

Modelli Fisici e Metodi Matematici

Seminario di orientamento consapevole

Marilena Ligabò

Bari, 18 marzo 2025

Física matemática

La física matemática è quella disciplina scientifica che si occupa delle «applicazioni della matematica ai problemi della física e dello sviluppo di metodi matematici adatti alla formulazione di teorie físicas e alle relative applicazioni».

La storia della física matemática può essere tracciata fino alle origini del metodo scientifico.

Strumenti della fisica matematica

- ◆ equazioni differenziali ordinarie ed alle derivate parziali;
- ◆ analisi funzionale;
- ◆ probabilità;
- ◆ geometria differenziale, algebrica, simplettica e non commutativa;
- ◆ algebra lineare, algebra degli operatori, teoria dei gruppi.

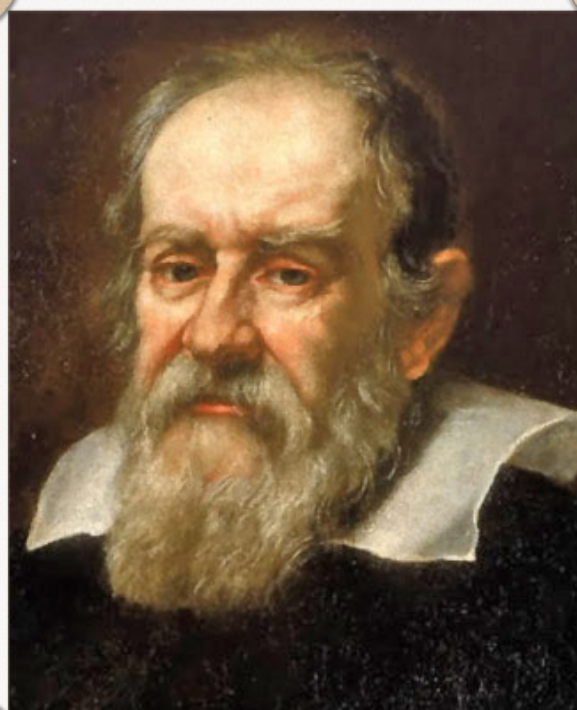
Contenuti (prima parte)

- ◆ Pensieri e parole di alcuni grandi fisici-matematici;
- ◆ Due leggi fondamentali dell'ottica: legge della riflessione e legge della rifrazione;
- ◆ Come spiegarle?
- ◆ Principio del minimo tempo (Fermat)
- ◆ Applicazioni pratiche.

Contenuti (seconda parte)

Altri principi di minimo in Física Matemática:

- ◆ Problema della brachistocrona: cicloide e pendolo di Huygens;
- ◆ Problema della catenaria;
- ◆ Problema di Plateau (bolle di sapone);
- ◆ Curiosità.



Galileo Galilei (1564 – 1642) è stato un fisico, filosofo, astronomo e matematico italiano, considerato il padre della scienza moderna.

La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.



Jules Henri Poincaré (1854 –1912)

Poincaré, considerato l'ultimo universalista, dal momento che eccelse in tutti i campi della Matematica nota al suo tempo.

La scienza e l'ipotesi

L'esperienza è la sorgente unica della verità: essa sola può insegnarci qualcosa di nuovo. [...]

Ma se l'esperienza è tutto, che posto resterà alla fisica matematica? [...]

Non potremmo accontentarci della nuda esperienza? [...] Lo scienziato deve fare ordine: la scienza si fa con i fatti così come una casa si fa con i mattoni, ma l'accumulazione di fatti non è scienza più di quanto un mucchio di mattoni non sia una casa.



Eugene Paul Wigner (1902 – 1995) è stato un fisico e matematico ungherese naturalizzato statunitense, Premio Nobel per la fisica nel 1963.

La irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali

Il miracolo dell'appropriatezza del linguaggio della matematica per la formulazione delle leggi della fisica è un dono meraviglioso che noi non comprendiamo né meritiamo. Dovremmo esserne grati e sperare che esso rimarrà valido nelle ricerche future e che si estenderà, nel bene o nel male, a nostro piacimento, anche se forse a nostro turbamento, alle più ampie branche del sapere.

Ottica

L'ottica è la branca della fisica che descrive il comportamento e le proprietà della luce e l'interazione di questa con la materia.

L'ottica geometrica studia i fenomeni ottici assumendo che la luce si propaghi mediante raggi rettilinei. Essa è valida quando la luce interagisce solo con oggetti di dimensioni molto maggiori della sua lunghezza d'onda.

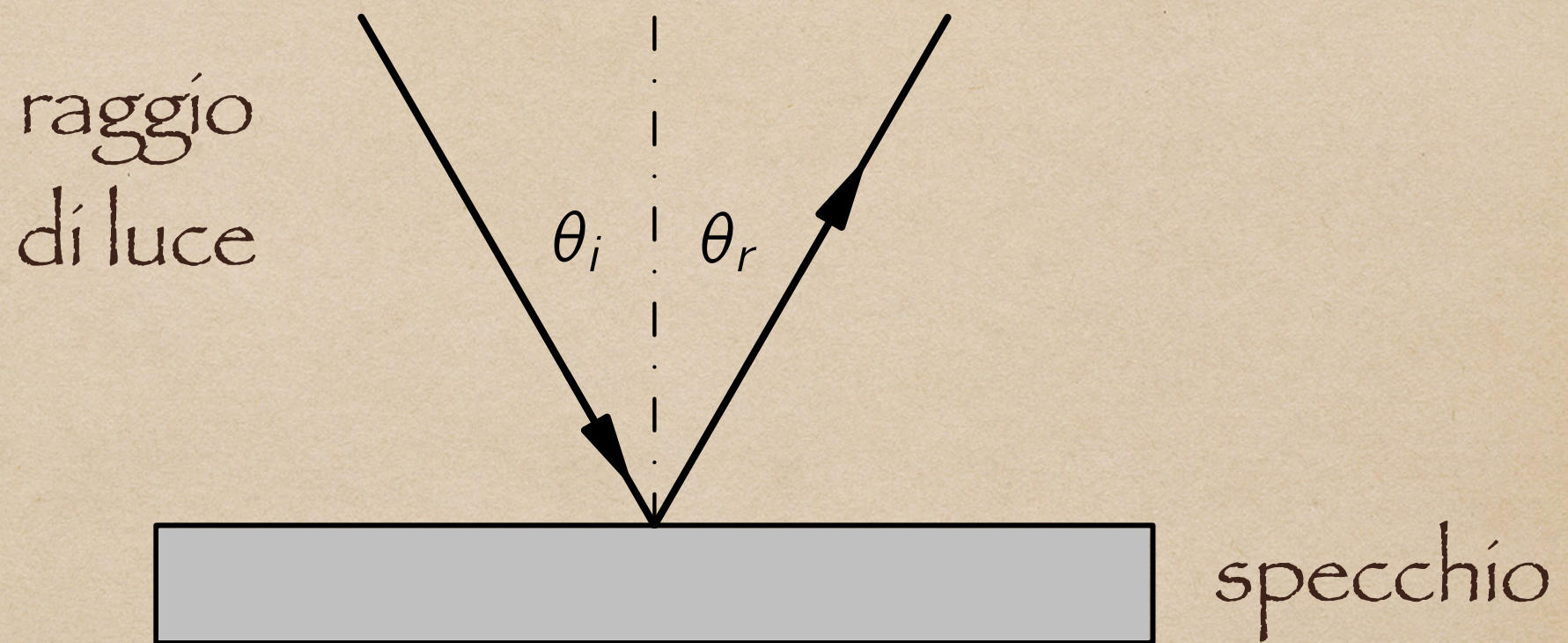


Riflessione



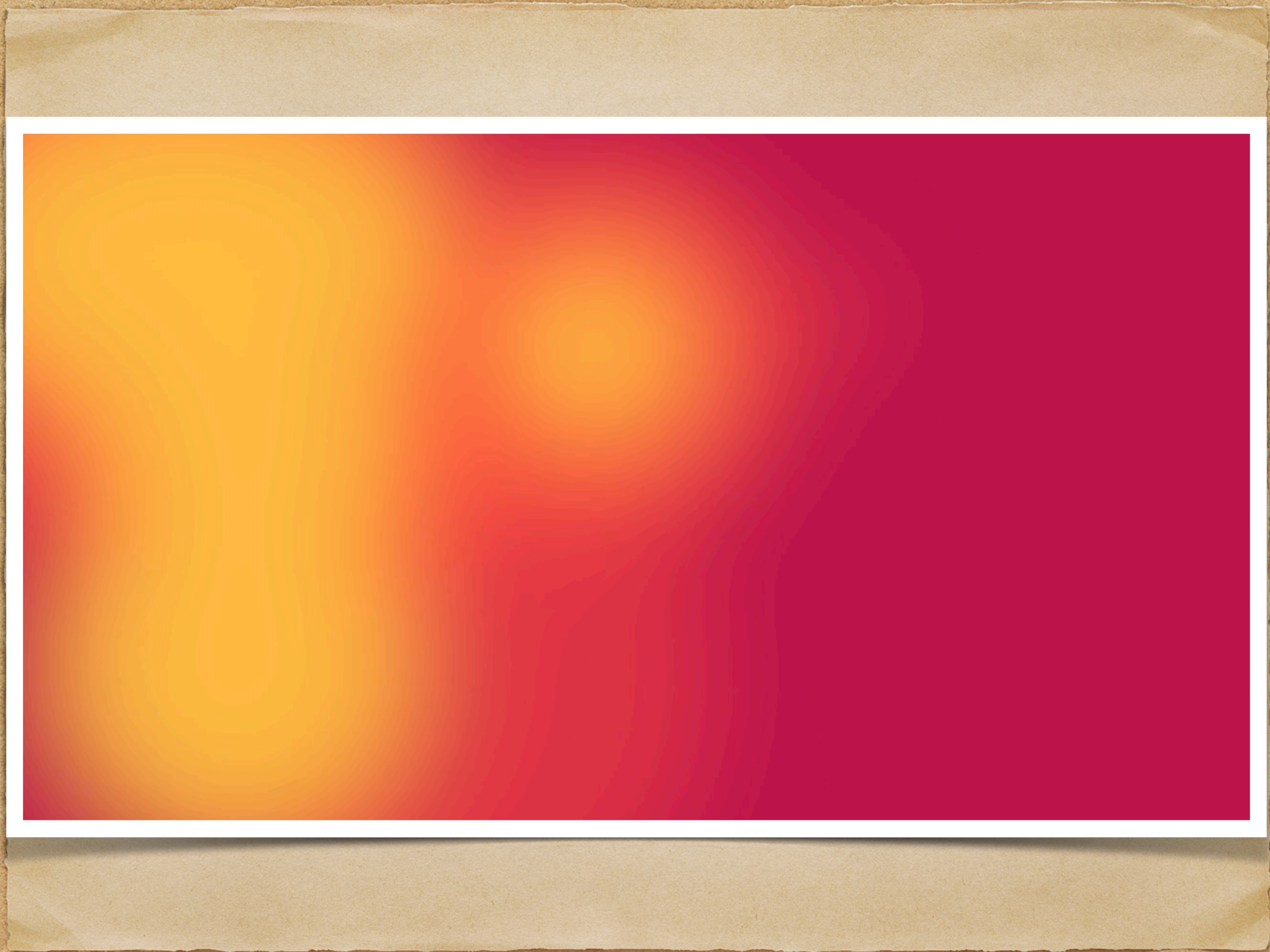
Rifrazione

Legge della riflessione

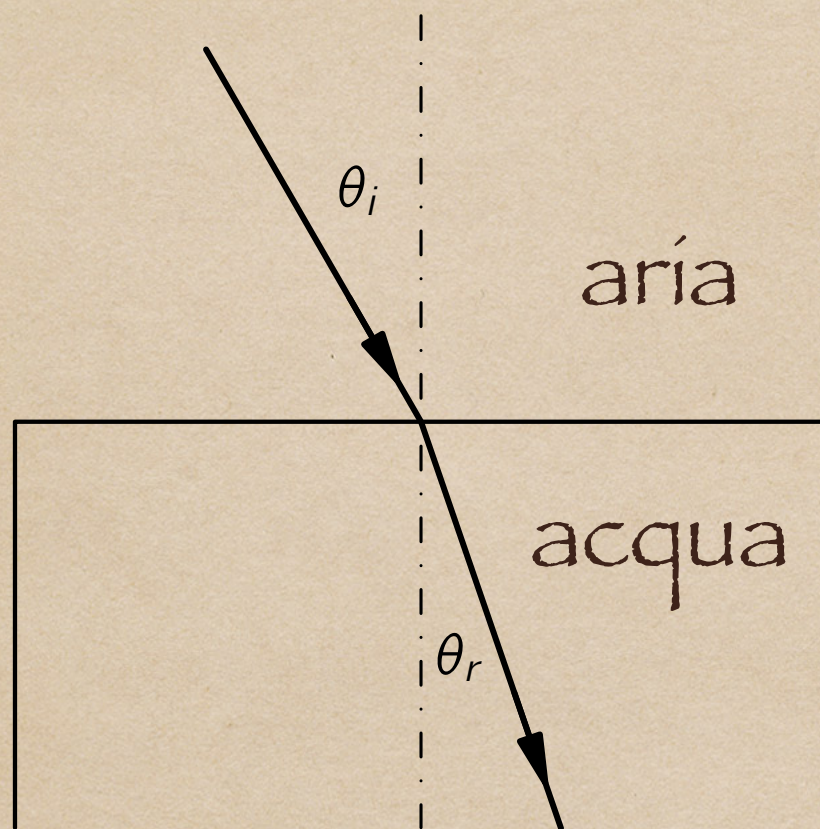


$$\theta_i = \theta_r$$

L'angolo di incidenza è uguale
all'angolo di riflessione



Rifrazione



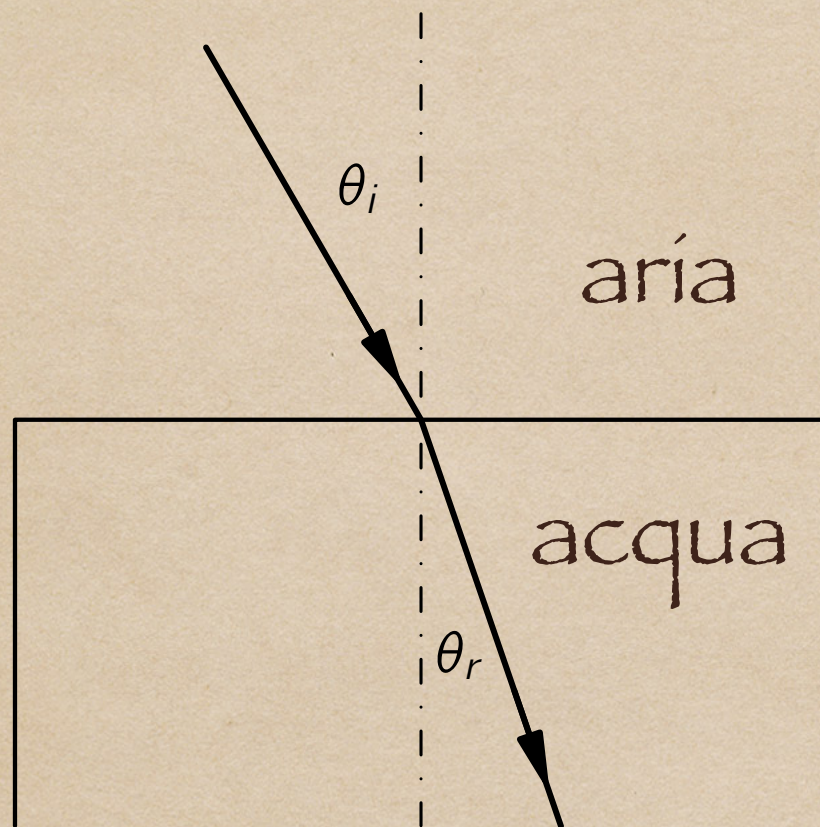
angolo in aria	angolo in acqua
-------------------	--------------------

10°	8°
20°	15-1/2°
30°	22-1/2°
40°	29°
50°	35°
60°	40-1/2°
70°	45-1/2°
80°	50°



Claudio Tolomeo (100 d. C. circa – 175 circa d. C.), fu un astrologo, astronomo e geografo greco, che visse e lavorò ad Alessandria d'Egitto

Trovare la regola



Legge di Snell

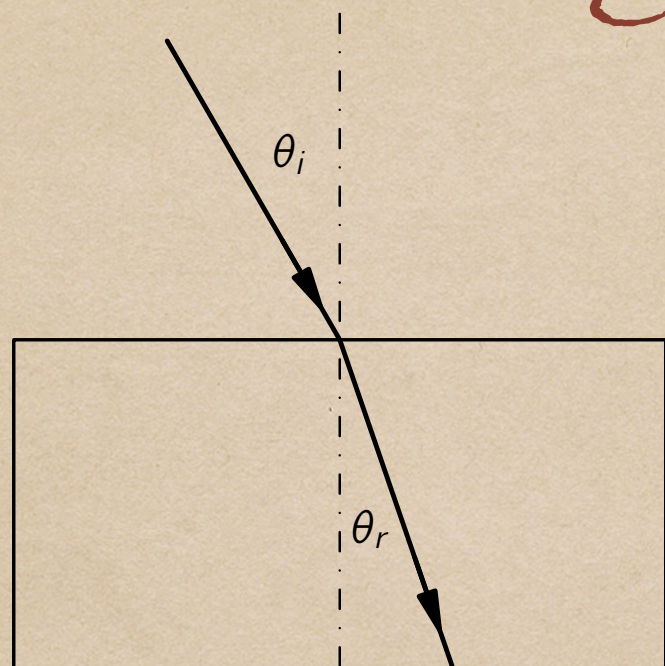
$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r$$

↑
indice di rifrazione



Willebrord Snell van Royen (1580 – 1626)
è stato un matematico, astronomo e
fisico olandese

Legge di Snell



indice di rifrazione

$$\sin \theta_i = n \sin \theta_r$$

permette
di predire

Tolomeo (140)

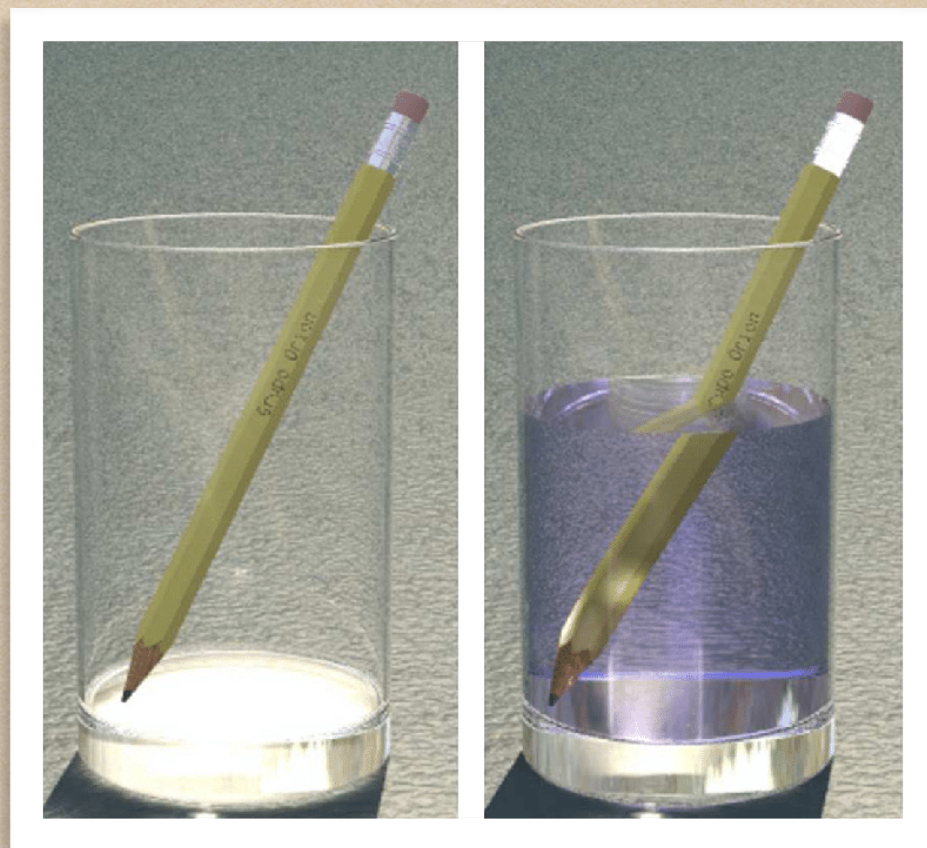
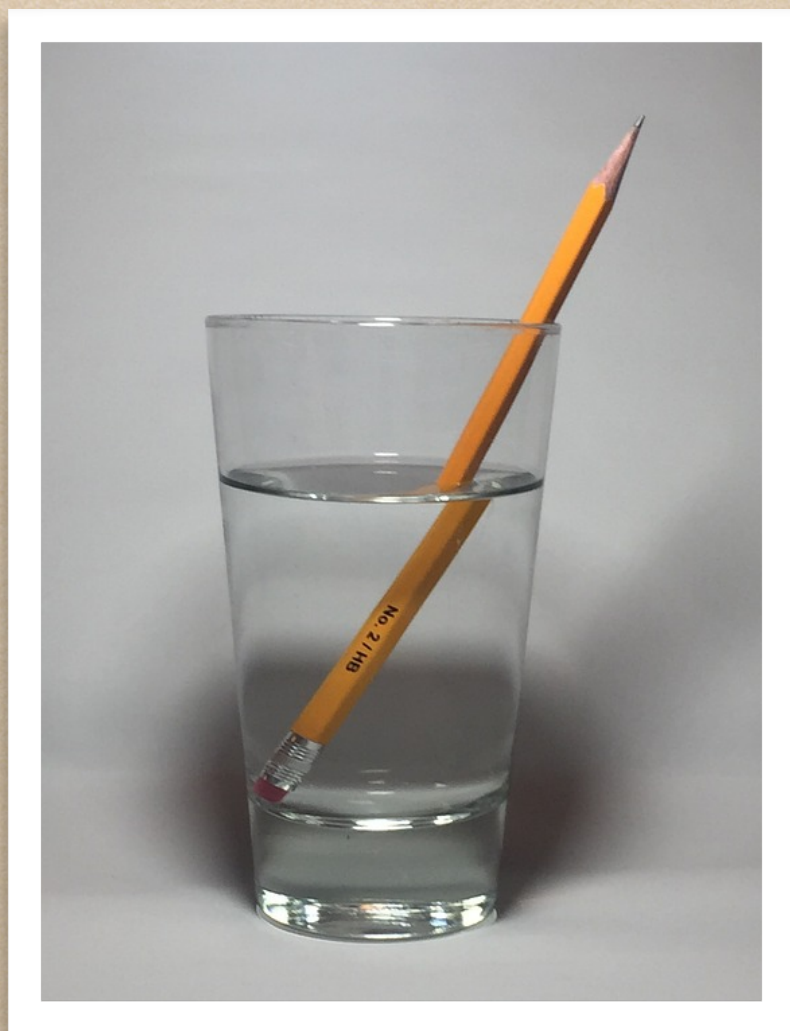
aria	acqua
10°	8°
20°	15-1/2°
30°	22-1/2°
40°	29°
50°	35°
60°	40-1/2°
70°	45-1/2°
80°	50°

Snell (1621)

aria	acqua
10°	7-1/2°
20°	15°
30°	22°
40°	29°
50°	35°
60°	40-1/2°
70°	45°
80°	48°



Matite in un bicchiere



Ecco spiegato il perché!



Ricapitoliamo

- ◆ Osservazione dei fenomeni;
- ◆ Tabella di numeri (raccolta dati);
- ◆ Formula matematica che spiega i dati numerici.

Ma la vera gloria della scienza è:
trovare un modo di pensare !!!

Principio del tempo minimo di Fermat

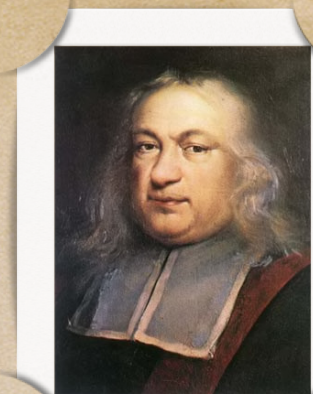


Pierre de Fermat (1601-1665)

è stato un matematico e
magistrato francese.

Tra tutti i possibili cammini che un raggio di luce può percorrere per andare da un punto a un altro, esso segue il cammino che richiede il tempo più breve.

Ultimo teorema di Fermat



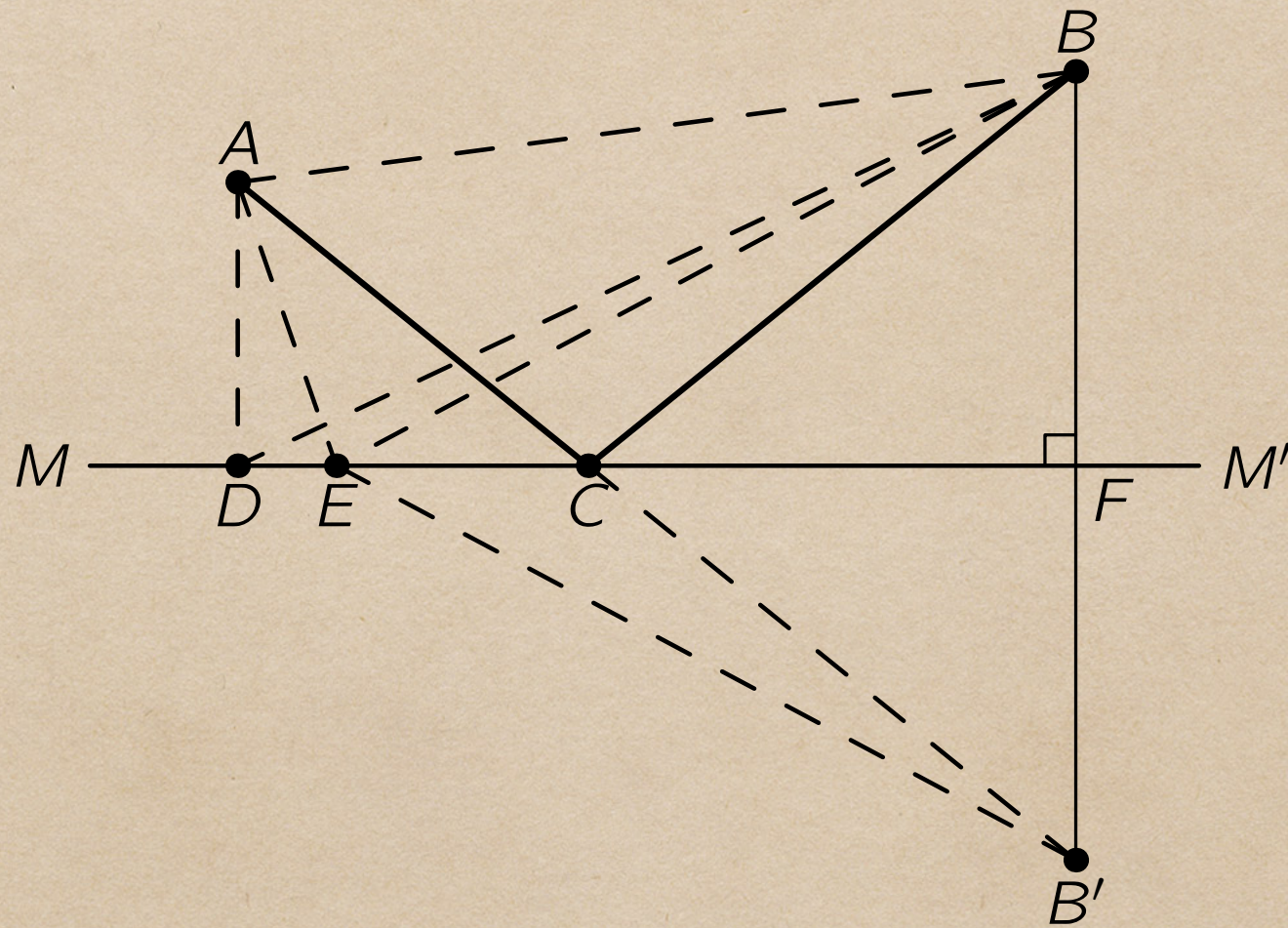
- ♦ Il suo enunciato è molto semplice, ma dimostrarlo ha rappresentato una sfida per secoli:

Non è possibile trovare quattro numeri interi x, y, z e n con $n > 2$ per cui:

$$x^n + y^n = z^n$$

- ♦ Fermat annotò la sua congettura, sul margine di un volume dell'Arithmetica di Diofanto, con le seguenti parole:
«Dispongo di una meravigliosa dimostrazione di questo teorema che non può essere contenuta nel margine troppo stretto della pagina »
- ♦ La presunta dimostrazione del teorema non fu mai trovata. Probabilmente la dimostrazione generale che Fermat affermò di aver trovato era sbagliata. Eulero provò a dimostrare il teorema, ma riuscì solo nel caso particolare $n=3$. La dimostrazione completa arrivò solo nel 1994 da parte del matematico Andrew Wiles.

Legge della riflessione spiegata con il principio di tempo minimo



Legge della riflessione

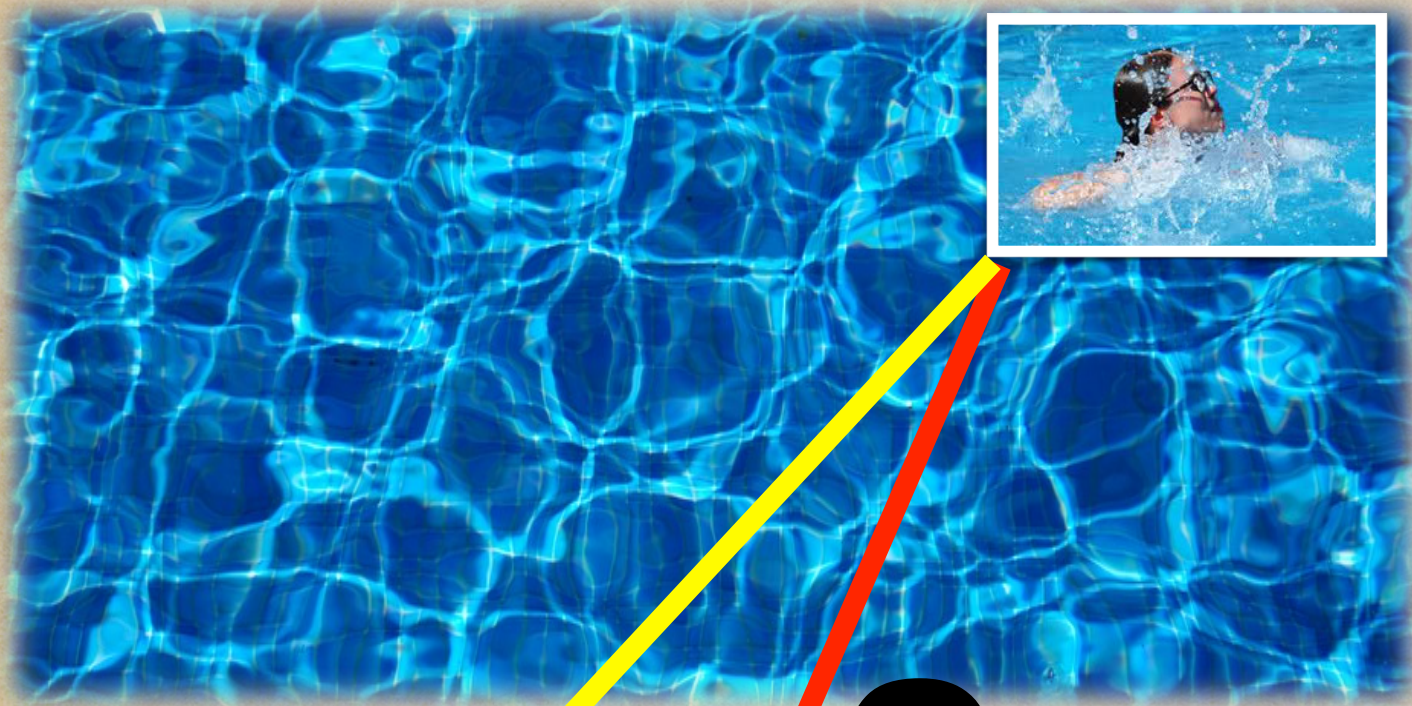
$$\theta_i = \theta_r$$

Legge della rifrazione di Snell spiegata con il principio di tempo minimo

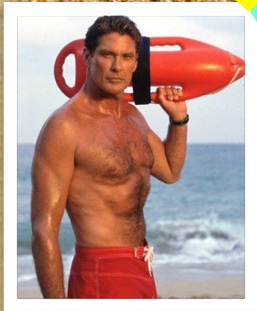


La luce è come un bagnino!! [Feynmann]

Il problema del bagnino

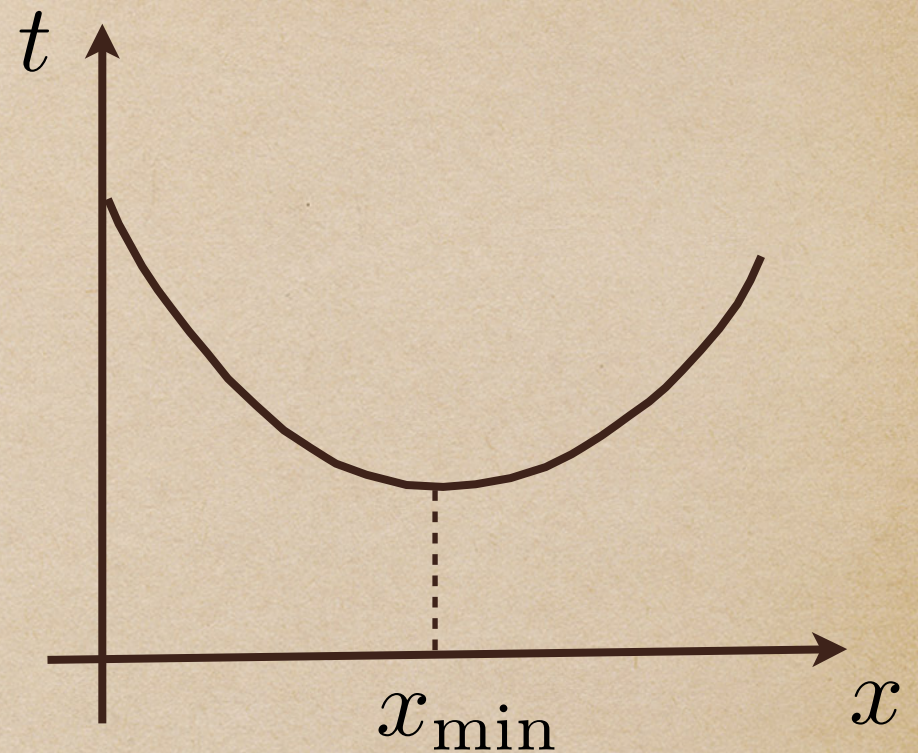
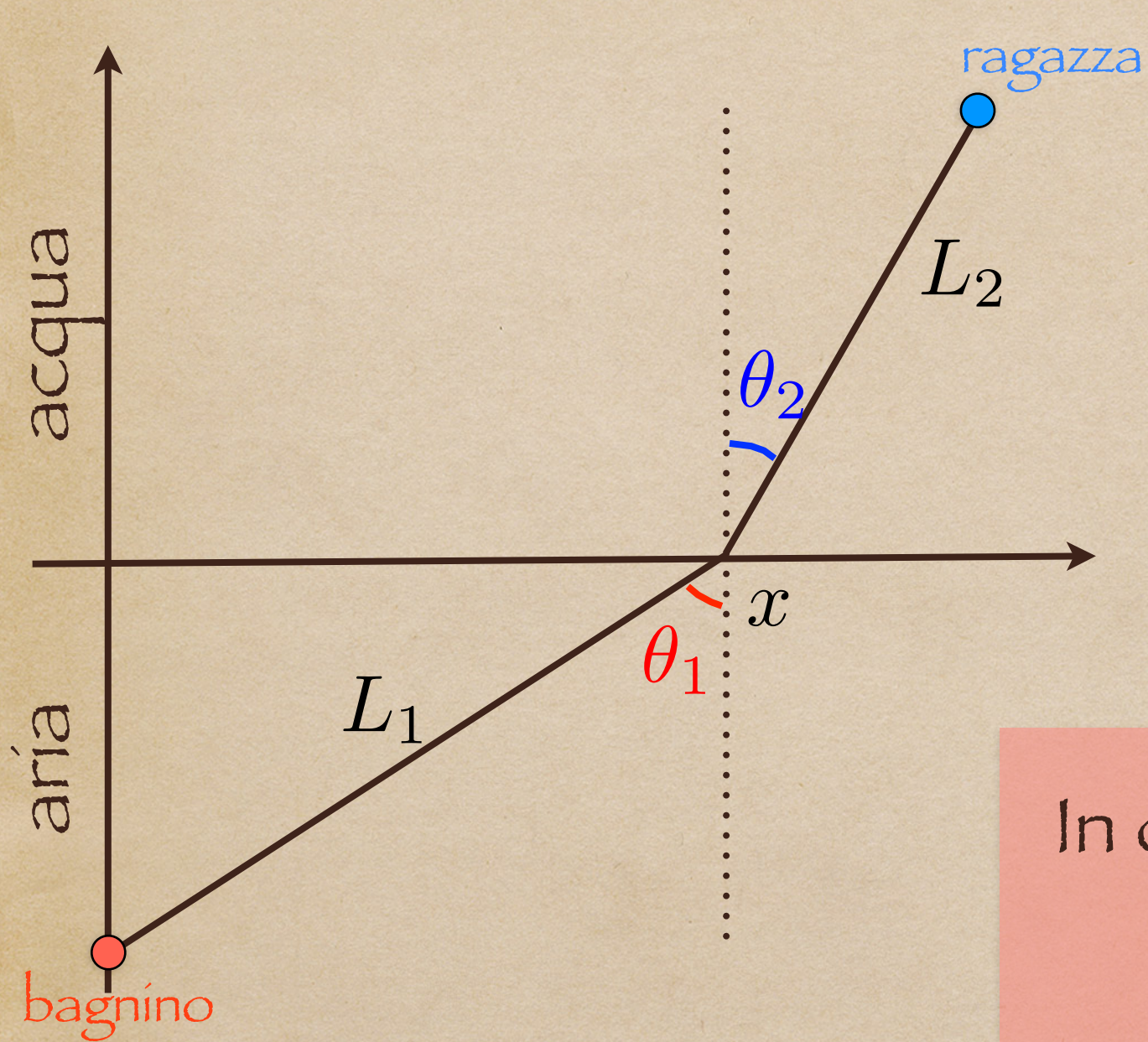


?



Una ragazza è caduta in acqua da una barca e grida chiedendo aiuto. Il bagnino si trova sulla spiaggia, vede l'incidente, può correre e nuotare. Cosa fa?

Modello matematico



In corrispondenza di x_{\min}

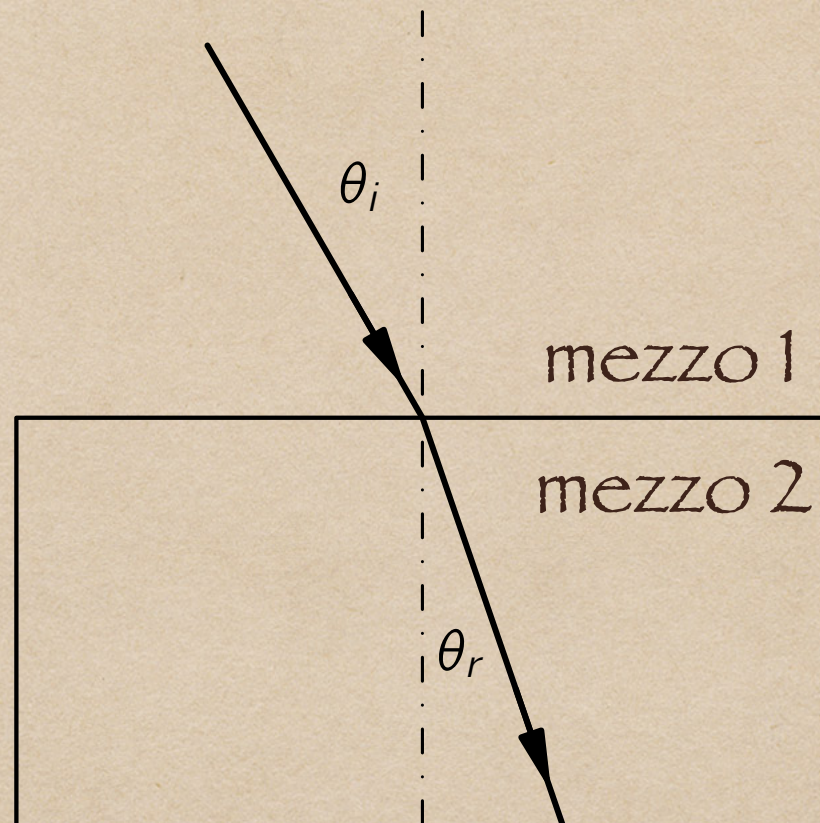
$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

<https://www.geogebra.org/m/pEzsEdpD>

v_1 velocità nell'aria
 v_2 velocità nell'acqua

Legge della rifrazione di Snell

raggio
di luce



$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12}$$

$$\sin \theta_i = n_{12} \sin \theta_r$$

↑
indice di rifrazione tra il mezzo 1 e il mezzo 2:
è il rapporto tra le due velocità

A cosa serve?

- È possibile spiegare tutto con la legge di riflessione e quella di Snell. A cosa serve il principio di Fermat?
- È semplicemente un problema filosofico o estetico?

Il principio di Fermat permette
di predire cose nuove!

Predice cose nuove

Il principio di Fermat permette di capire che l'indice di rifrazione è dato dal rapporto tra le velocità di propagazione della luce nei due mezzi.

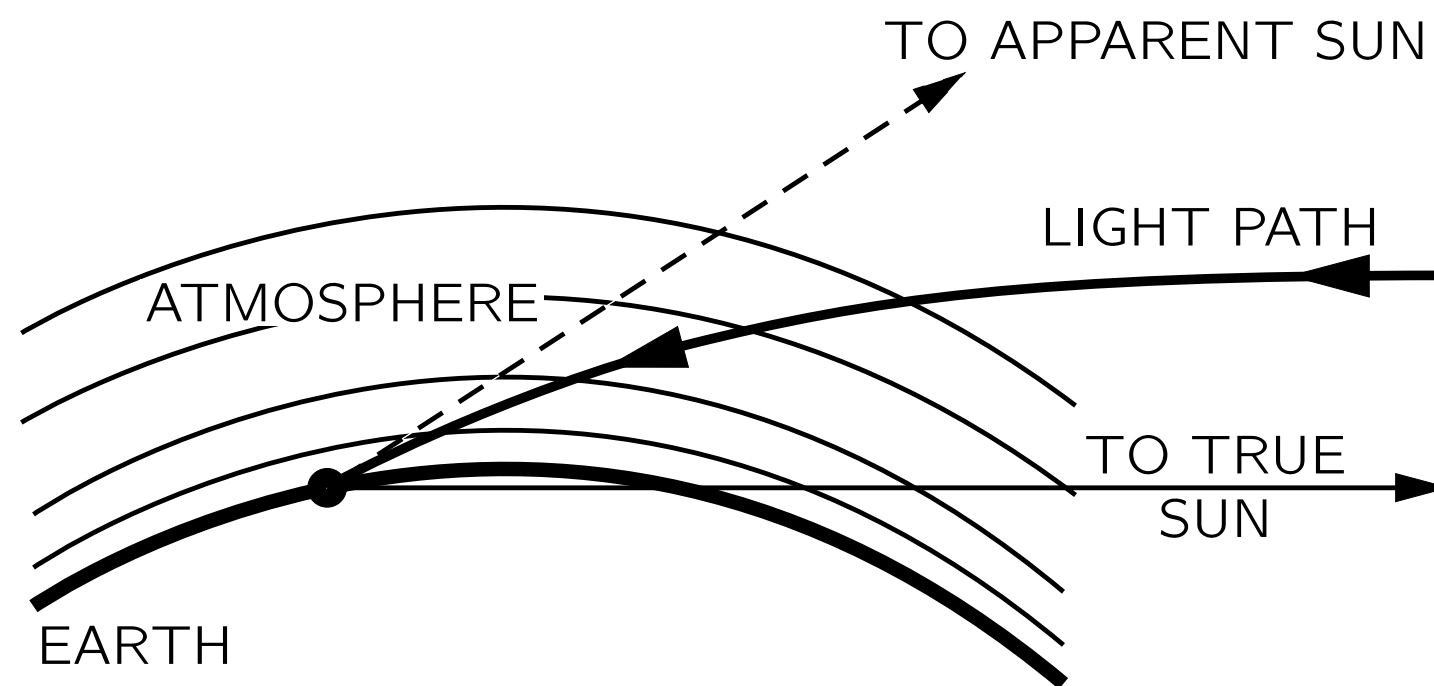
Tre mezzi: vetro (1), acqua (2), aria (3)

$$n_{23} = \frac{v_2}{v_3} = \frac{v_1/v_3}{v_1/v_2} = \frac{n_{13}}{n_{12}}$$

Esempi e Applicazioni



Il sole sotto l'orizzonte



Vicino all'orizzonte il sole apparente è più alto del sole reale di circa $1/2$ grado!

Un miraggio

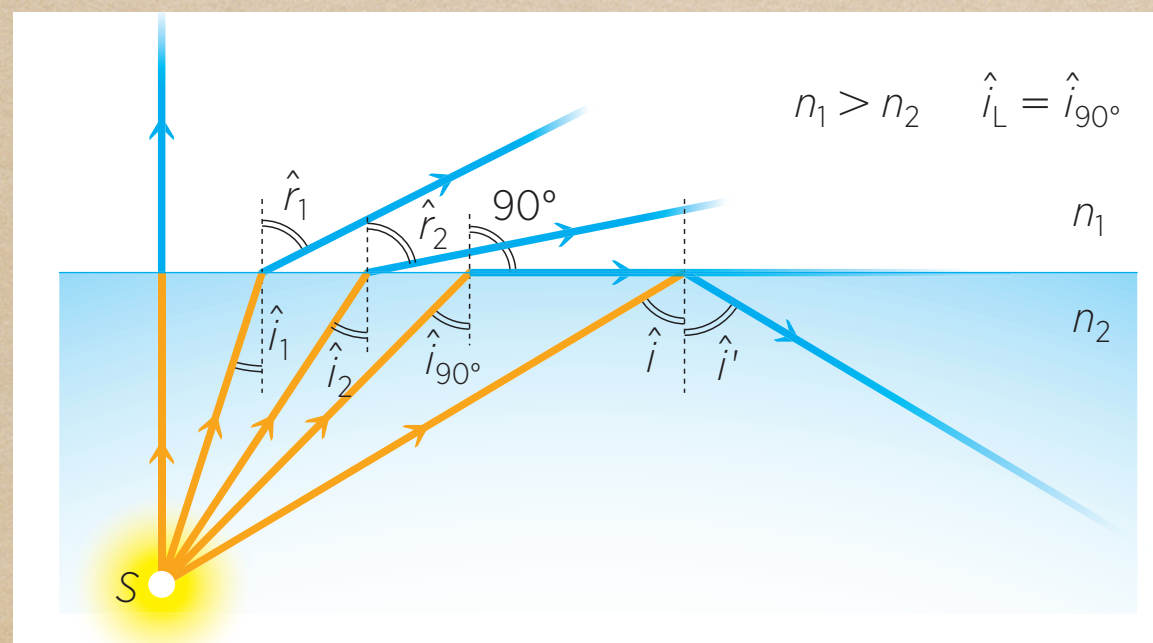
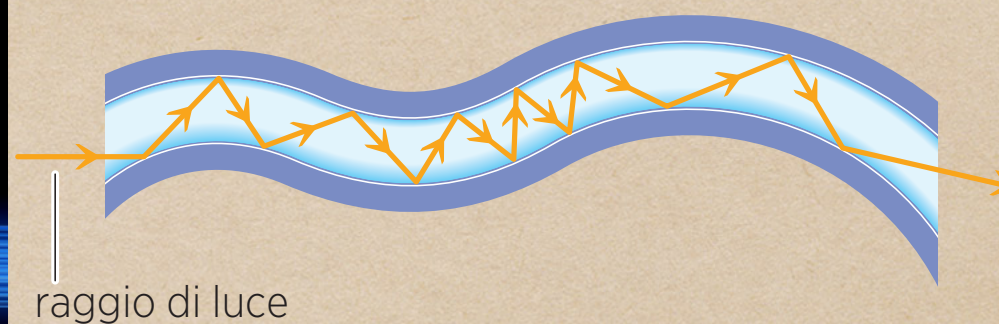
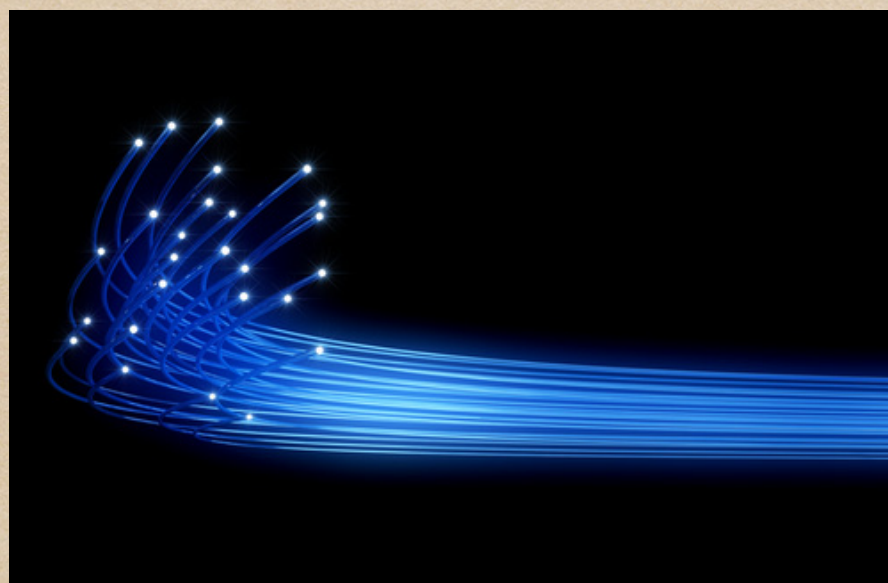


Fata Morgana



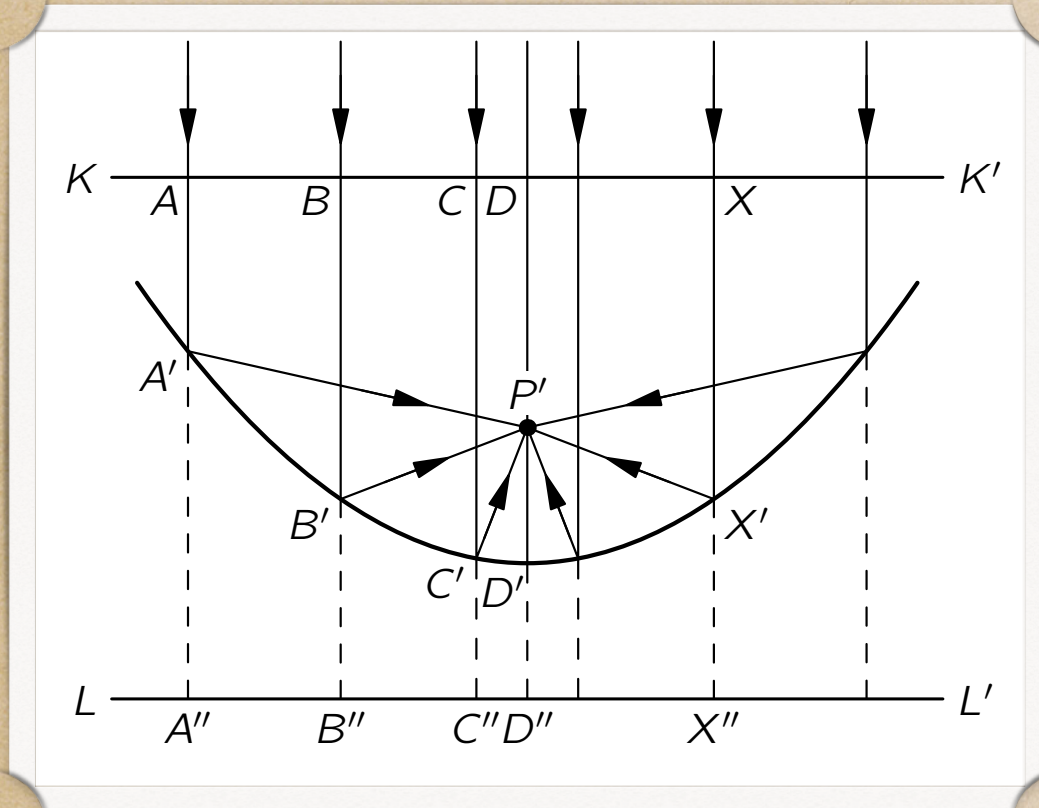
Fata Morgana:
leggendaria sorella di re Artu` che era in grado di
costruire i suoi castelli in aria

Fibre ottiche



Fenomeno della
riflessione totale

Specchi concavi (parabolici)

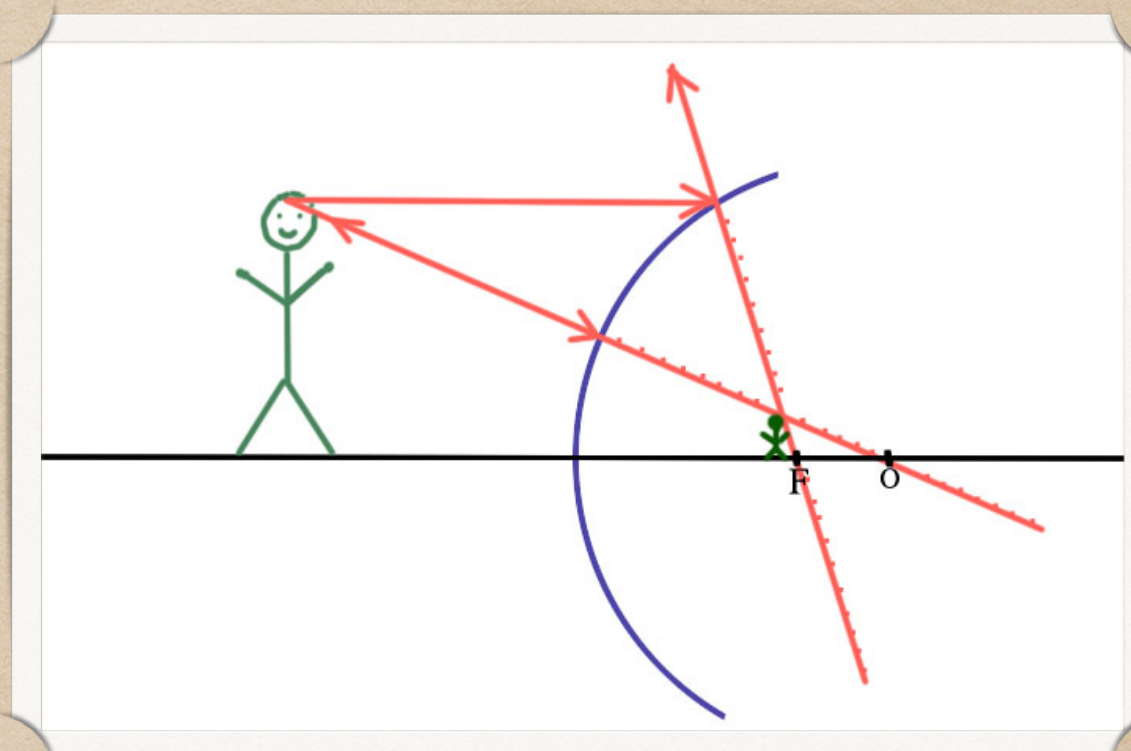


Tutta la luce
proveniente dall'alto è
raccolta in un unico
punto



Centrali termosolari:
Gli specchi parabolici seguono il
movimento del Sole durante la
giornata e ne concentrano il calore
sul tubo dove scorre l'olio. Il calore
viene poi trasformato in energia
elettrica

Specchi convessi (sferici)

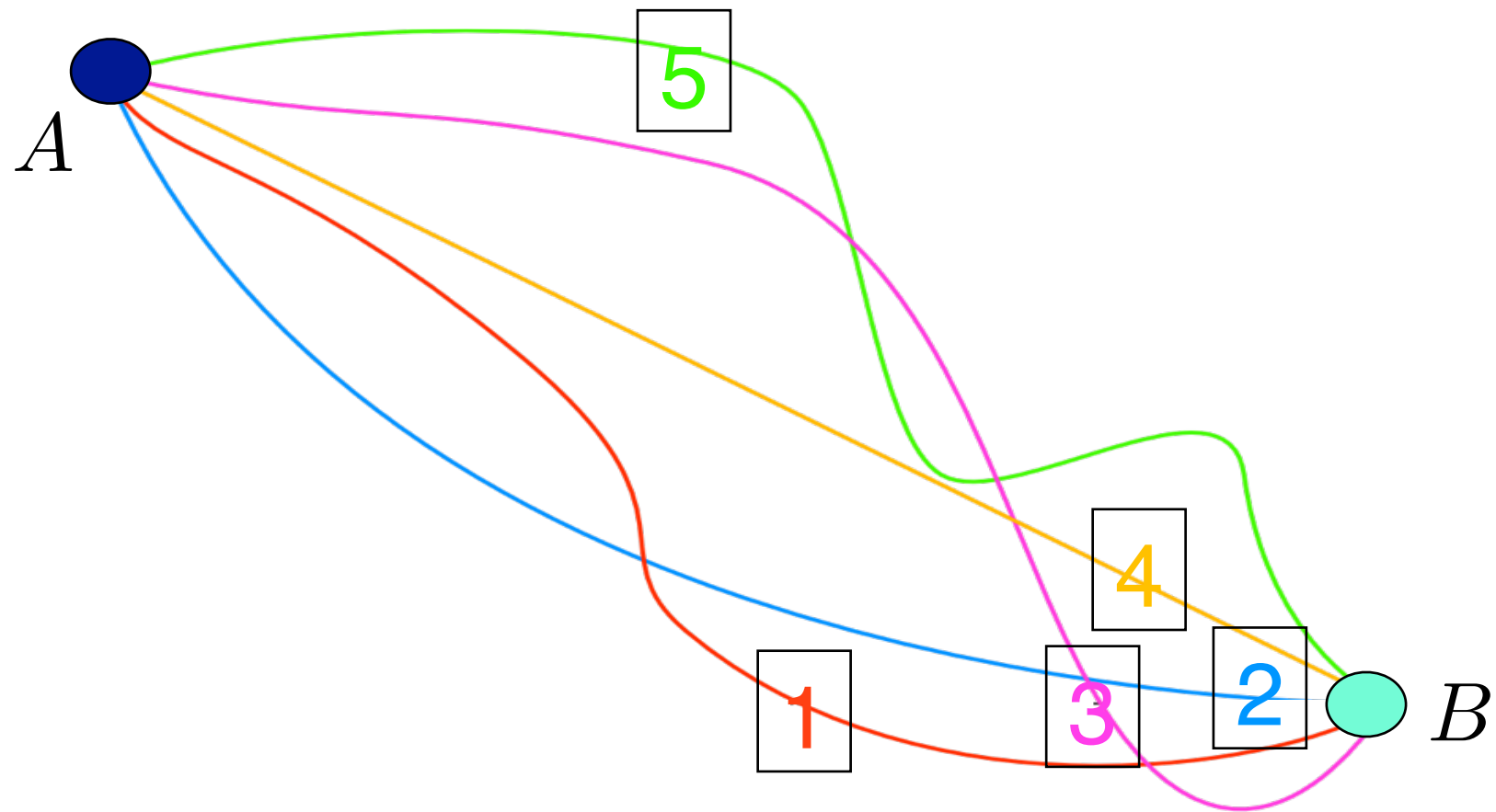


A causa della loro forma gli specchi sferici forniscono un campo visivo più ampio di quello di altri tipi di specchi. Per questo motivo sono spesso impiegati negli incroci stradali e negli specchietti retrovisori delle auto. Bisogna però ricordare che, l'immagine virtuale formata da uno specchio sferico è rimpicciolita. Quindi l'automobile riflessa nello specchio sembra più lontana di quello che è in realtà.

Un altro problema di tempo mínimo:
BRACHISTOCRONA

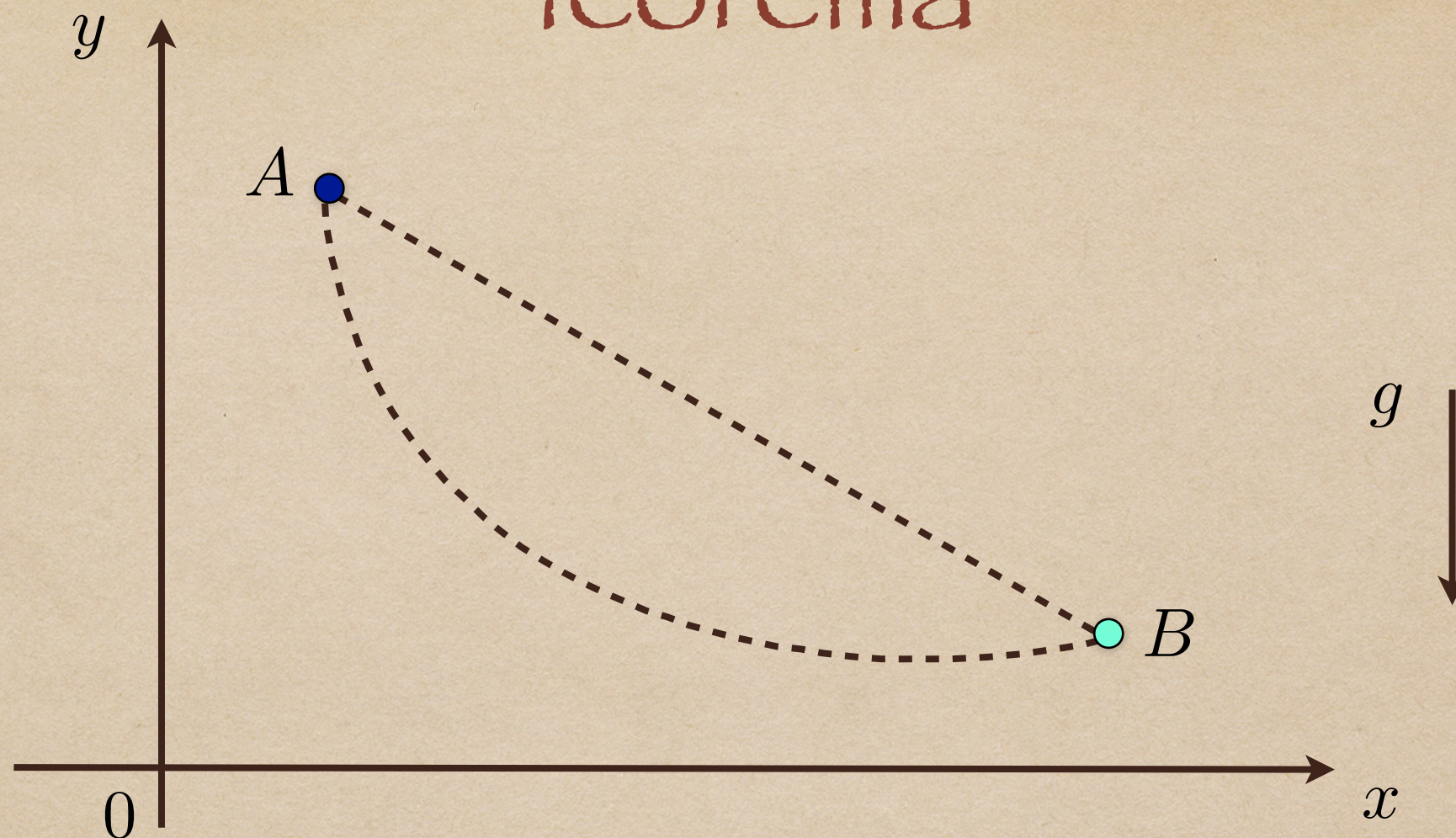
Brachístocrona dal greco βράχιστος, brachístos - il più
breve, χρόνος, chronos - tempo)

Brachistocrona



Quale percorso scegliere per arrivare prima??

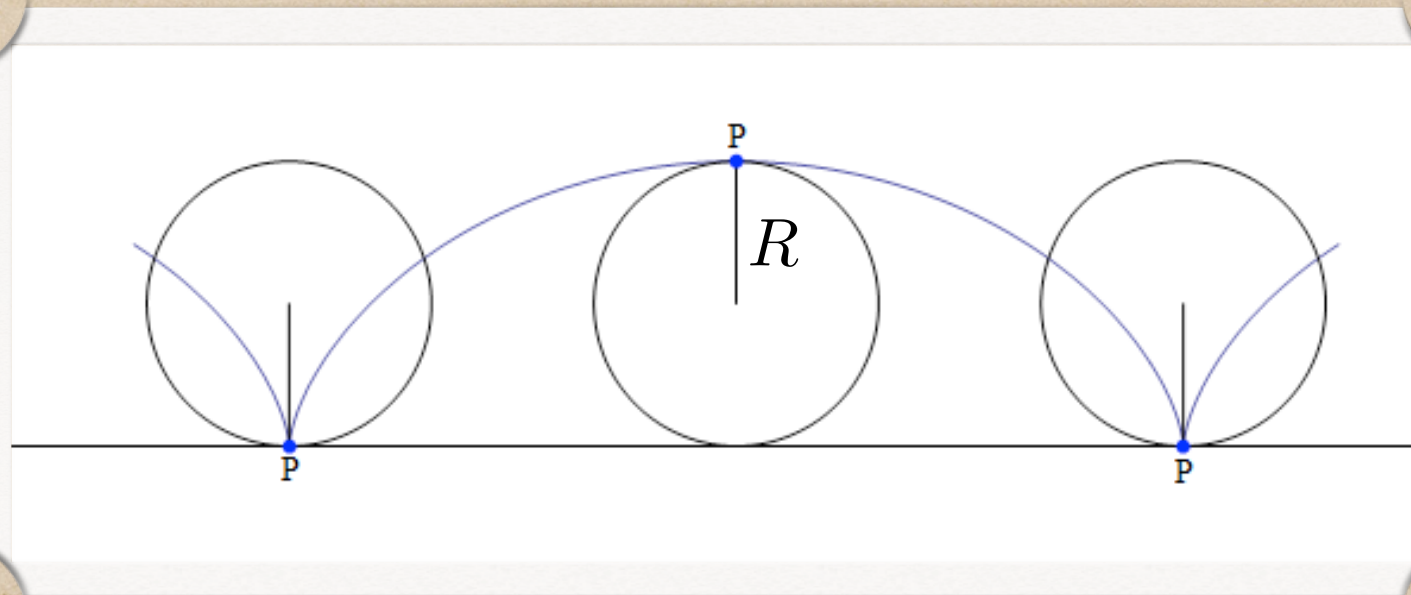
“Teorema”



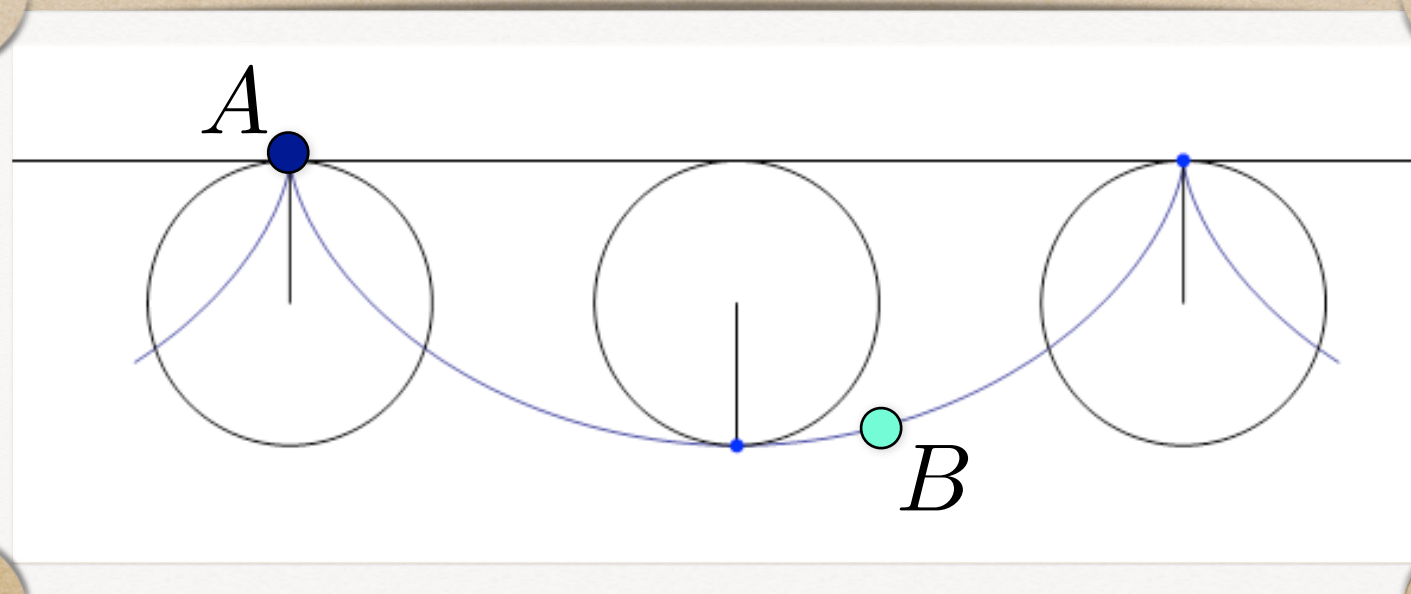
Comunque dati due punti A e B, con B posto ad una quota inferiore rispetto ad A, esiste un'unica curva congiungente A e B sulla quale un punto (pallina) sotto l'azione della forza di gravità passi da A a B nel minor tempo possibile. Tale curva è l'unico ramo di cicloide avente un vertice in A e passante per B.

Come la costruiamo?

Facciamo rotolare una ruota con una luce sul punto P



e poi ribaltiamo



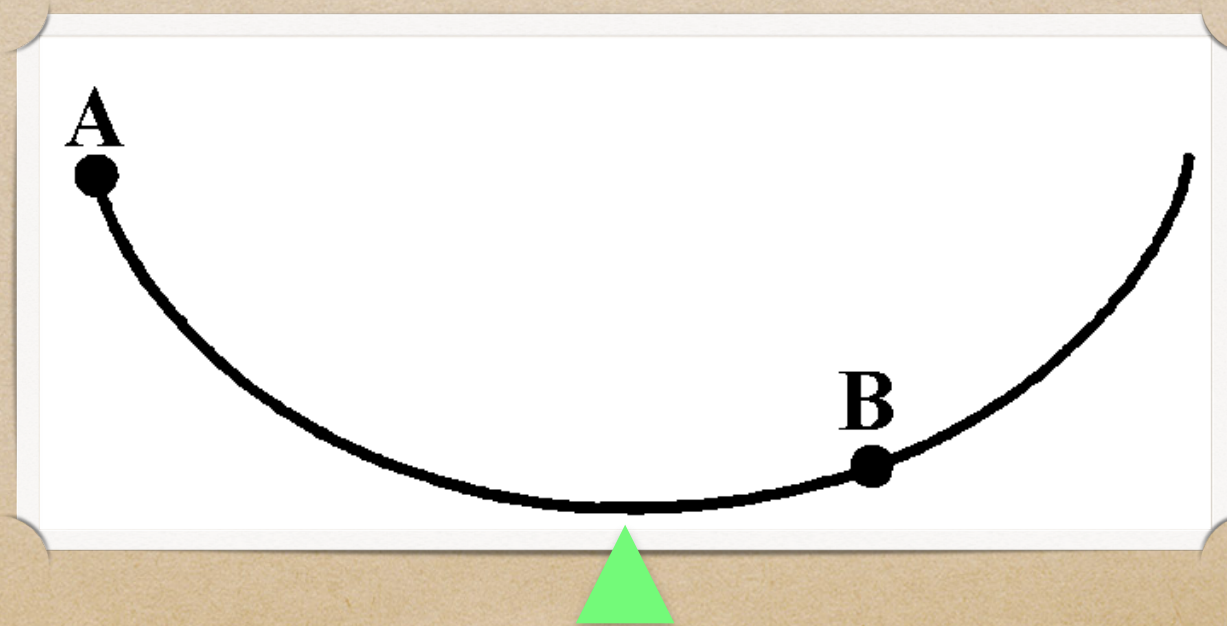






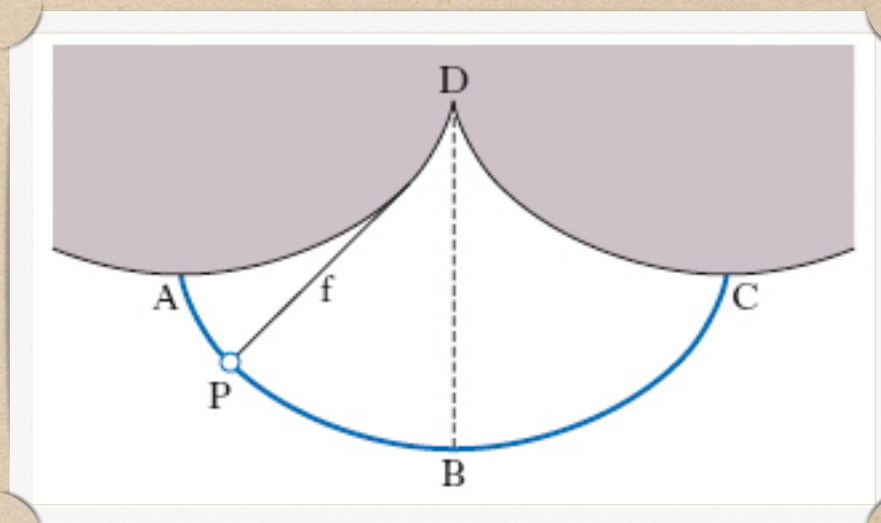
Proprietà della Cicloide

- È la curva BRACHISTOCRONA (ossia di tempo minimo)
- Lunghezza = $8 R$
- È ISOCRONA (dal greco ισόχρονος , composto da ἴσος , isos - stesso e da χρόνος , chronos - tempo)





Pendolo cicloídale

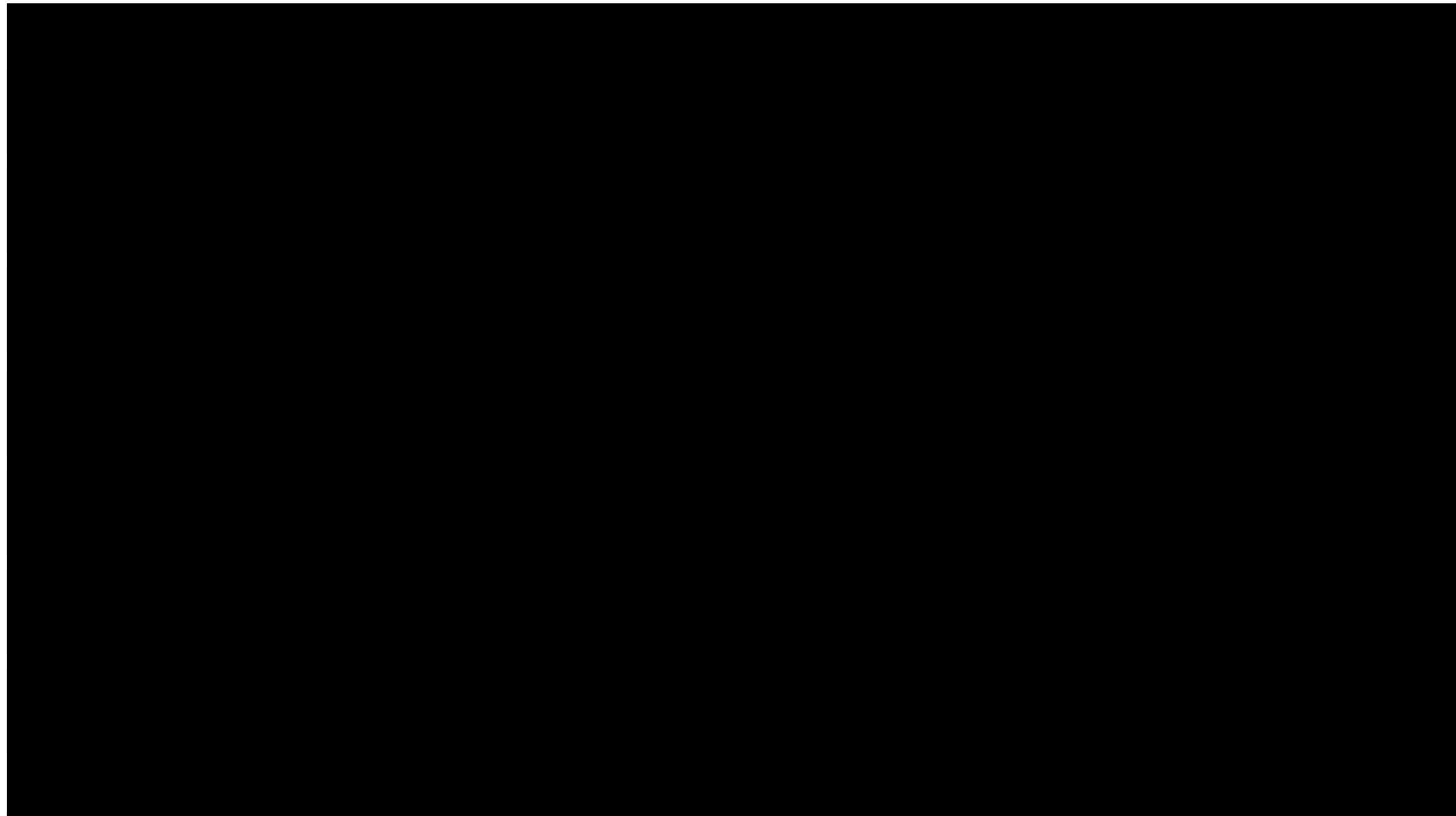


Periodo delle oscillazioni

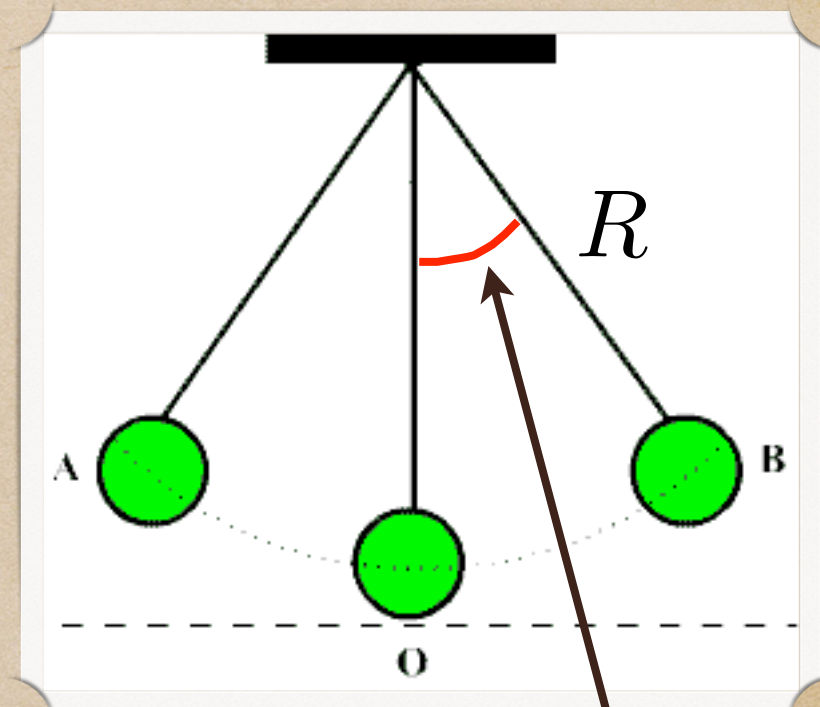
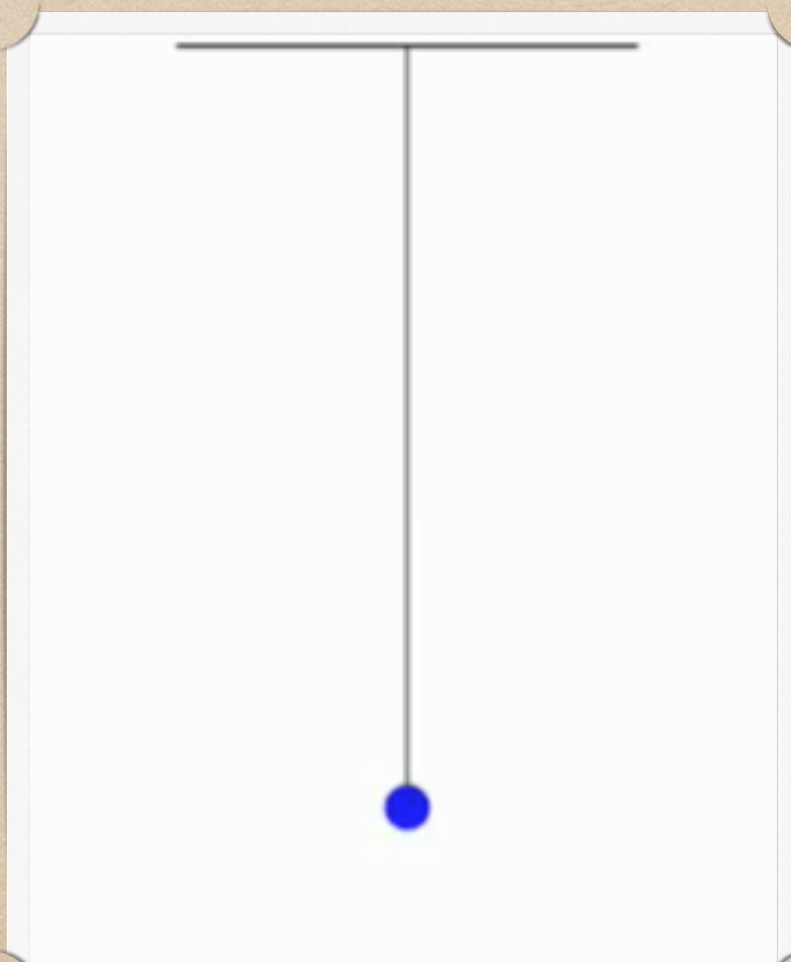
$$T = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Siate sospettosi!!

Corse automobilistiche



Pendolo semplice



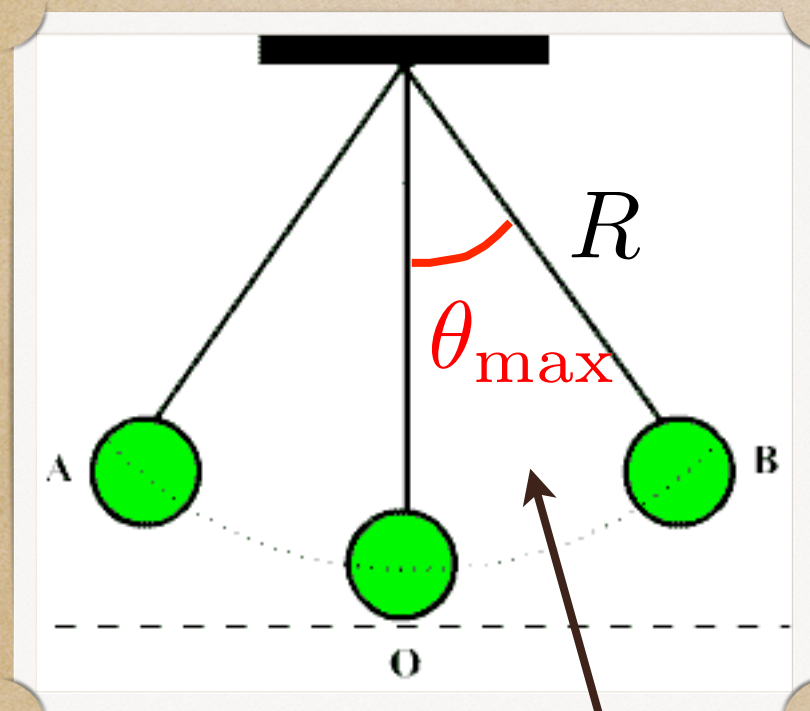
Periodo delle **piccole** oscillazioni $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} + \text{errore}$

Pendolo semplice

Il pendolo semplice non è in generale isocrono.

L'isocronia si ha soltanto se l'ampiezza delle oscillazioni è piccola.

Periodo delle **piccole** oscillazioni $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} + \text{errore}$



ampiezza massima

L'errore è trascurabile solo se l'ampiezza massima θ_{max} è piccola

Altri problemi di MINIMO
In Fisica Matematica

Funí sospese

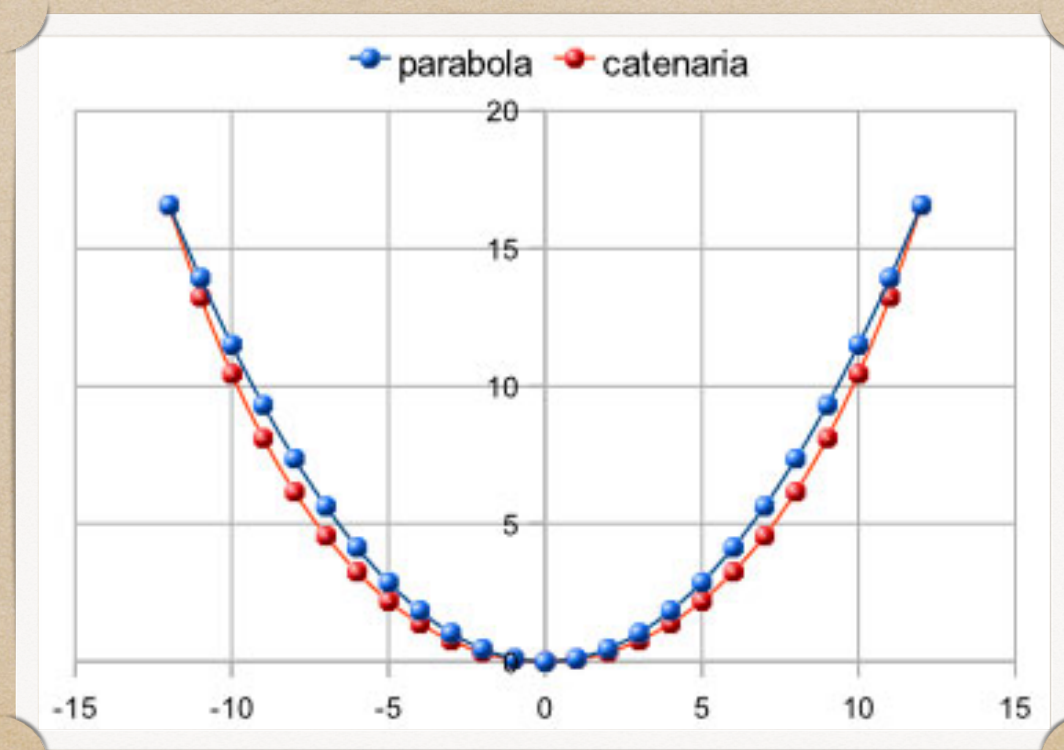
...Un altro modo per tracciare su di una parete la parabola cercata è il seguente. Piantiamo nel muro due chiodi alla stessa altezza sull'orizzonte e a una distanza l'uno dall'altro che sia doppia della larghezza del rettangolo, in cui vogliamo iscrivere la parabola. Appendiamo ai chiodi le estremità di una catena sottile, di una lunghezza tale che il suo punto più basso si trovi a una distanza dal livello dei chiodi pari alla altezza del rettangolo. La catena, appesa, prende la forma della parabola, di modo che, segnando dei punti sul muro attraverso gli anelli della catena, otteniamo la traccia di una parabola, che è tagliata in due dalla linea perpendicolare al segmento tra i due chiodi che passa nel suo punto medio.

Galileo Galilei



Funí sospese

Ma lo scienziato si sbagliava. Tra la parabola e la linea tracciata dalla catena appesa c'è una piccola differenza. Appena mezzo secolo dopo Giovanni Bernoulli, Gottfried Leibniz e Christiaan Huygens trovarono l'equazione della catenaria. Questa curva minimizza l'energia potenziale gravitazionale della fune.



Problema di Plateau

Presa una curva chiusa nello spazio, trovare la superficie con area minima tra tutte quelle che hanno come bordo la curva data. Questo problema prende il nome dal fisico belga Joseph Plateau (1801-1883) che lo studiò.

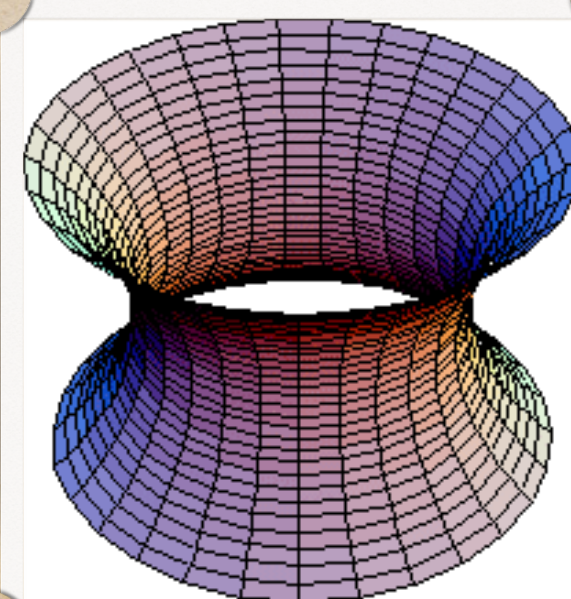
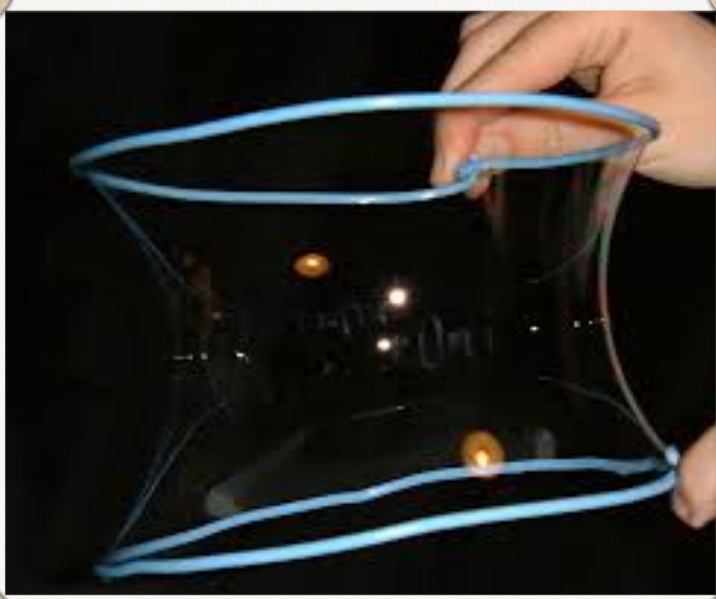
Plateau si accorse che le “lamine di sapone” che si osservavano immergendo dei contorni di fil di ferro in acqua saponata sono delle soluzioni del problema sopra formulato.

Il motivo di questo fatto è da ricercare nelle proprietà fisiche dell'acqua saponata (tensione superficiale).

Spiegazione intuitiva: Supponiamo di avere un telaio di forma, per esempio quadrata, e di tendere una tela, come quella di un quadro. La tela si disporrà su un piano, perché qualsiasi altro modo di disporla necessiterebbe di più tela. In effetti le superfici minime che si formano in corrispondenza di contorni piatti, sono tutte contenute in dei piani. È un po' più difficile immaginare che cosa si forma quando il contorno non è piatto.

Bolle di sapone

Immaginiamo di immergere due curve circolari di fil di ferro, contenute in due piani paralleli ideali a distanza fissata, in una soluzione di acqua saponata. La lamina che si forma al momento dell'estrazione si dispone secondo una configurazione di area minima che non è un cilindro come si potrebbe pensare, ma una superficie di rivoluzione che presenta una strozzatura nella zona centrale e che ha per bordo le due circonferenze.



Un'altra curiosità sulla catenaria...

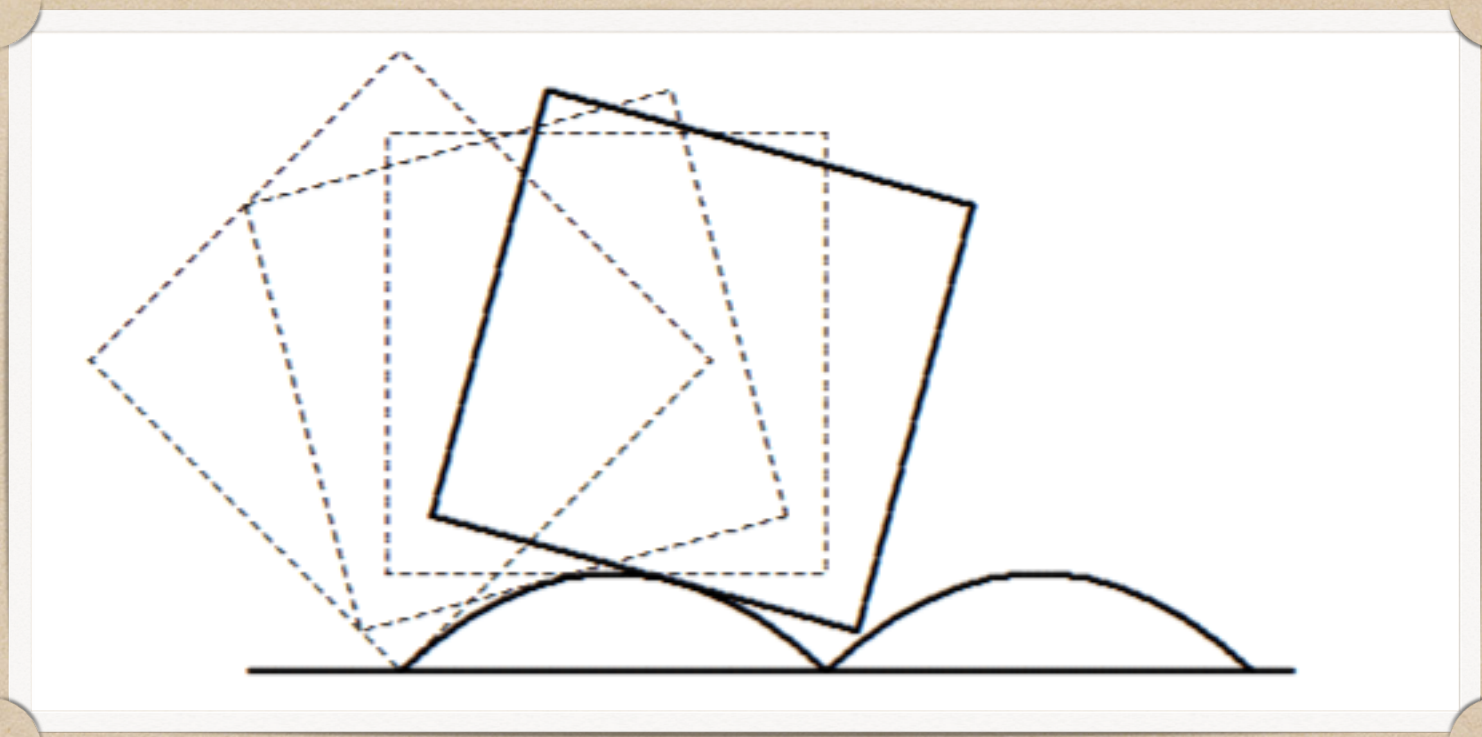
Ruote quadrate!



MoMath New York

Quale dovrebbe essere la forma della strada
per far sì che una ruota quadrata rotoli
regolarmente?





Sí può dimostrare che nel caso di ruote **poligonali**, la strada deve essere composta da opportune catenarie ribaltate collegate tra loro.

Qualche video

<https://it.etudes.ru/etudes/catenary/>

<https://www.youtube.com/watch?v=t1102X9GgTk>

Ottica

<https://www.youtube.com/watch?v=uKN3X16f-ng>

Cicloide

<http://www.etudes.ru/it/etudes/cycloid/>

https://prezi.com/iidebywle_wm/isocronismo-del-pendolo-/

<https://www.youtube.com/watch?v=h08vjuSEkS4>

<https://www.youtube.com/watch?v=85rlpv6amHY>

Catenaria e superfici minime

<http://www.etudes.ru/it/etudes/catenary/>

<https://www.sissaforschools.it/wp-content/uploads/2020/12/bolle-di-sapone.pdf>

GRAZIE
PER
L'ATTENZIONE