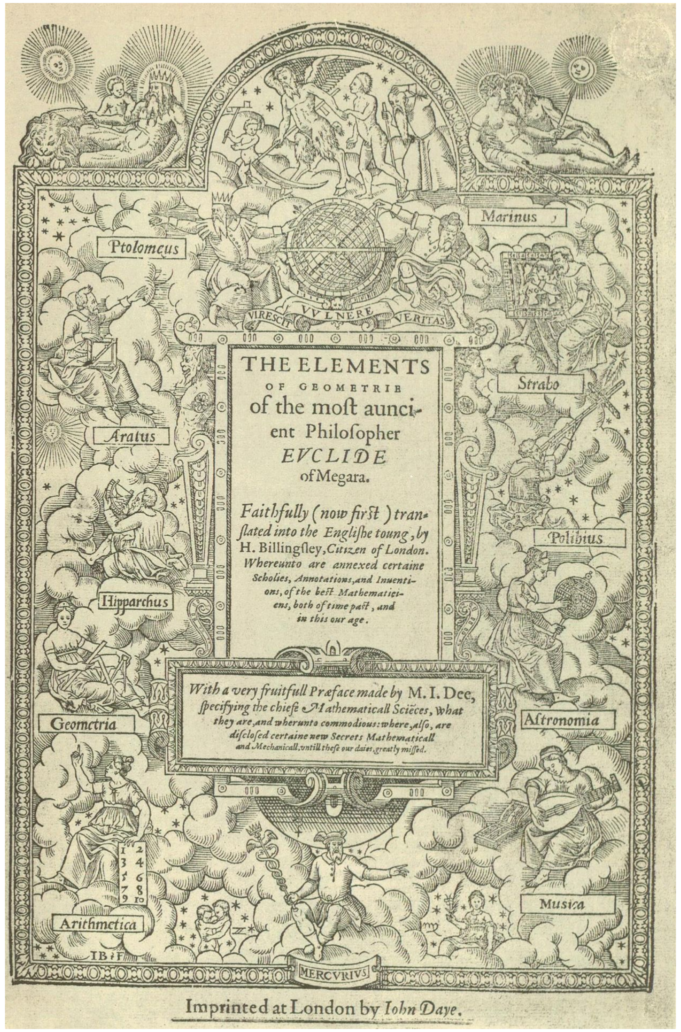
16 Aprile 2024

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Bari “Aldo Moro”

“Due rette parallele si incontrano all’infinito.”

Euclide (≈300 a.C.)

Gli *Elementi*

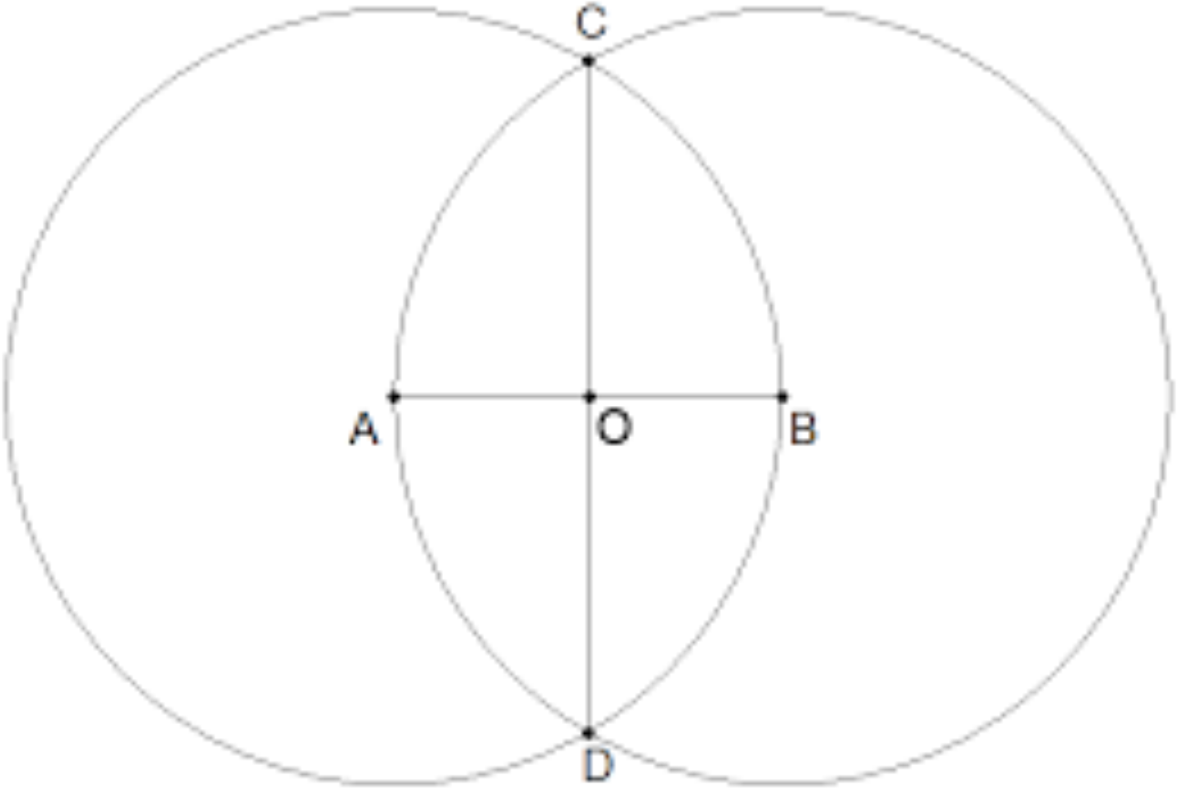


gli *Elementi*: i postulati

1. Un segmento di linea retta può essere disegnato unendo due punti arbitrari
2. Un segmento di linea retta può essere esteso indefinitamente in una linea retta
3. Dato un segmento di linea retta, un cerchio può essere disegnato usando il segmento come raggio ed uno dei suoi estremi come centro
4. Tutti gli angoli retti sono congruenti tra loro
5. Se due linee sono disegnate in modo da intersecarne una terza in modo che la somma degli angoli interni, da un lato, sia minore di due angoli retti, allora le due linee si intersecheranno tra loro dallo stesso lato se sufficientemente prolungate.

gli *Elementi*: costruzioni con riga e compasso

I primi 4 postulati forniscono le premesse necessarie affinché sia possibile utilizzare la riga ed il compasso, studiando le costruzioni che si possono eseguire mediante questi due strumenti.



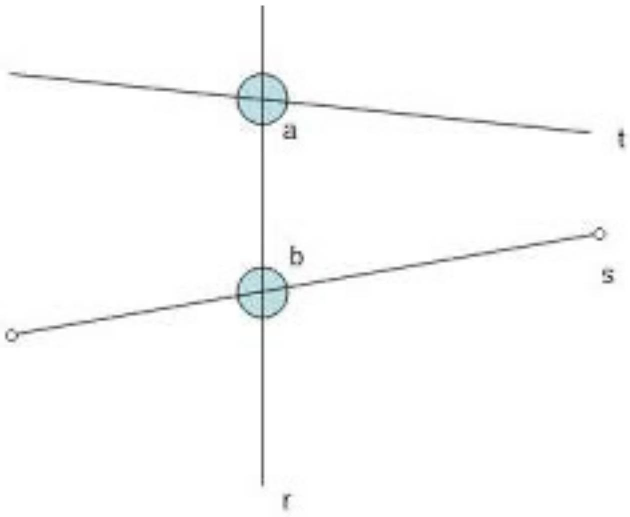
gli *Elementi*: costruzioni con riga e compasso

Alcuni problemi classici riguardanti la costruibilità con riga e compasso sono:

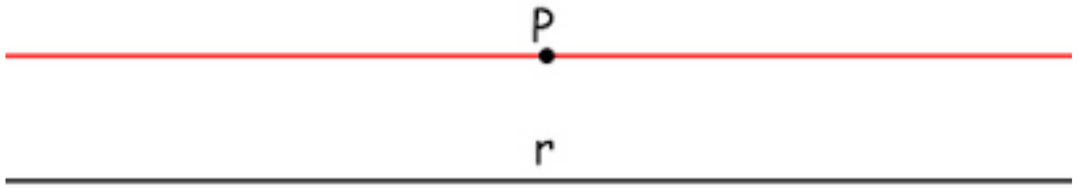
- **Bisezione dell’angolo**: è possibile dividere a metà un angolo di ampiezza assegnata?
- **Trisezione dell’angolo**: è possibile dividere in tre parti uguali un angolo di ampiezza assegnata?
- **Duplicazione del quadrato**: è possibile costruire un quadrato avente area doppia rispetto a quella di un quadrato assegnato?
- **Duplicazione del cubo**: è possibile costruire un cubo avente volume doppio rispetto a quello di un cubo assegnato?
- **Quadratura del cerchio**: è possibile costruire un quadrato avente la stessa area di un cerchio assegnato?

gli *Elementi*: il postulato delle parallele

Se due linee sono disegnate in modo da intersecarne una terza in modo che la somma degli angoli interni, da un lato, sia minore di due angoli retti, allora le due linee si intersecheranno tra loro dallo stesso lato se sufficientemente prolungate.



Dati una linea retta r ed un punto P non appartenente ad r, esiste un’unica linea retta passante per P che non incontra r.



gli *Elementi*: il postulato delle parallele

Inizialmente, in molti provarono invano a dimostrare il V postulato come conseguenza dei quattro precedenti.

L'indipendenza del V postulato dai quattro precedenti venne dimostrata nella seconda metà del 1800, presentando esempi espliciti di geometrie, dette *non euclidee*, soddisfacenti tutti i postulati ad eccezione dell'ultimo.

Il piano proiettivo reale rappresenta anch'esso una geometria non euclidea in quanto, come vedremo, due rette qualsiasi nel piano proiettivo hanno sempre un punto in comune (non esistono rette parallele).

l'*Ottica*: le premesse

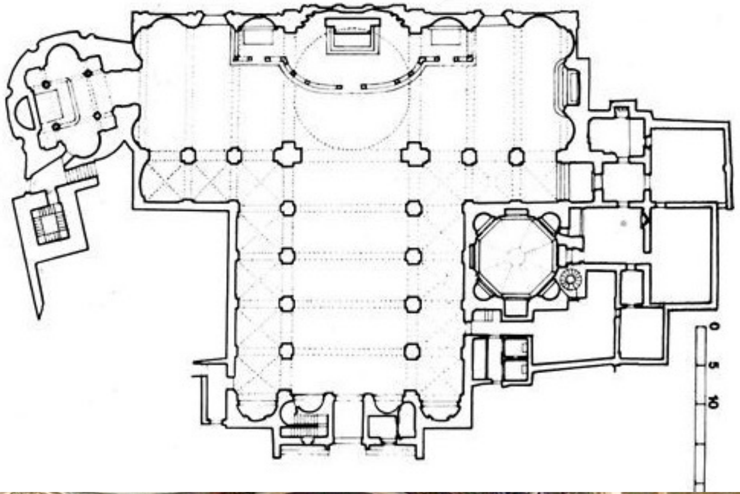
1. I segmenti rettilinei tracciati a partire dall'occhio (detti *raggi visuali*) si possono estendere indefinitamente
2. La figura formata dai raggi visuali è un cono avente vertice nell'occhio e base sui contorni delle cose viste
3. Si vedono quelle cose sulle quali incidono i raggi visuali, mentre non si vedono quelle sulle quali i raggi visuali non incidono
4. Le cose viste sotto angoli più grandi appaiono più grandi, quelle viste sotto angoli più piccoli più piccole, e uguali quelle viste sotto angoli uguali
5. Le cose viste sotto raggi più alti appaiono più in alto, quelle viste sotto raggi più bassi appaiono più in basso
6. Le cose viste sotto raggi più a destra appaiono più a destra, quelle viste sotto raggi più a sinistra appaiono più a sinistra
7. Le cose viste sotto un maggior numero di angoli appaiono con miglior risoluzione







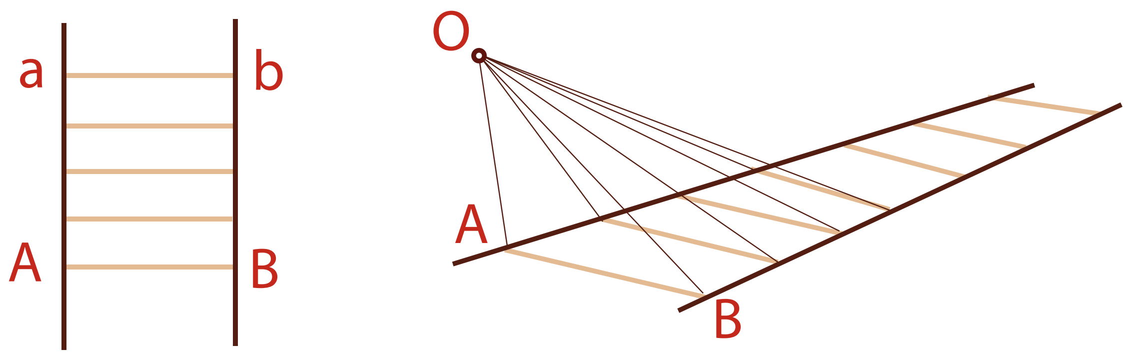
Santa Maria presso San Satiro



l'*Ottica* di Euclide

Le proposizioni nell'*Ottica* di Euclide vengono dedotte usando principalmente argomenti di geometria piana, con lo scopo di enunciare con rigore matematico dei fatti che risultano evidenti dall'esperienza.

Proposizione VI. Segmenti paralleli visti da lontano appaiono non paralleli.



Lucrezio, *De rerum natura* (I secolo a.C.)

"Un portico benché abbia profilo costante,

e appoggi completamente su uguali colonne,

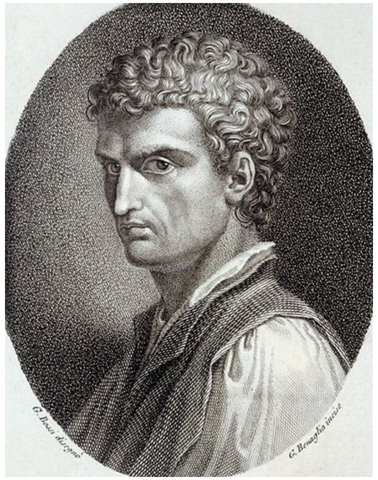
se si vede da una parte finale in tutta la sua lunghezza,

poco a poco si stringe nella punta di un cono sottile

congiungendo tetto e suolo, tutto ciò che sta a destra e a sinistra,

fino a terminare nella punta oscura di un cono."

la Prospettiva

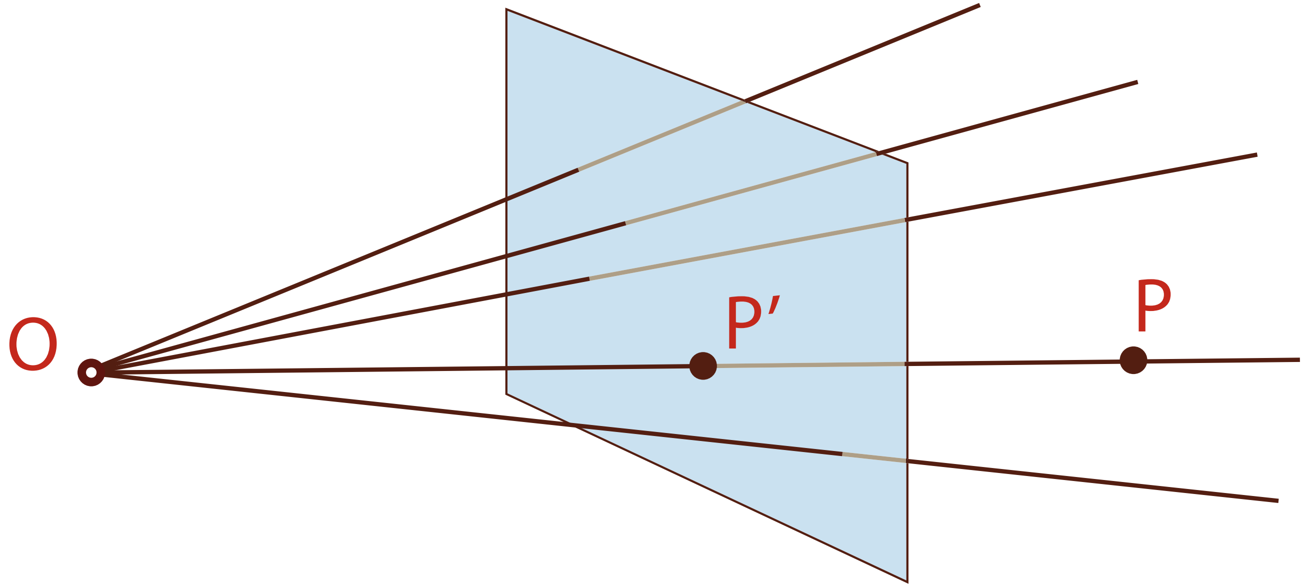


Leon Battista Alberti (1404-1472)
“De Pictura”

Piero della Francesca (1416-1492)
“De Prospectiva Pingendi”

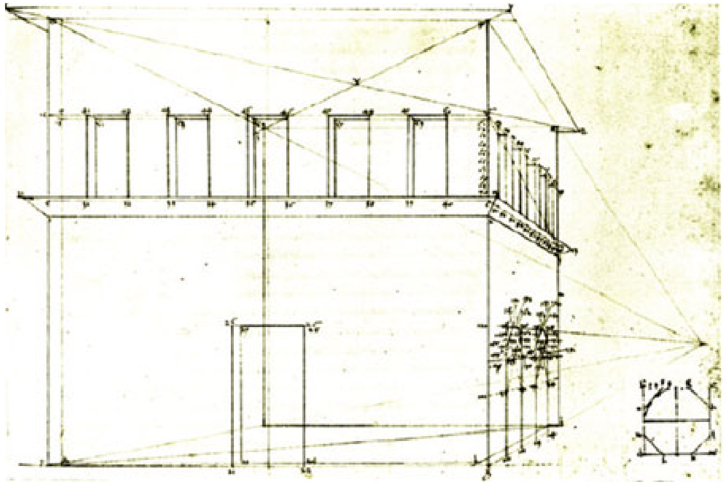
Albrecht Dürer (1471-1528)

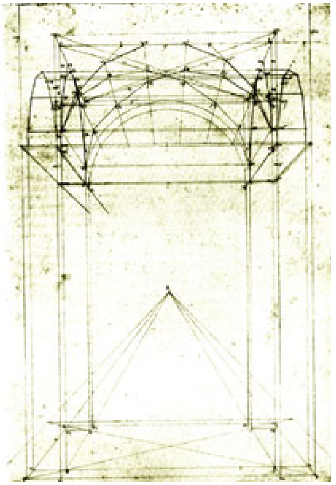
il *velo* di Leon Battista Alberti



Piero della Francesca

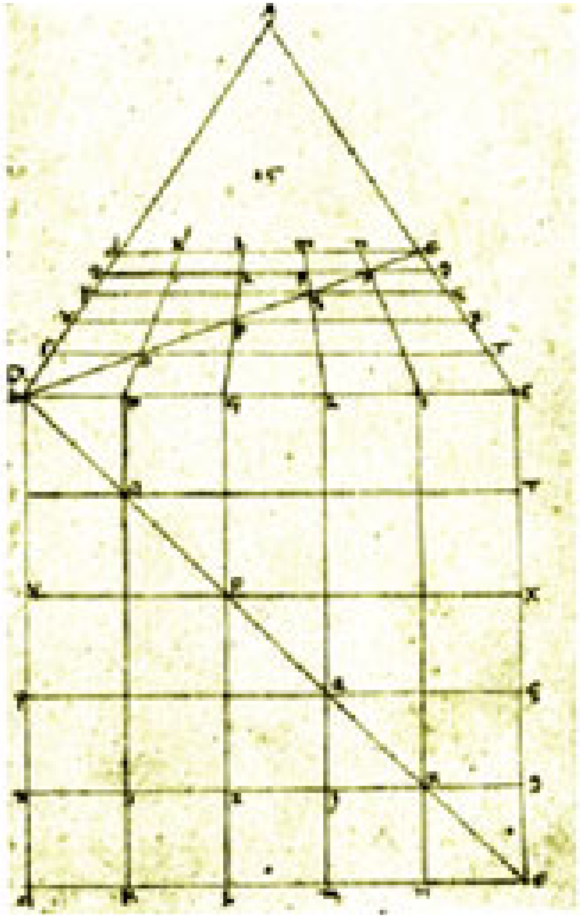
Piero della Francesca,
“Flagellazione di Cristo” (1459).





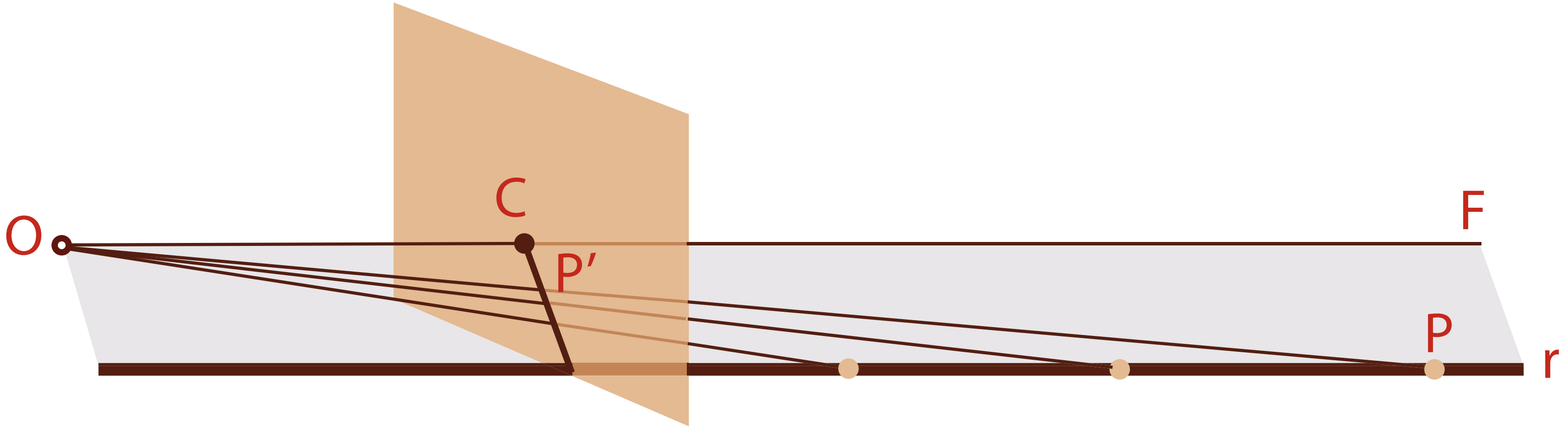
I due principi fondamentali per gli artisti rinascimentali sono:

- una linea retta vista in prospettiva resta una linea retta;
- Le rette che nella realtà sono tra loro parallele, in prospettiva restano parallele, oppure convergono ad un punto, detto punto di fuga.



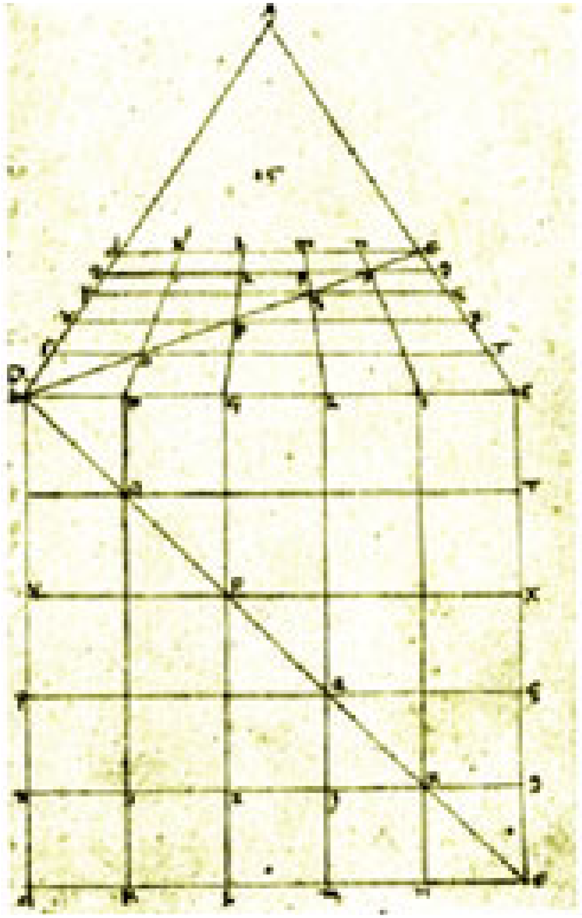
Il punto di fuga

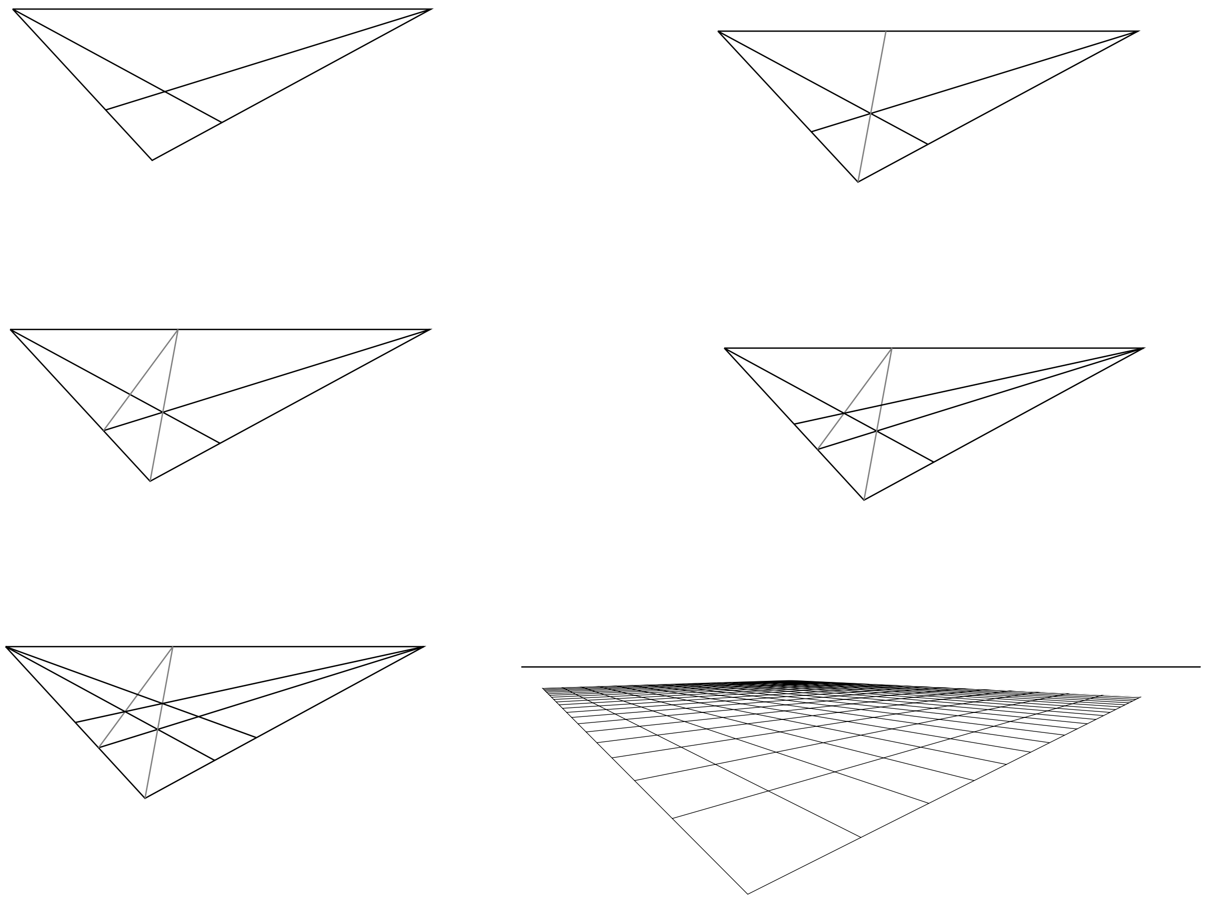
Nella scena pittorica, tutte le rette che nella realtà sono parallele ad una data retta *r* (non parallela alla base del quadro) convergono ad un unico punto, il loro **punto di fuga**. Tale punto è il punto *C* di intersezione tra il piano del quadro ed il raggio visuale parallelo ad *r.*



Al tendere del punto P all'infinito, il raggio visuale *OP* si avvicina al raggio *OF* ed il punto *P'* di intersezione tra il raggio visuale OP ed il piano del quadro tende a C.

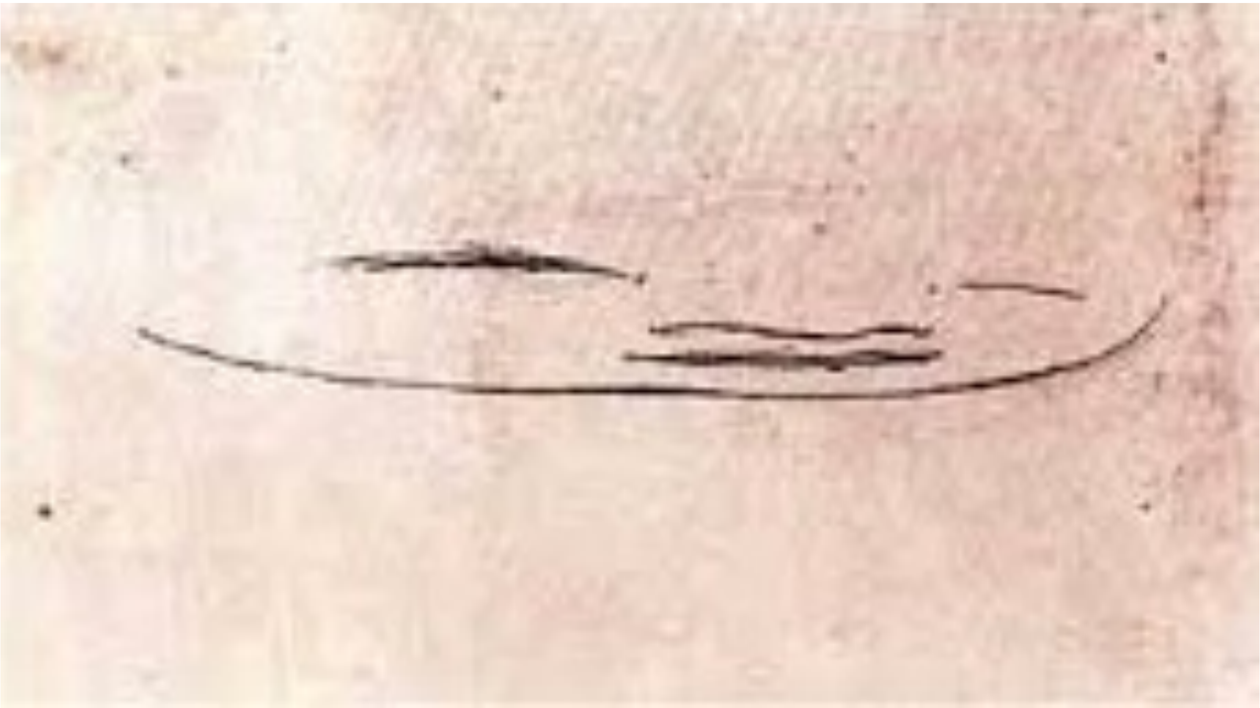
Tassellazioni del piano





Anamorfosi

Leonardo da Vinci, dal *“Codice Atlantico”* (1483-1518).



Anamorfosi

Hans Holbein il Giovane, *“I due ambasciatori” (1533).*

Riassumendo…

- La rappresentazione sul piano della realtà ‶euclidea′′ 3-dimensionale avviene per proiezione da un punto (l’occhio) e i punti dello spazio appartenenti allo stesso raggio visivo vengono proiettati sullo stesso punto del piano.

- Le rette parallele convergono ad un punto infinitamente lontano individuato dalla loro direzione e rappresentato con il loro punto di fuga. Inoltre, se le rette giacciono su un piano (come nel caso delle pavimentazioni) i possibili punti di fuga sono allineati: vi è una retta ‶all’orizzonte′′ (o ‶all’infinito′′) sulla quale si incontrano le rette di un piano che nella realtà ‶euclidea′′ 3-dimensionale appaiono parallele.

- Punti di osservazione differenti ‶deformano′′ l’oggetto osservato.

Geometria Proiettiva

La nascita della geometria proiettiva come una parte organica della matematica risale alla prima metà del XIX secolo con l'opera di Gaspard Monge (1746-1818) e di Jean Victor Poncelet (1788-1867).

Gli spazi ambiente in cui essa viene studiata costituiscono un modello matematico astratto in cui valgono regole di natura grafica simili a quello del disegno prospettico.

In parte, la sua nascita è motivata dall'esigenza di una geometria in cui si elimini la nozione di parallelismo, che in geometria euclidea comporta la distinzione di casi eccezionali.

Geometria Proiettiva

Il precursore della geometria proiettiva fu Girard Desargues (1591-1661), il quale per primo considerò le rette parallele come casi particolari delle rette incidenti e fu il primo ad incorporare in una teoria matematica l'idea di "punti all'infinito dove le parallele si incontrano".

L'opera principale di Desargues, *Brouillon projet d'une atteinte aux évènements des rencontres du cône avec un plan* (1639), fu dimenticata per quasi 2 secoli.

Fu inoltre importante il contributo di Blaise Pascal (1623-1662), con il quale Desargues ha mostrato come la "geometria proiettiva" permettesse di ottenere e superare i risultati dei greci.

Geometria Proiettiva

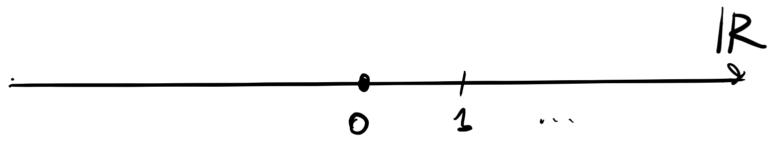
Nell’idea di Desargues, il *piano proiettivo reale* era costituito

- da un piano euclideo,
- a cui venivano aggiunti dei *punti all’infinito*, ciascuno corrispondente alla direzione di una retta del piano,
- con la condizione che due rette che nel piano euclideo sono parallele (e che quindi hanno la stessa direzione) passassero entrambe per il punto all’infinito corrispondente alla loro direzione.

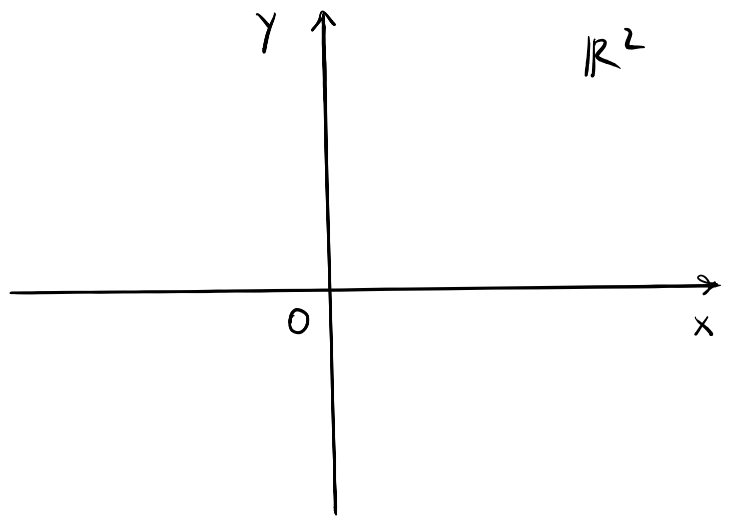
In questo modo, anche le rette parallele acquistavano un punto di intersezione.

La retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Indichiamo con $\mathbb{R}$ la retta reale



e con $\mathbb{R}^2$ il piano euclideo.

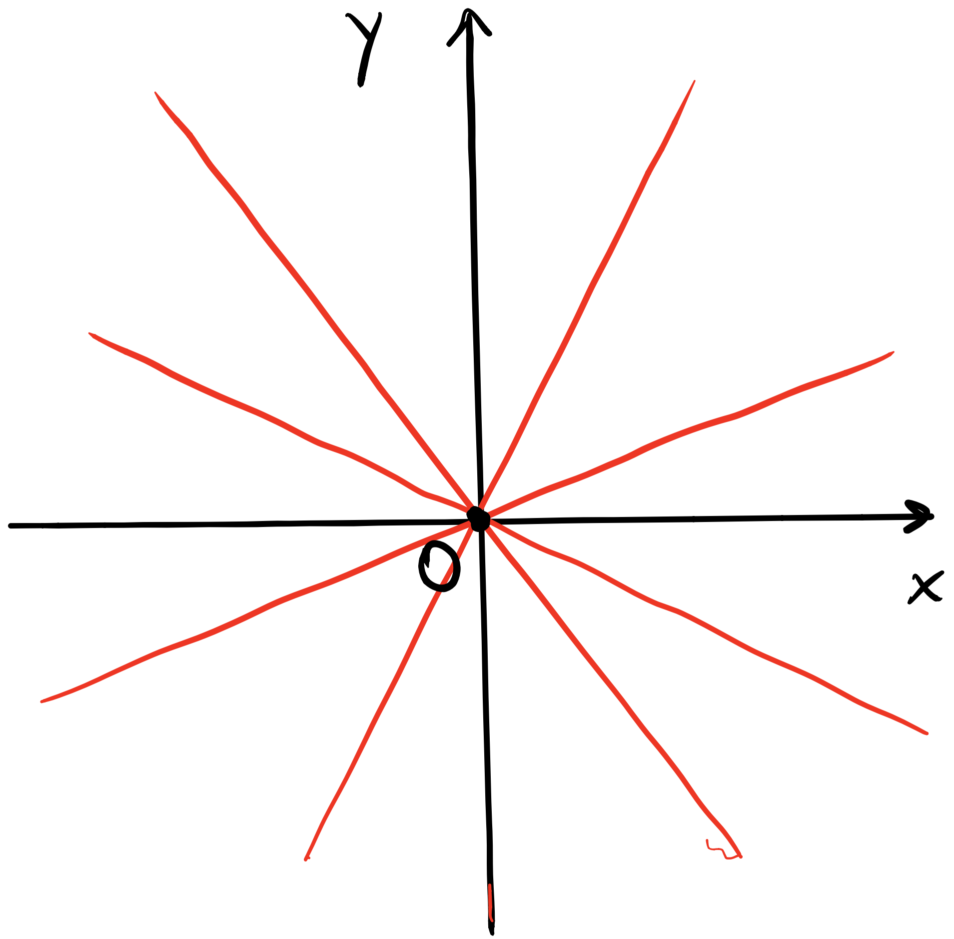


La retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Indichiamo con $\mathbb{R}$ la retta reale

e con $\mathbb{R}^2$ il piano euclideo.

Definizione. La **retta proiettiva reale**, che indichiamo con $\mathbf{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$, è l'insieme di tutte le rette del piano euclideo $\mathbb{R}^2$ che passano per l'origine.
Gli elementi di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sono detti **punti** della retta proiettiva.

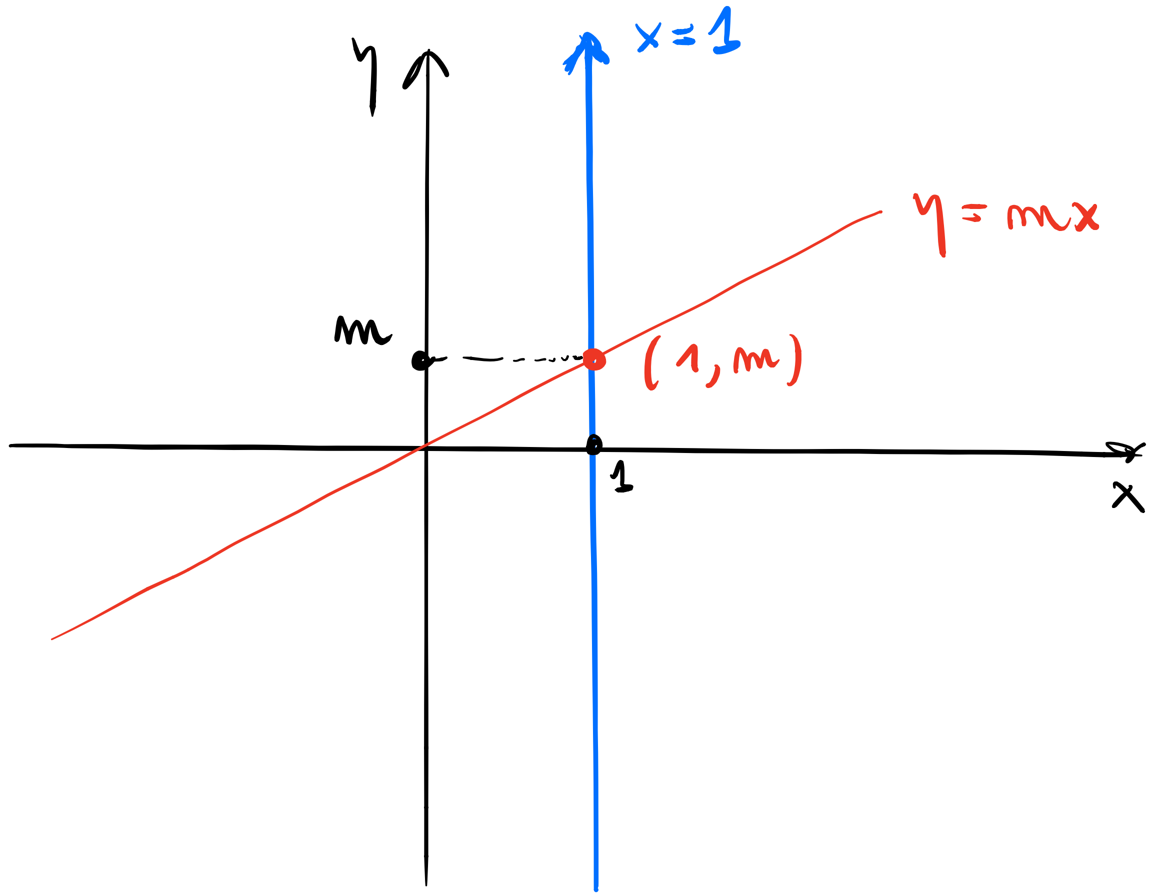


La retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Per descrivere meglio la retta proiettiva, consideriamo la retta di equazione *x=1.*

La generica retta passante per l'origine ha equazione *y=mx e interseca x=1* nel punto di coordinate *(1,m).*

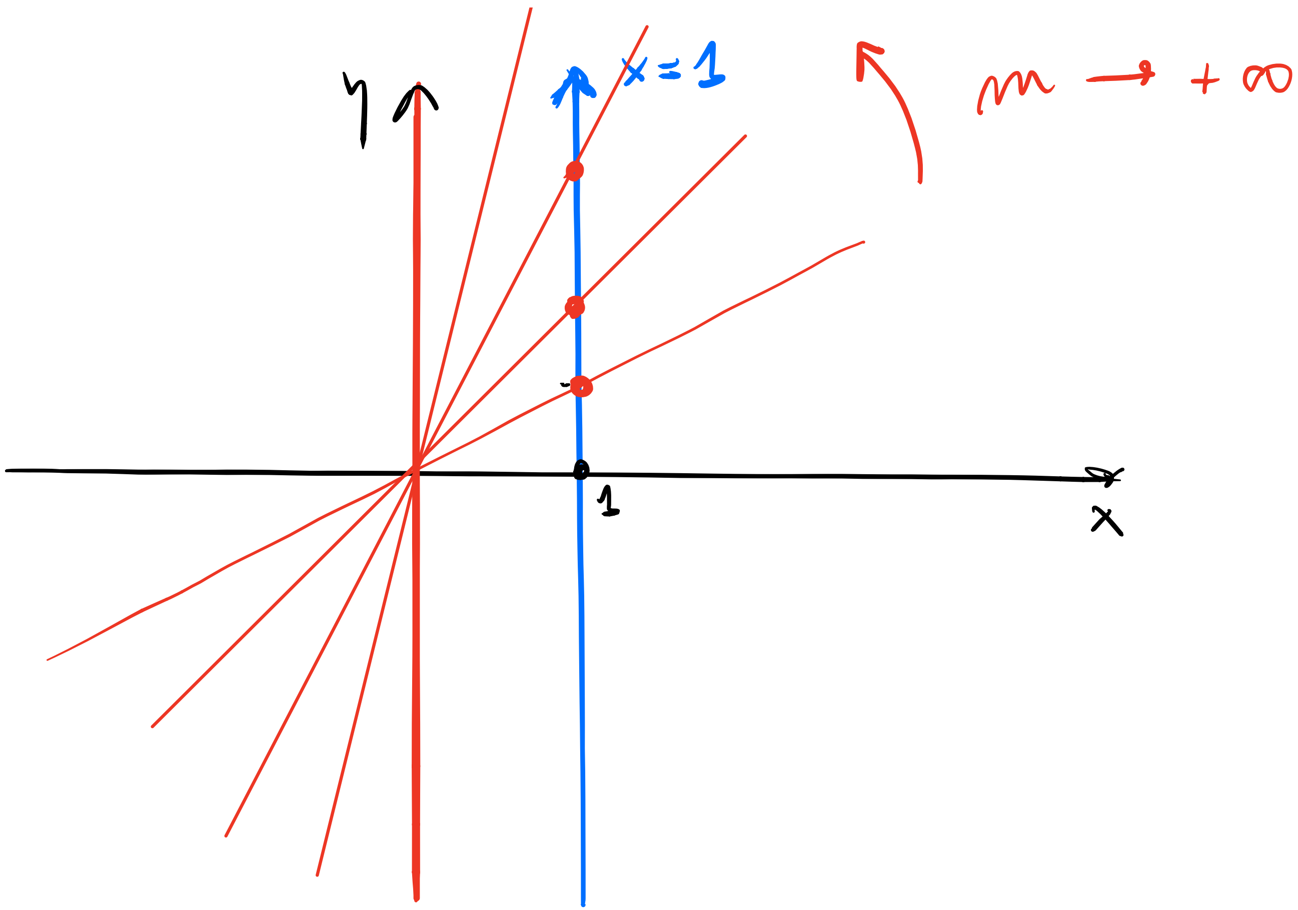
Perciò, ad ogni punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ diverso dalla retta verticale di equazione *x=0* possiamo associare un numero reale *m*, cioè



$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) - \{\text{retta } x=0\} \cong \mathbb{R}$$

La retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Osserviamo che se *m* cresce tendendo a +∞, allora le rette tendono alla retta verticale di equazione *x=0*.



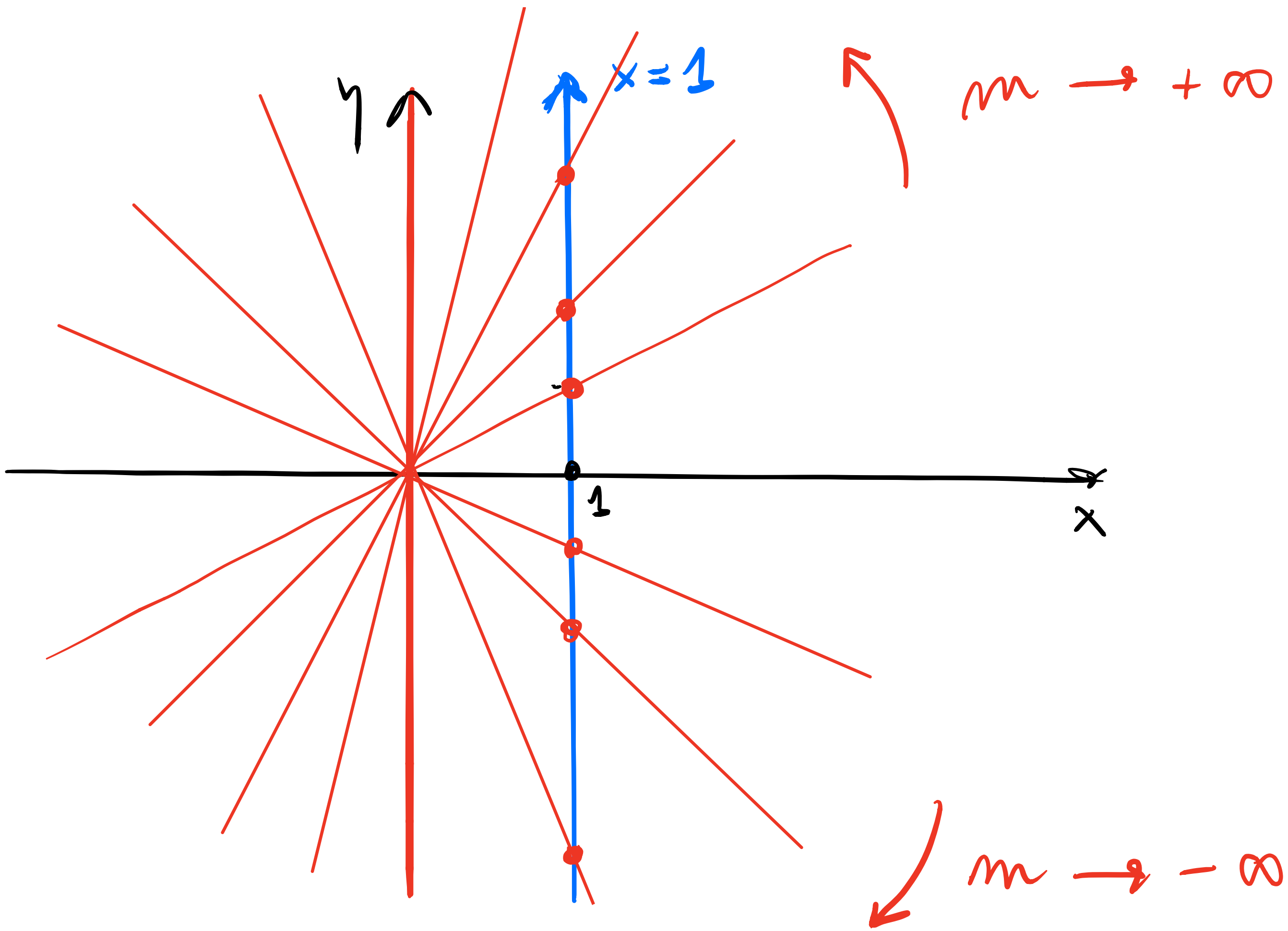
La retta proiettiva reale $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Osserviamo che se m cresce tendendo a $+\infty$, allora le rette tendono alla retta verticale di equazione $x=0$.

Analogamente, se m decresce tendendo a $-\infty$, allora le rette tendono ancora alla retta verticale di equazione $x=0$.

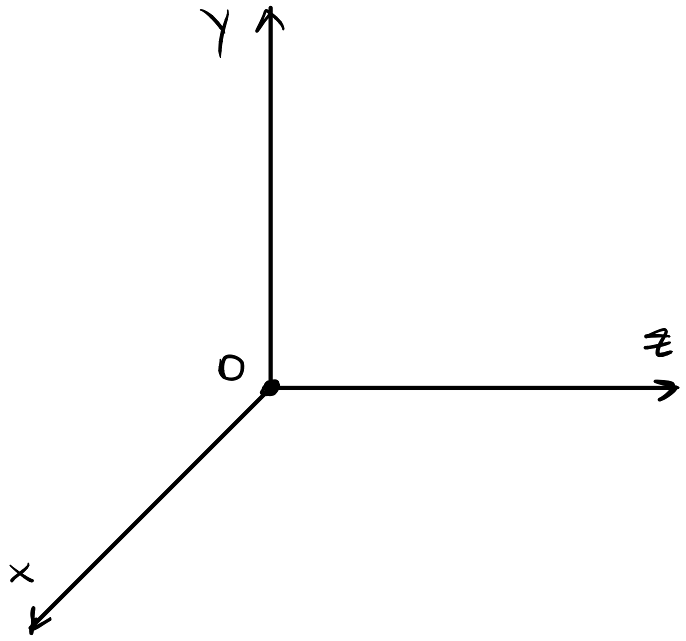
In conclusione,

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$



Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

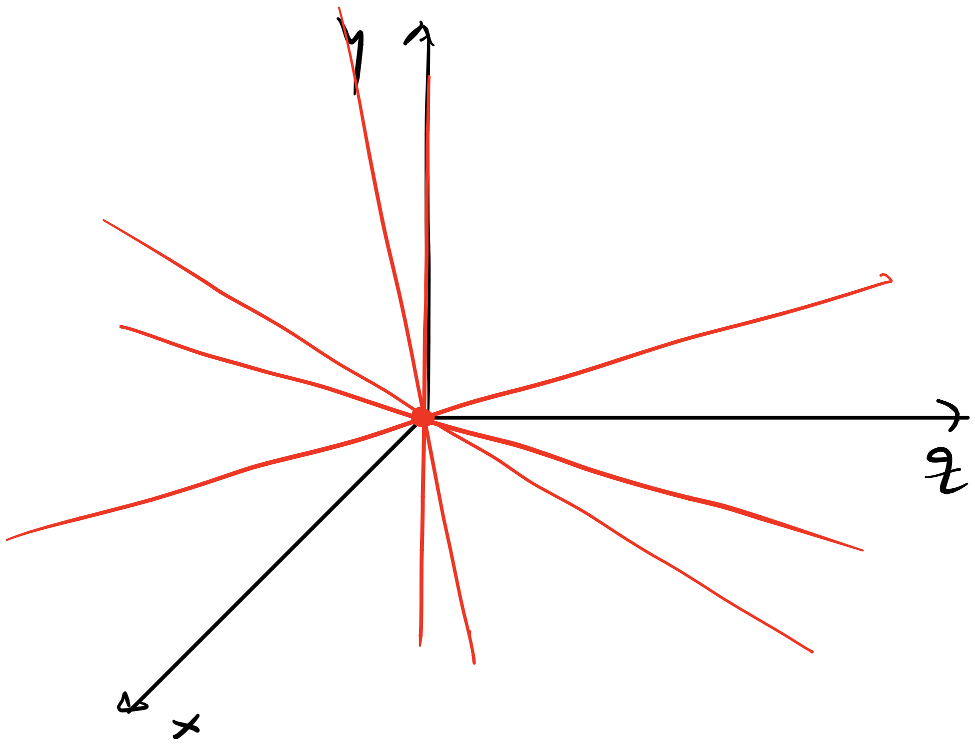
Consideriamo ora lo spazio euclideo 3-dimensionale $\mathbb{R}^3$



Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Consideriamo ora lo spazio euclideo 3-dimensionale $\mathbb{R}^3$

Definizione. Il **piano proiettivo reale**, che indichiamo con $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, è l'insieme di tutte le rette dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ che passano per l'origine.
Gli elementi di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono detti **punti** del piano proiettivo.



Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

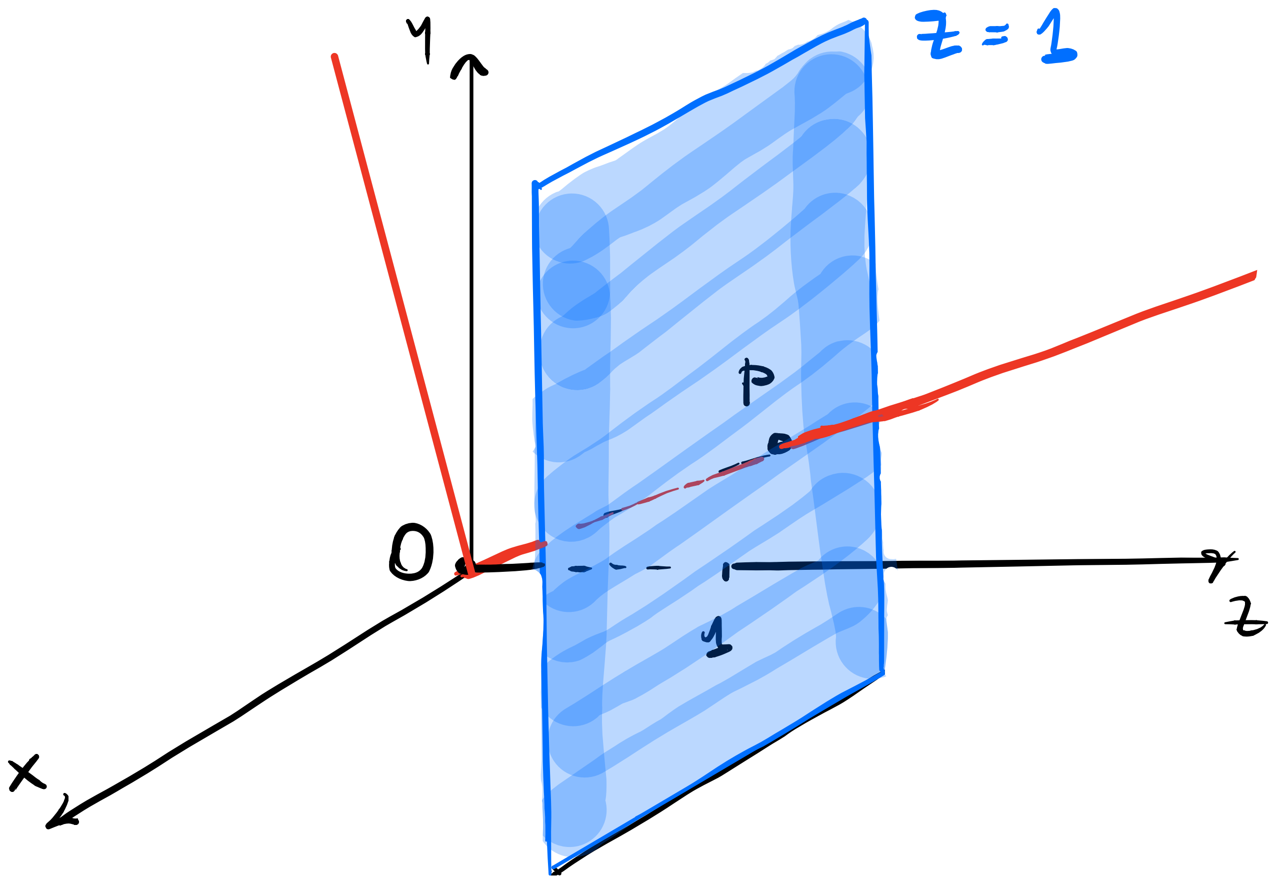
Per descrivere meglio il piano proiettivo, consideriamo il piano di equazione *z=1.*

La generica retta di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine

- interseca il piano *z=1* in un punto

oppure

- è una retta "verticale" che giace sul piano di equazione *z=0.*



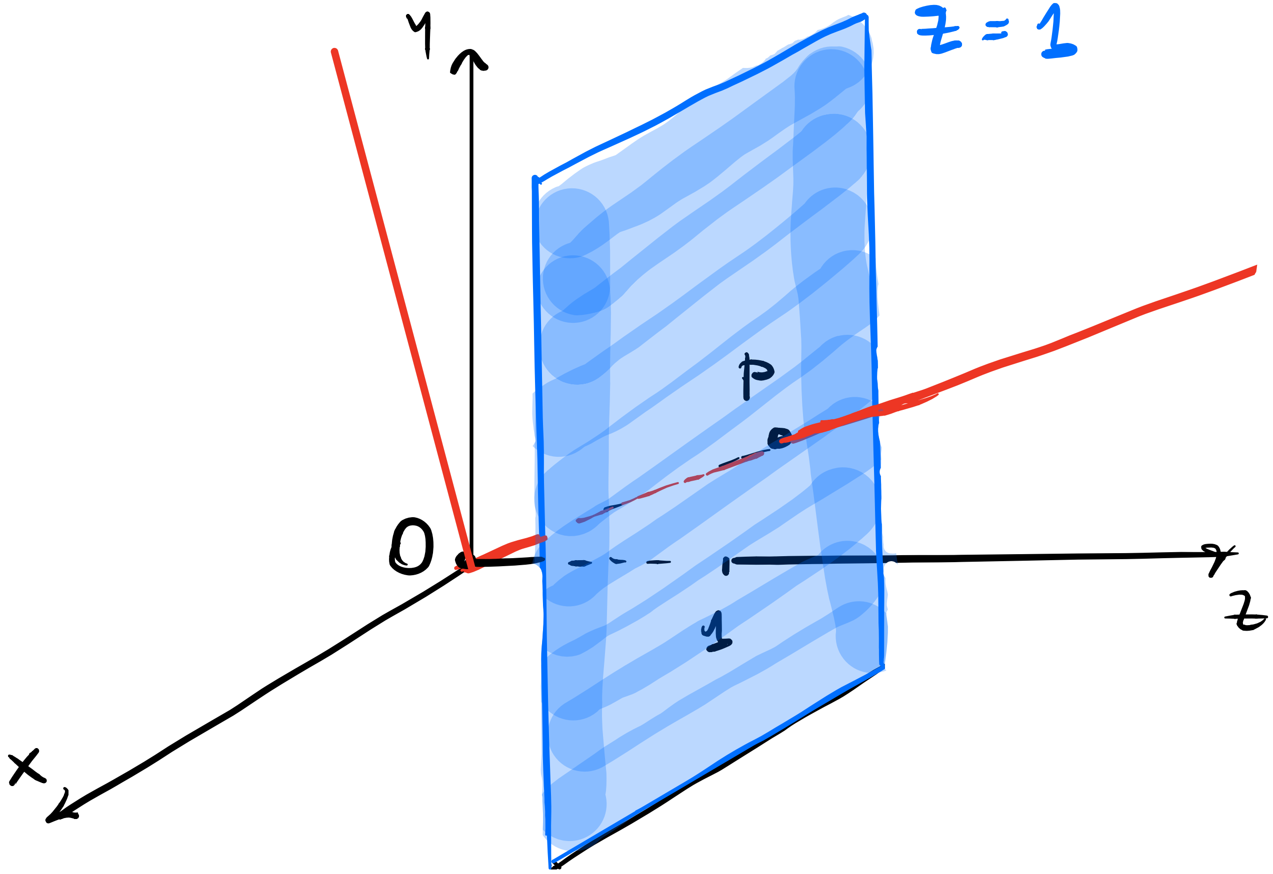
Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Le rette "verticali" che giacciono sul piano di equazione z=0 costituiscono una retta proiettiva.

Questa retta è costituita da "punti all'infinito ".

Per questo motivo, essa è detta retta all'infinito, e la indichiamo con r_∞.

Perciò possiamo pensare il piano proiettivo reale nella forma



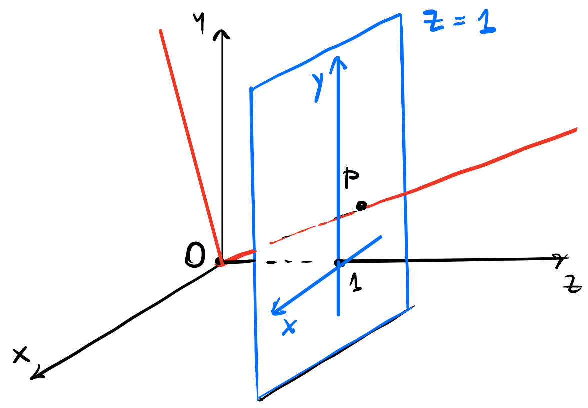
$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \cup r_\infty$$

Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Alla luce dell'identificazione

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \cup r_\infty$$

e introducendo un sistema di riferimento sul piano *z=1*,

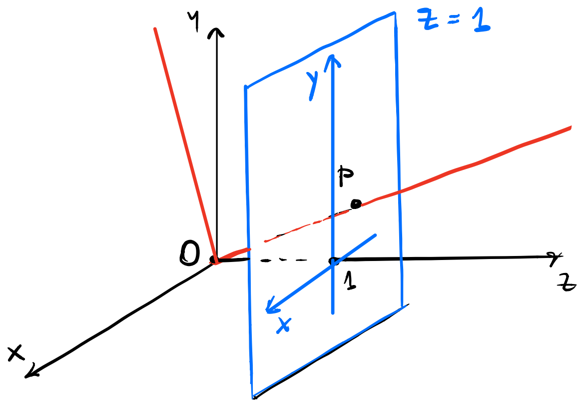


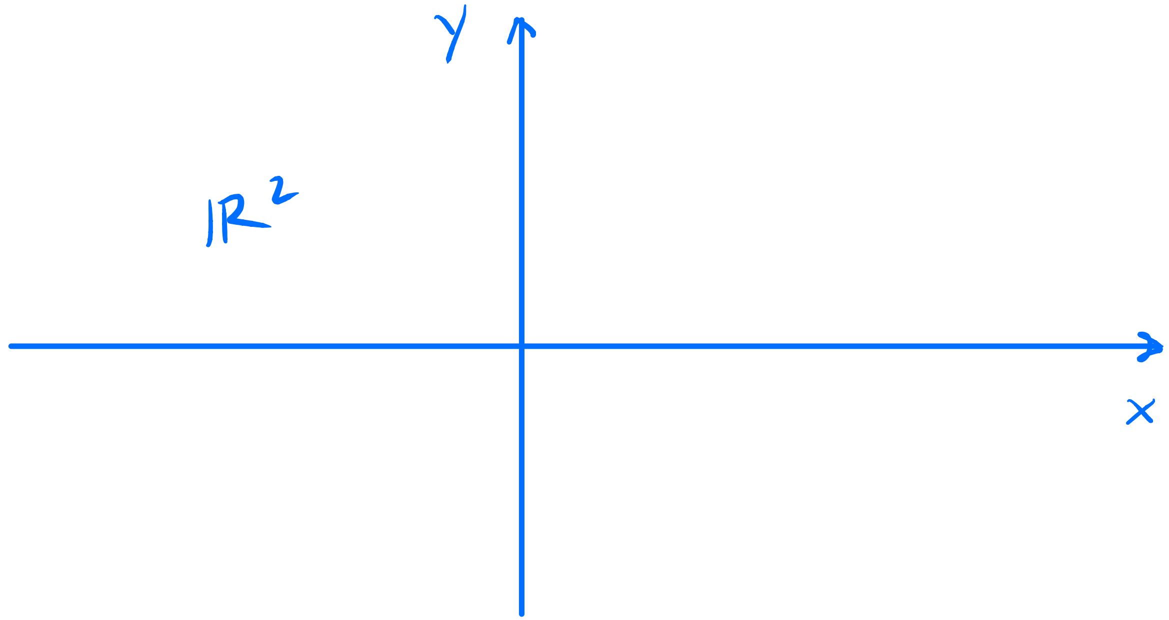
Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Alla luce dell'identificazione

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \cup r_\infty$$

e introducendo un sistema di riferimento sul piano *z=1*, possiamo pensare il piano proiettivo come ad un piano euclideo



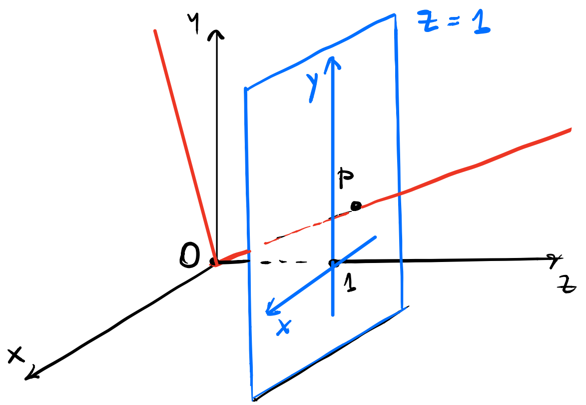


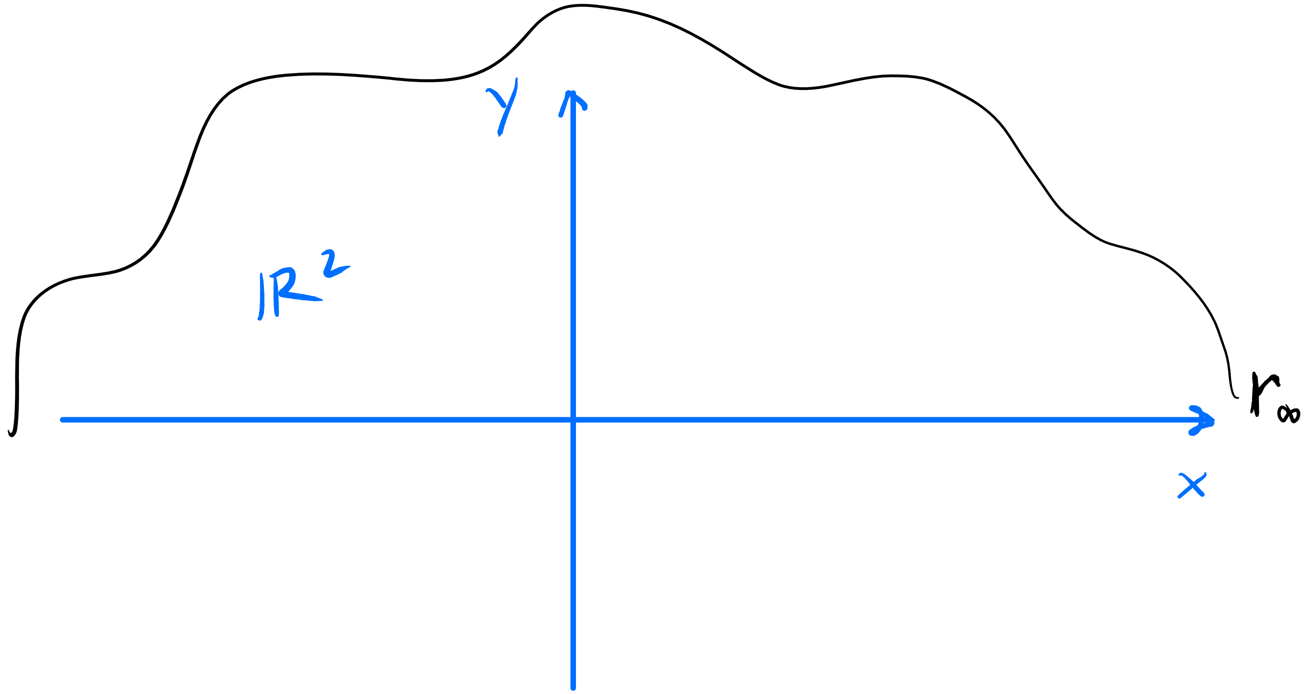
Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Alla luce dell'identificazione

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \cup r_\infty$$

e introducendo un sistema di riferimento sul piano *z=1*, possiamo pensare il piano proiettivo come ad un piano euclideo, a cui aggiungiamo una retta all'infinito.



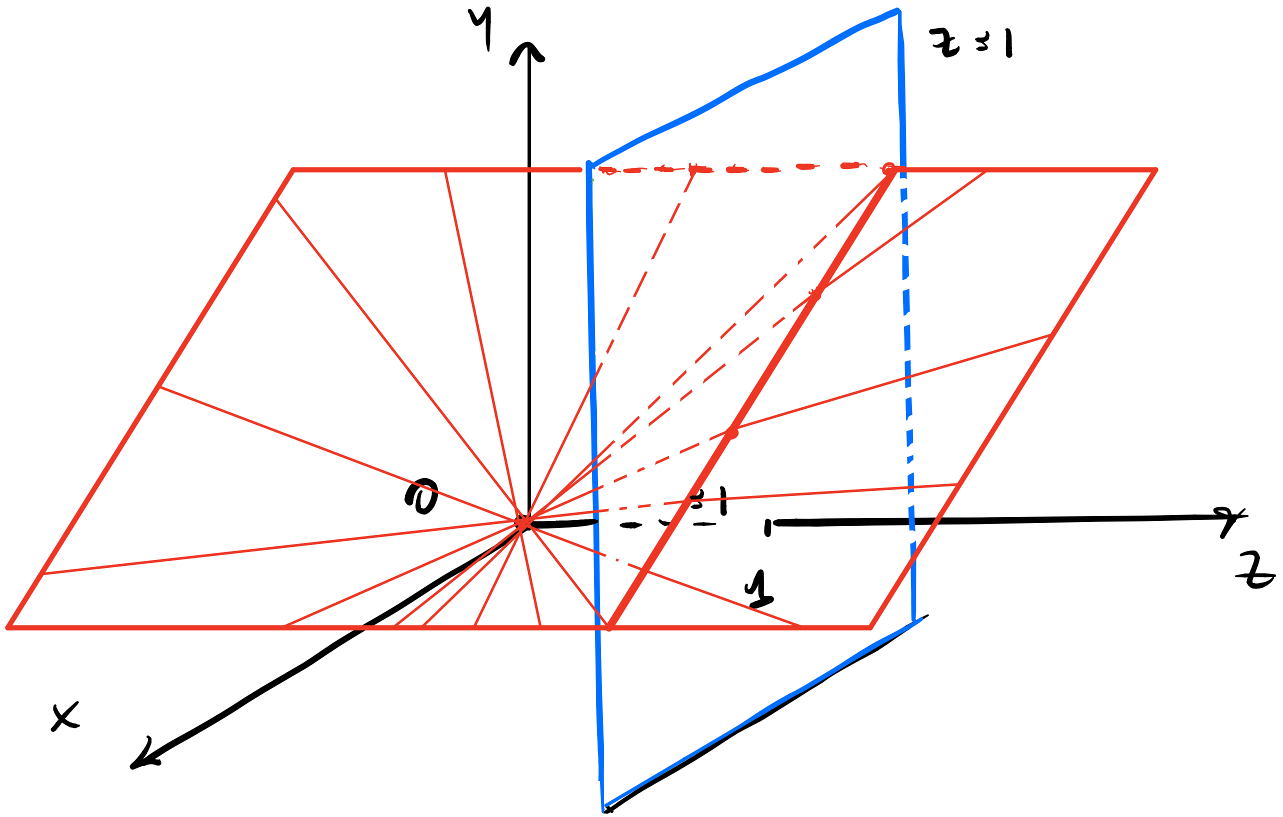


Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

I punti del piano proiettivo sono le rette di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine.

Le rette del piano proiettivo **sono** rette proiettive e corrispondono a**i piani di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine**.

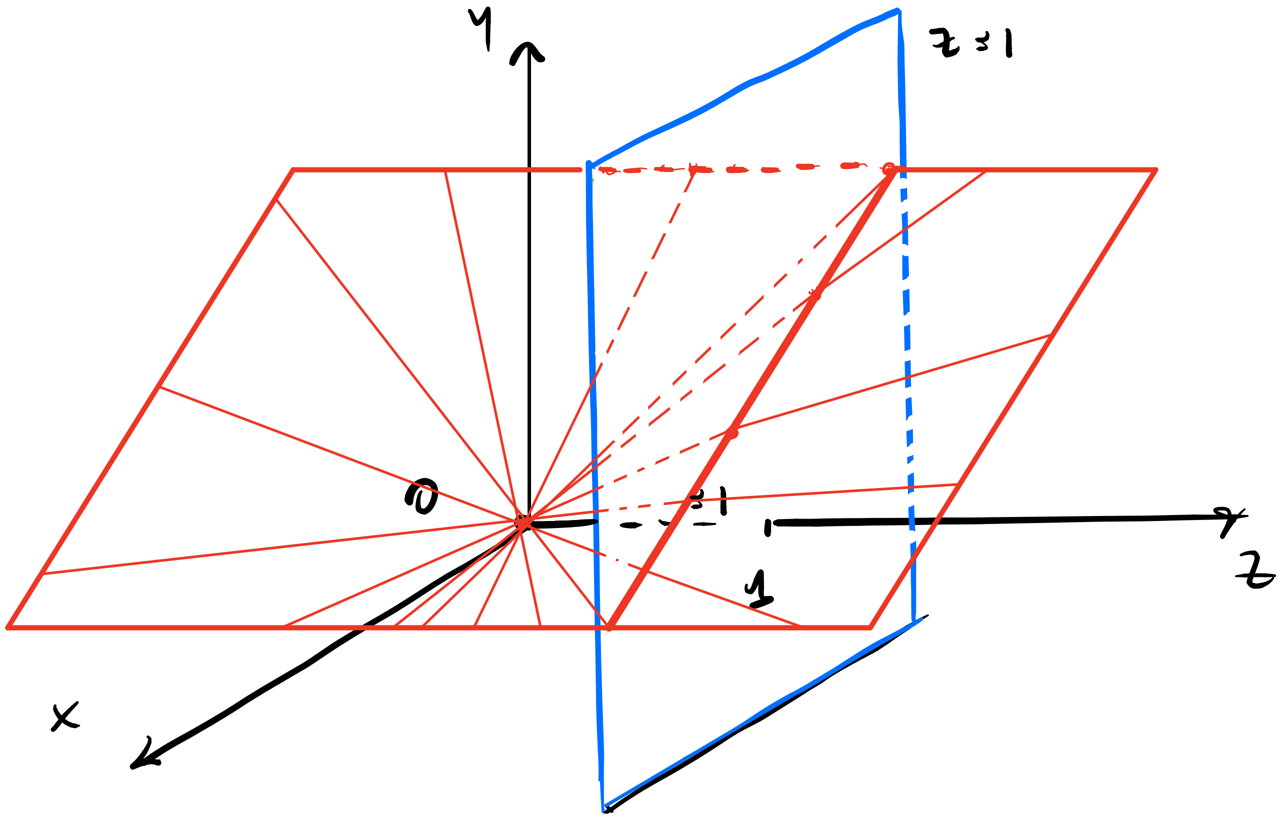
Ciascuna di esse corrisponde ad una retta sul piano di equazione *z=1* munita di un punto all'infinito.



Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Due piani di $\mathbb{R}^3$ passanti per l'origine si intersecano sempre lungo una retta passante per l'origine.

Traducendo questo fatto sul piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, abbiamo che **due rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si intersecano sempre in un punto**.

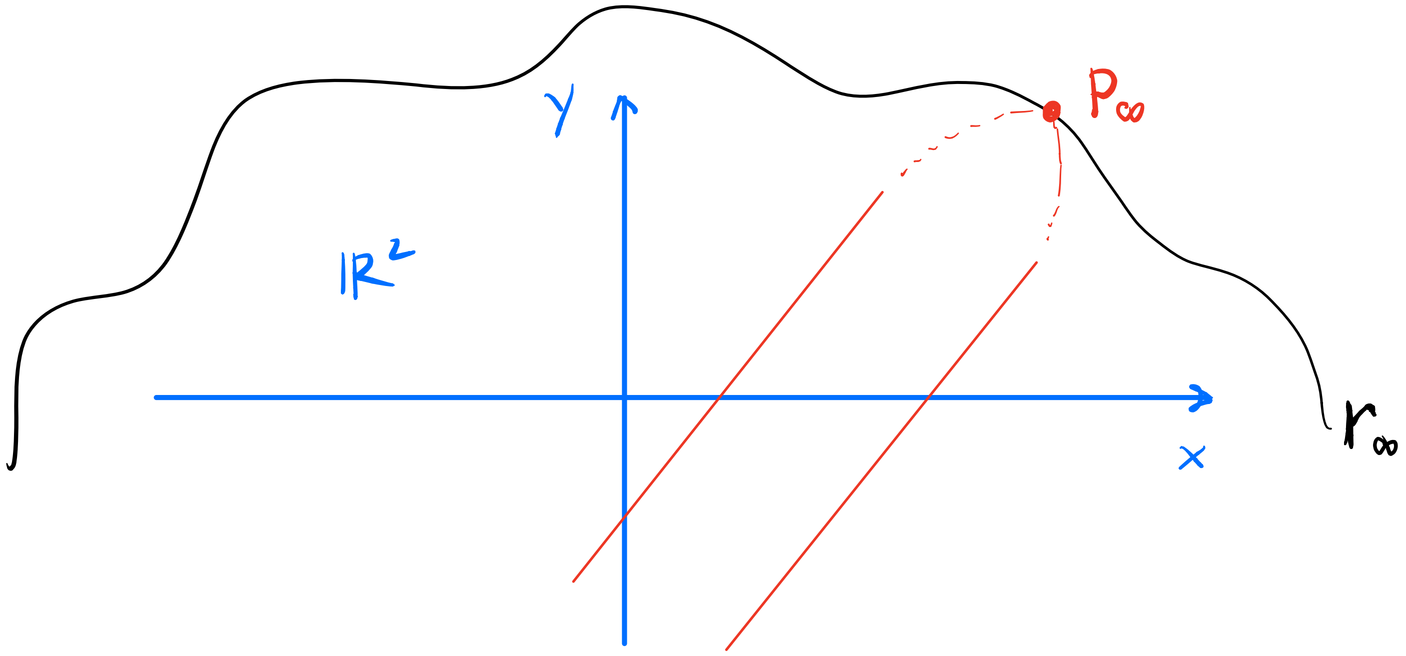


Perciò

in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non esistono rette parallele

Il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

In particolare, due piani che corrispondono a due rette parallele sul piano *z=1*, si intersecano lungo una retta che giace sul piano *z=0*, cioè le due rette si intersecano in un punto all'infinito.



“Anamorfosi” delle coniche irriducibili in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Infine osserviamo che, la scelta della retta all’infinito dipende dal sistema di riferimento che abbiamo fissato o, equivalentemente, del piano che usiamo come schermo (finora esso era il piano $z=1$).

Perciò ogni retta del piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ può essere scelta come retta all’infinito e ogni punto del piano può essere scelto come punto all’infinito.

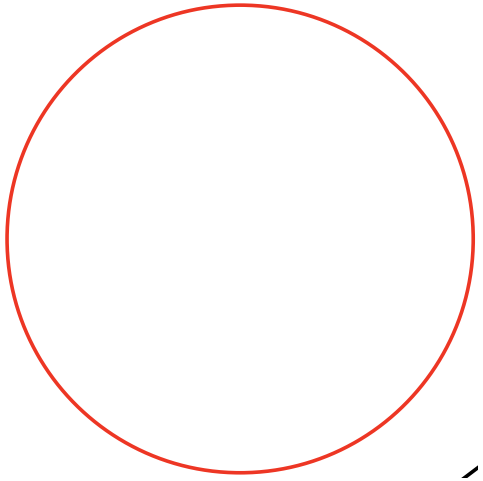
Questo fatto corrisponde ad un cambiamento del punto di proiezione e, determina una sorta di *anamorfosi* delle coniche proiettive irriducibili.

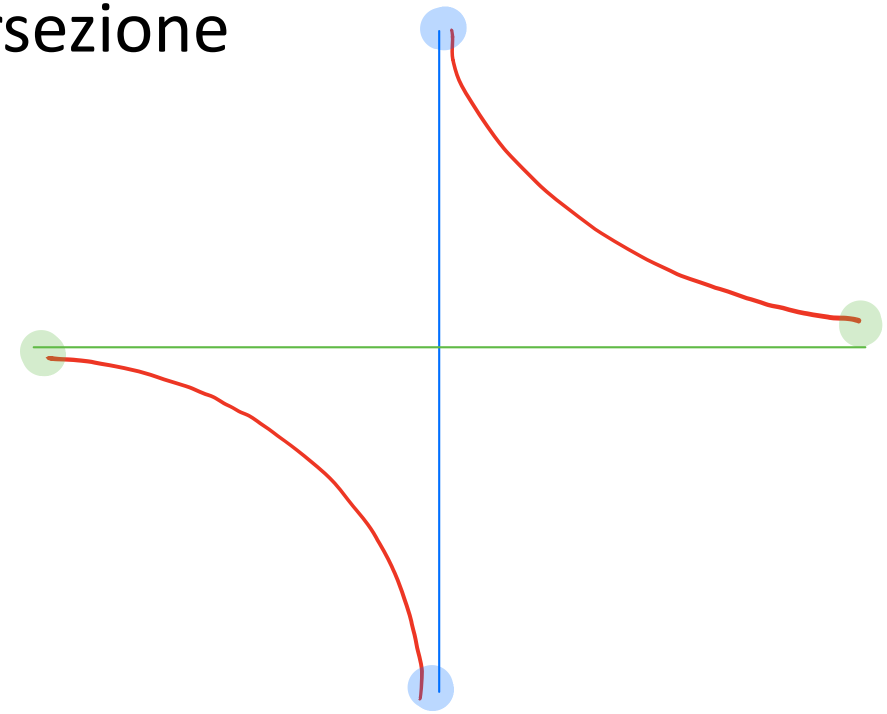
In particolare, si ha che mentre nel piano euclideo abbiamo 3 tipi diversi di coniche irriducibili (l’ellisse, l’iperbole e la parabola), nel piano proiettivo questi tre tipi diversi coincidono in un unico tipo.

“Anamorfosi” delle coniche irriducibili in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Data una conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, chiamiamo **punti all’infinito** della conica i suoi punti di intersezione con la retta all’infinito.

Un’ellisse in $\mathbb{R}^2$ **non** ha punti all’infinito.

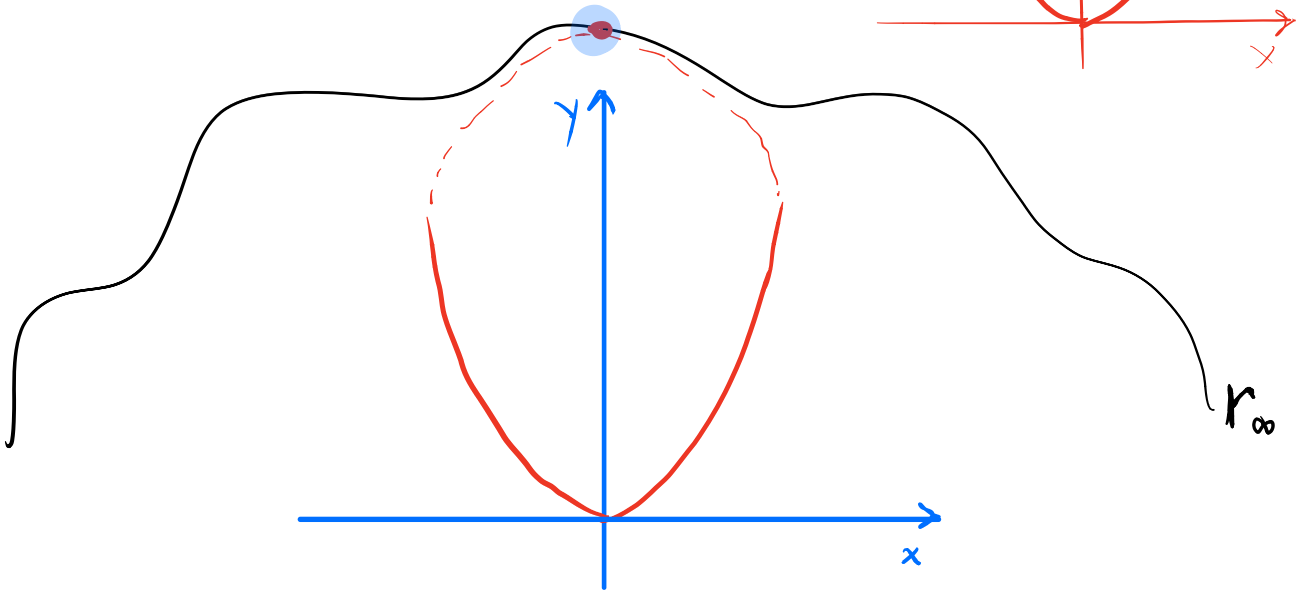


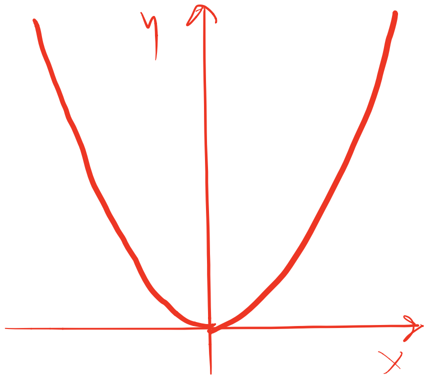


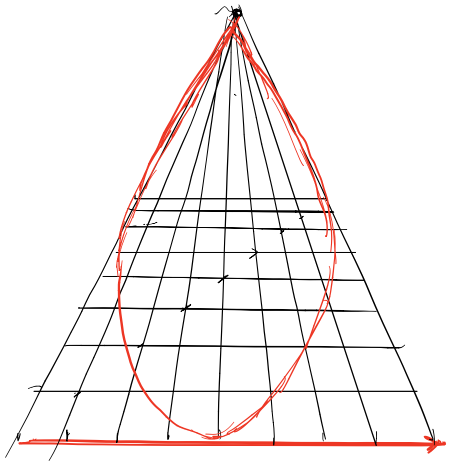
Un’iperbole in $\mathbb{R}^2$ ha **2** punti all’infinito, corrispondenti alle direzioni dei suoi asintoti

“Anamorfosi” delle coniche irriducibili in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

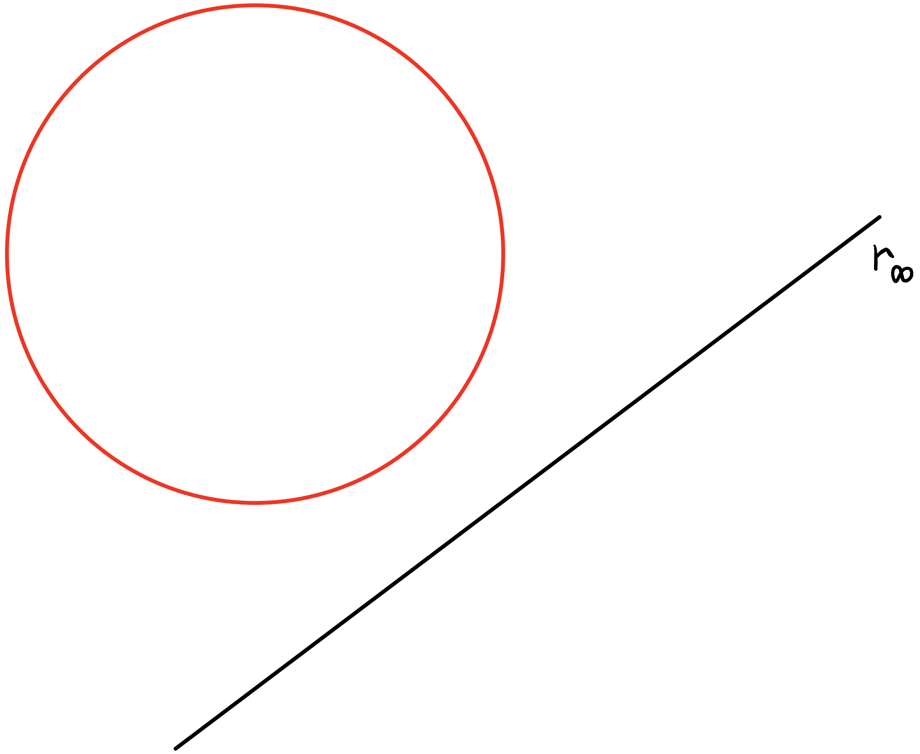
Infine, una parabola in $\mathbb{R}^2$ ha **un solo** punto all’infinito, in cui è tangente alla retta all’infinito.



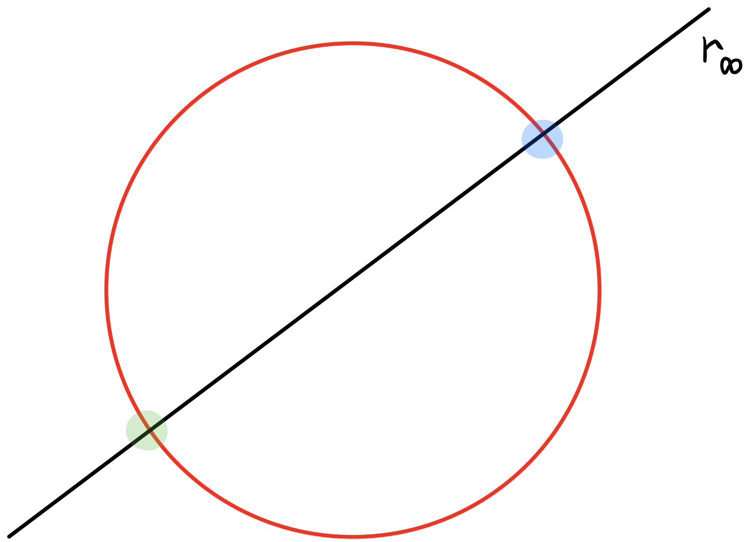


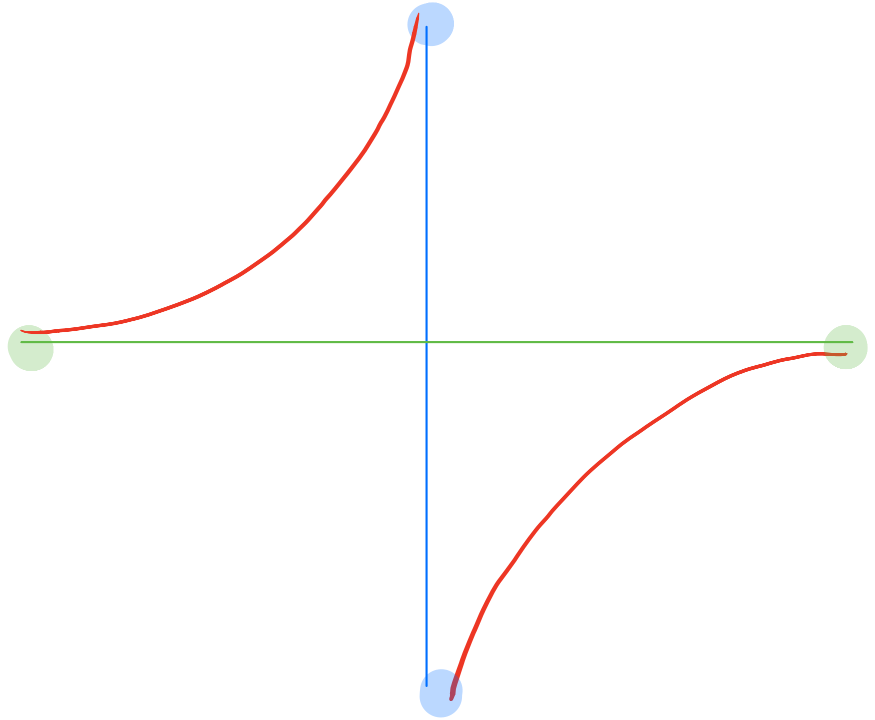


Anamorfosi delle coniche irriducibili in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

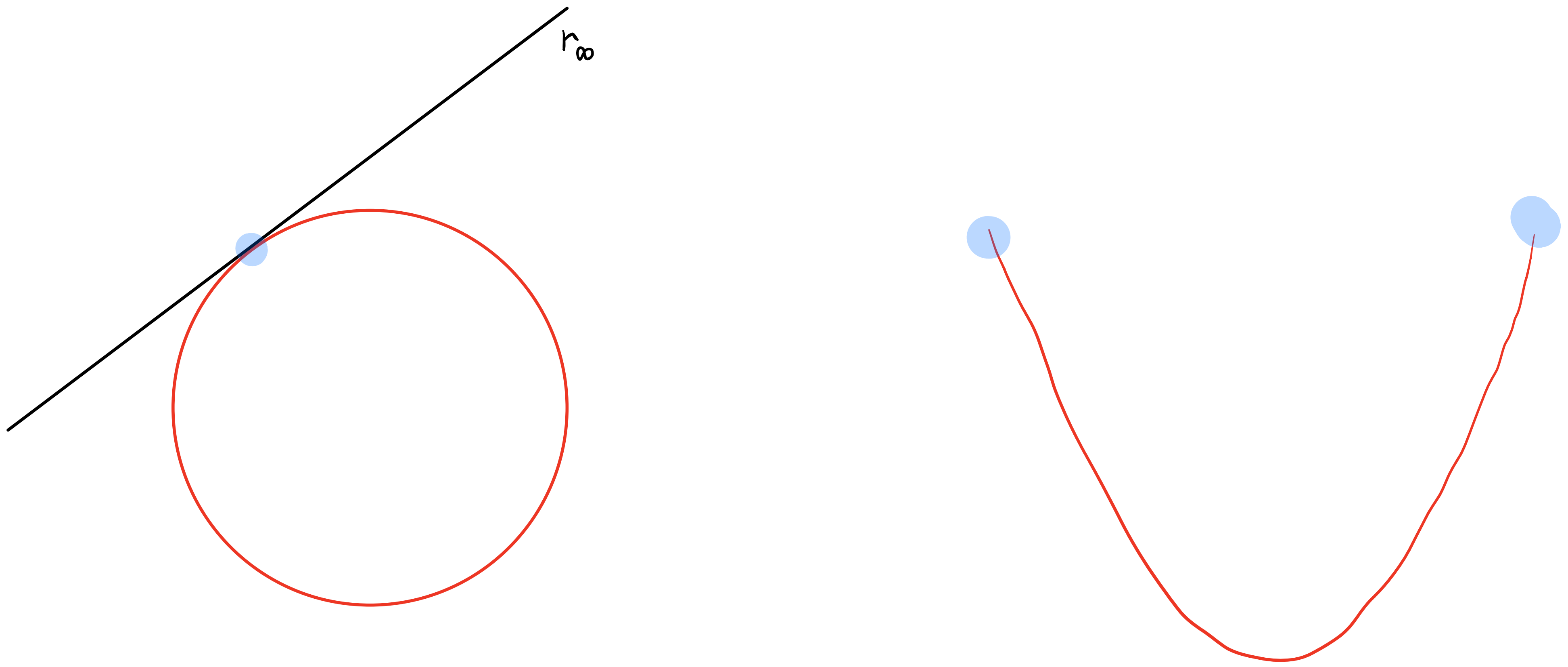


Anamorfosi delle coniche irriducibili in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$





Anamorfosi delle coniche irriducibili in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$



Riferimenti bibliografici

- **L. Catastini, Dalla geometria della visione alla trasformazione prospettica**, in: L. Catastini, F. Ghione (a cura di), *Matematica e Arte, forme del pensiero artistico*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2011.
- **G. Indovina, L'omologia e Piero della Francesca**, in: L. Catastini, F. Ghione (a cura di), *Matematica e Arte, forme del pensiero artistico*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2011.
- **J. Stillwell, The four pillars of geometry**, Springer, New York, 2005.
- **J. Stillwell, Mathematics and its history**, Springer, New York, 2011.