Seminario di Orientamento Consapevole

Martedì 25 marzo 2025

Matematica in movimento

Prof.ssa Eleonora Faggiano

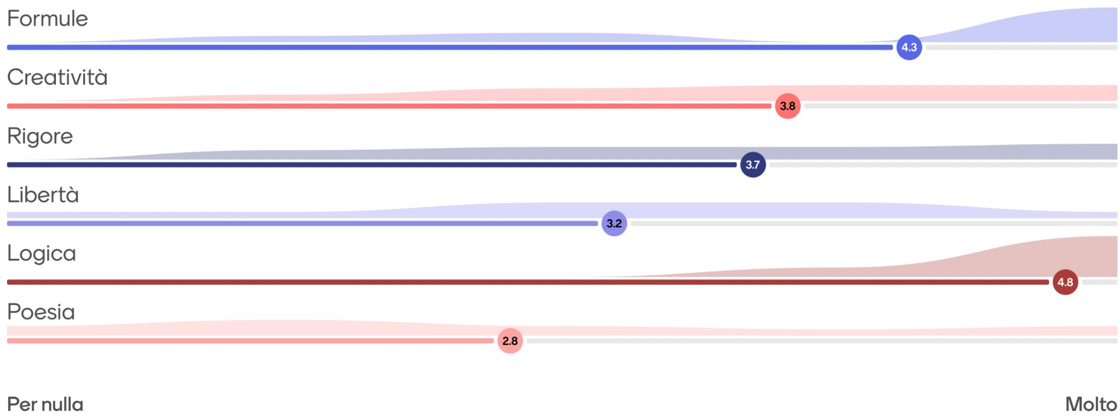
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BARI ALDO MORO

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Quali parole associate alla matematica?

Le vostre risposte

Secondo voi, quanto hanno a che fare con la matematica le parole…?



Le vostre risposte

Che cosa (non) è la matematica?

- Il 99% dei matematici moderni NON passa il suo tempo a cercare le proprietà dei numeri o elencare tutti i numeri primi o cercare tutte le cifre di π
- Se prendete un foglio a caso scritto da un matematico, solo nel 60% dei casi troverete un numero, e nel 99% di questi il numero sarà 0 o 1

  [E. Cristiani, "Chiamalo x!", Springer]
- La disciplina (ed il relativo corpo di conoscenze) che studia *problemi* che riguardano le quantità, le estensioni e figure spaziali, i movimenti di corpi, e tutte le *strutture* che permettono di trattare questi aspetti *in modo generale*

Cosa fa il matematico?

- Sviluppa le proprie conoscenze nel quadro di *sistemi ipotetico-deduttivi*:
  - a partire da *definizioni* e da *assiomi* riguardanti proprietà degli oggetti definiti, raggiunge nuove certezze (espresse dai *teoremi*), per mezzo delle *dimostrazioni*
  - *a partire da dati descrive ed interpreta modelli rappresentativi di fenomeni di varia natura*
- Per far ciò fa largo uso degli strumenti della logica e utilizza un linguaggio preciso e rigoroso

Di cosa si nutre la matematica?

Definizioni

Assiomi

Modelli

Teoremi

Congetture

Dimostrazioni

Possibili approfondimenti:

- Cercate sul dizionario della lingua italiana il significato di "definizione"
- Spiegate quali sono le caratteristiche proprie delle definizioni in matematica
- Che differenza c'è tra una definizione ed una condizione necessaria e sufficiente?
- Che cosa è e a cosa serve una dimostrazione?
- Cosa si intende per congettura?

Le congetture…

- Le congetture sono formulate sulla base di diversi tipi di evidenze, a seguito dell'esame di casi speciali, dopo aver osservato possibili modelli, alterando le ipotesi o le conclusioni di teoremi noti, e a volte semplicemente basandosi sull'intuito
- Non importa come una congettura sia nata. Una volta che è stata formulata l'obiettivo è quello di verificare se è vera o se non è vera

… le congetture

- Quando i matematici credono che una congettura sia vera cercano di dimostrarla
- Se non riescono a dimostrarla ne cercano un controesempio
- Se non riescono a trovarne un controesempio, provano a cambiare meccanismo o approccio
- Sebbene molte congetture siano state risolte abbastanza rapidamente, alcune di esse hanno resistito per centinaia di anni ad hanno dato vita a nuove parti della matematica

L'ultimo teorema di Fermat…

- *L'equazione* $x^n + y^n = z^n$ *non ha soluzioni intere* x, y *e* z, *con* $xyz \neq 0$, *qualunque sia l'intero* $n > 2$
- È noto che l'equazione $x^2 + y^2 = z^2$ ha infinite soluzioni intere note come terne pitagoriche in quanto corrispondono alle lunghezze (intere) dei lati di triangoli rettangoli

… l’ultimo teorema di Fermat

- Eulero trovò una semplice dimostrazione per il caso $n=3$, e la dimostrazione del caso $n=4$, è nota ad opera dello stesso Fermat
- Uno dei tentativi falliti nel diciannovesimo secolo ha dato vita ad una nuova branca della teoria dei numeri, detta teoria algebrica dei numeri
- Una dimostrazione corretta, di centinaia di pagine di matematica avanzata, è stata trovata negli anni novanta da Andrew Wiles (utilizzando idee a partire da una sofisticata area della teoria dei numeri detta teoria delle curve ellittiche)

La congettura di Goldbach

Di cosa si nutre la matematica?

Definizioni

Assiomi

Modelli

Teoremi

Congetture

Dimostrazioni

...ma anche intuizioni, senso estetico...

Libertà

L'essenza della matematica sta nella sua libertà
[Georg Cantor]

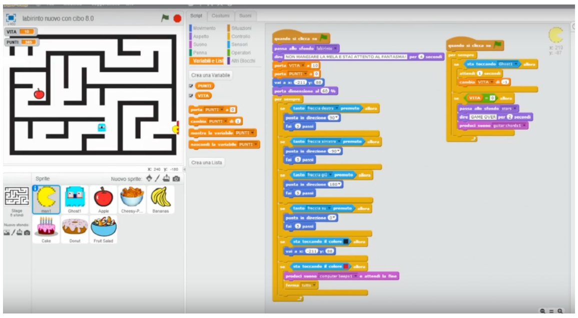
Poesia

Creatività

La poesia è un uso creativo della lingua, la fisica è un uso creativo della matematica.
La poesia come la fisica e tutte le scienze si basano su un atto di creatività.
[Giorgio Parisi]

La matematica, come la poesia...
...non è di chi la scrive ma di chi gli serve

E il movimento e il gioco?



Proviamo a metterci alla prova

... con un classico indovinello e altri giochi

Ingredienti

- Un terrorista (Simon Gruber – J. Irons)
- Un polizziotto (John McClane – B. Willis)
- Il compagno di sventura (Zues – S.L. Jackson)

Una serie di bombe da disinnescare

L’enigma dei 4 galloni

- Una fontana
- Una tanica da 5 galloni/litri
- Una tanica da 3 galloni/litri

Riempire una delle tue taniche con **esattamente** 4 galloni/litri di acqua

- Le taniche sono irregolari
- La conclusione va trovata in 5 minuti, pena l’esplosione della bomba
- È concesso un solo tentativo

Riusciranno John e Zeus a disarmare la bomba?

John e Zeus… matematici in azione/movimento

- Riempire la tanica da 5 l e travasare l'acqua in quella da 3 fino a riempirla
- Svuotare la tanica da 3 l e versare il contenuto di quella da 5 l (ora 2 l) in quella da 3
- Riempire la tanica da 5 l e versarne il contenuto in quella da 3 (contenente già 2 l) fino a riempirla
- Nella tanica da 5 l restano esattamente 4 l di acqua!

Rappresentare la soluzione…

5	0
2	3
2	0
0	2
5	2
4	3

- Riempire la tanica da 5 l e travasare l'acqua in quella da 3 fino a riempirla
- Svuotare la tanica da 3 l e versare il contenuto di quella da 5 l (ora 2 l) in quella da 3
- Riempire la tanica da 5 l e versarne il contenuto in quella da 3 (contenente già 2 l) fino a riempirla
- Nella tanica da 5 l restano esattamente 4 l di acqua!

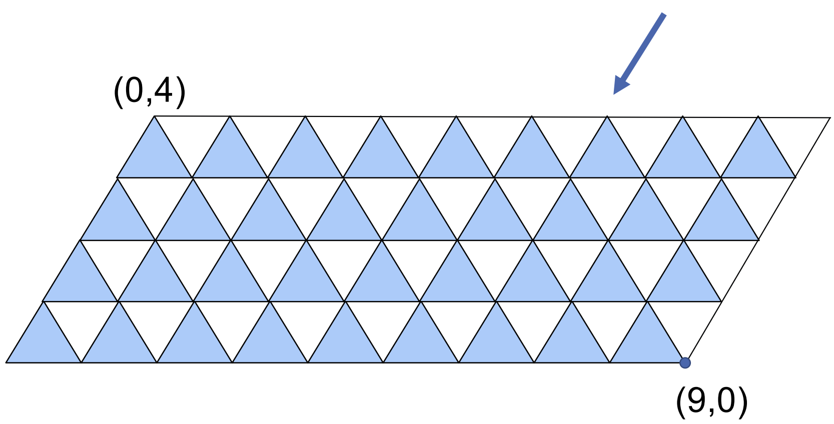
E se…
volessi 6 litri di acqua avendo a disposizione una tanica da 9 litri e una da 4 litri?

E se volessi 6 l di acqua avendo a disposizione una tanica da 9 l e una da 4 l?

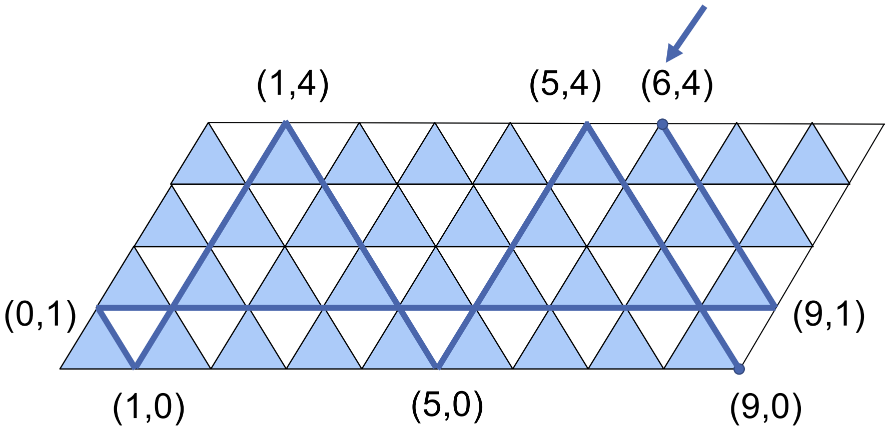
9	0
6	

Invece di riempire questa tabella proviamo a muoverci su una griglia…

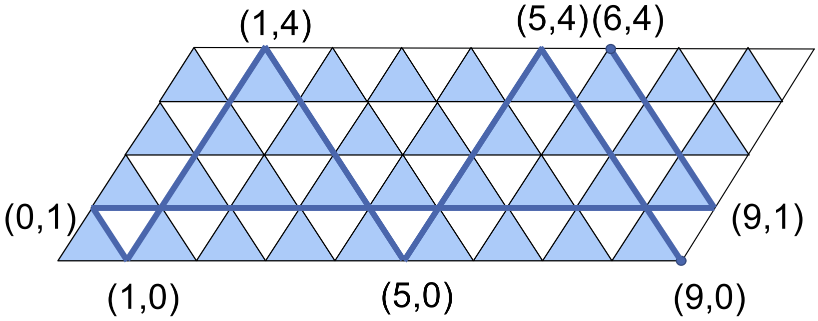
E se volessi 6 l di acqua avendo a disposizione una tanica da 9 l e una da 4 l?



E se volessi 6 l di acqua avendo a disposizione una tanica da 9 l e una da 4 l?

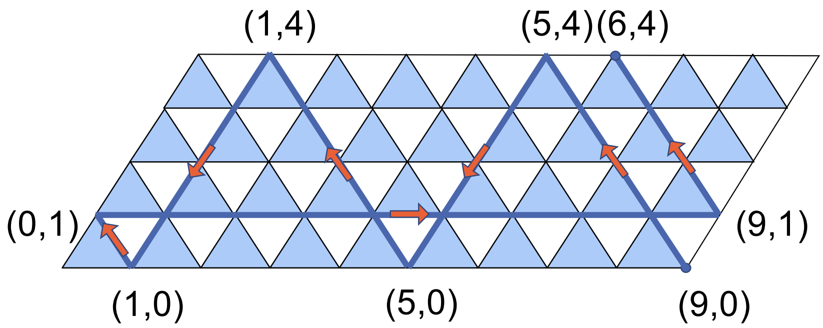


E se volessi 6 l di acqua avendo a disposizione una tanica da 9 l e una da 4 l?



9	0
5	4
5	0
1	4
1	0
0	1
9	1
6	4

Perché funziona?

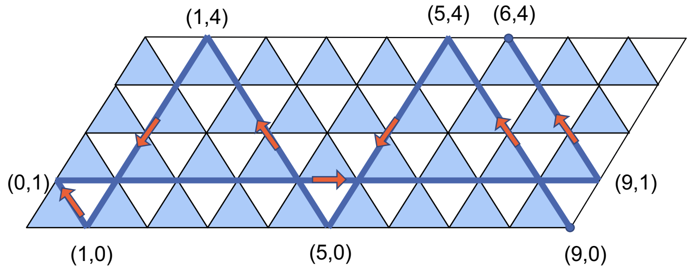


9	0
5	4
5	0
1	4
1	0
0	1
9	1
6	4

È sufficiente trovare uno o più modi per rappresentare la soluzione?

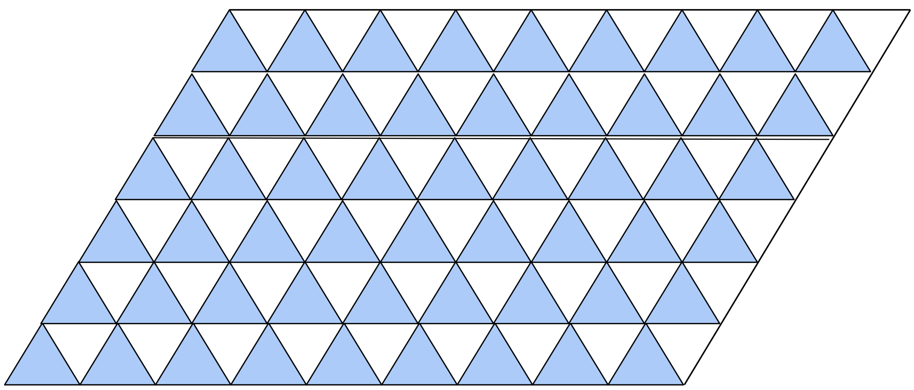
Dal perché funziona al… funziona sempre?

- Taniche da 5l e 3l per ottenere 4l
- Taniche da 9l e 4l per ottenere 6l



- E se da taniche da 9l e 4l volessi ottenere 7l?
- E se per ottenere 7l avessi a disposizione taniche da 9l e 6l?

E se per ottenere 7l avessi a disposizione taniche da 9l e 6l?



Dal perché funziona al… funziona sempre?

- Taniche da 5l e 3l per ottenere 4l
- Taniche da 9l e 4l per ottenere 6l

E perché a volte funziona e a volte no?

- MCD (5,3)=1
- MCD (9,4)=1
- MCD (9,6)=3

- E se da taniche da 9l e 4l volessi ottenere 7l?
- E se per ottenere 7l avessi a disposizione taniche da 9l e 6l?

Riassumendo: Cosa fa il matematico?

- Osserva con attenzione
- Cerca una buona rappresentazione
- Si chiede cosa cambia e cosa non cambia se…
- Cerca regolarità
- Formula congetture
- Cerca di verificarle

Per concludere con una dimostrazione

E ora passiamo ad un gioco combinatorio finito imparziale

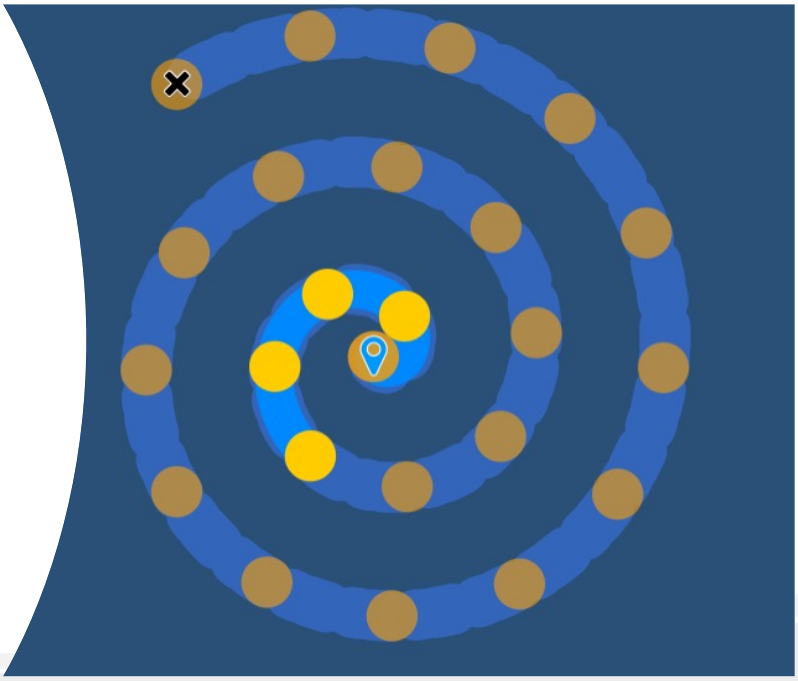
Cosa è un gioco combinatorio finito?

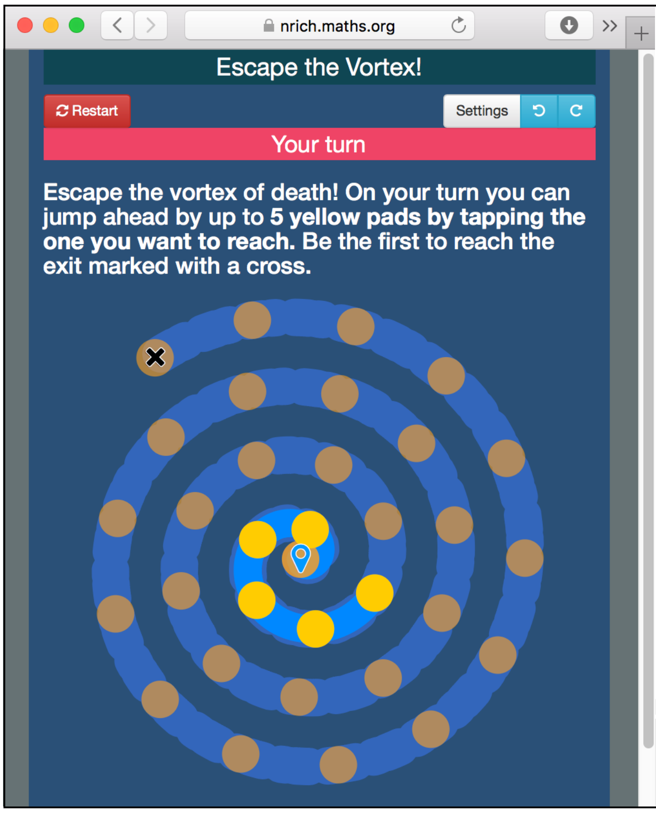
- Ci sono due giocatori (1 e 2)
- C'è un insieme finito di possibili posizioni del gioco che chiameremo stati
- Le regole del gioco specificano, per ogni stato e ogni giocatore, quali possibili stati futuri possono essere raggiunti
- La mossa di un giocatore consiste nello scegliere uno degli stati futuri legali
- I due giocatori alternano le loro mosse
- Il gioco termina quando non ci sono più mosse possibili, ovvero uno dei due giocatori raggiunge lo stato di vincita

Quando un gioco combinatorio si dice imparziale?

- I due giocatori hanno completa informazione sullo stato del gioco
- Le possibili mosse da uno stato sono le stesse per i due giocatori

E ora…
scappiamo via
dal vortice

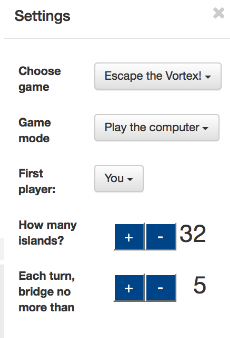


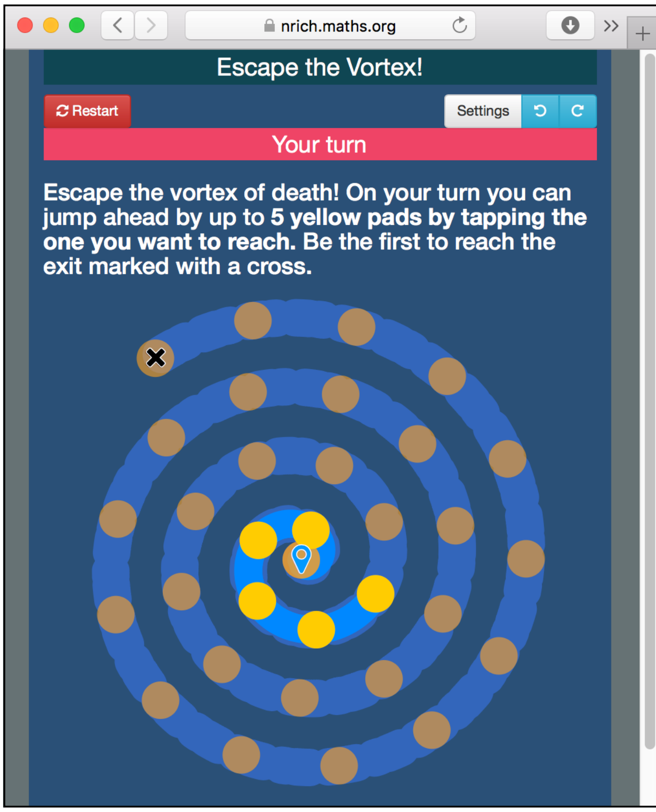


https://nrich.maths.org/gotit

Per fuggire dal vortice
al tuo turno salta in avanti di
massimo 5 caselle

Vince chi per primo raggiunge
l'uscita (X = 32)





https://nrich.maths.org/gotit

- Le caselle sono 32
- Il salto più lungo possibile è di 5 caselle, quindi vinco se raggiungo la casella

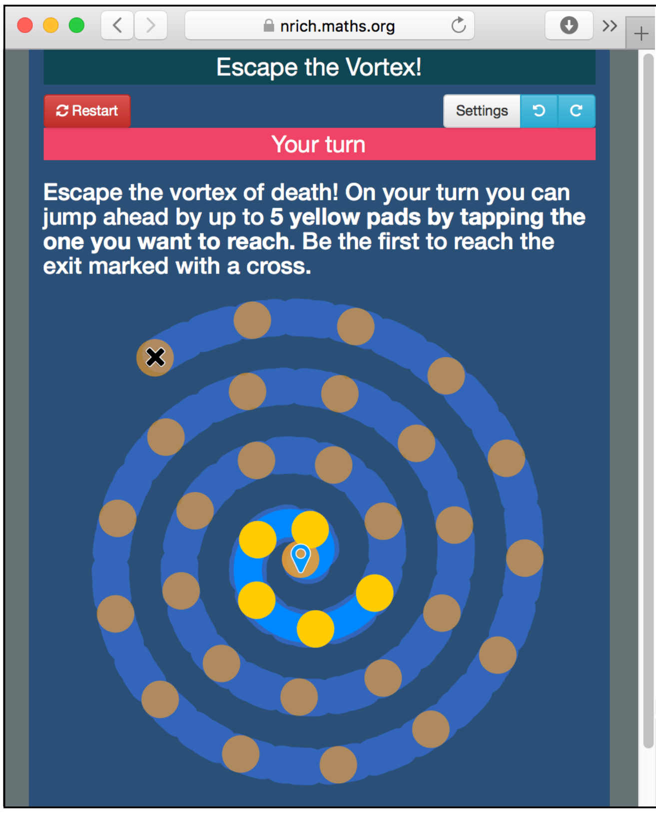
  26 (32-6)

- Le altre posizioni vincenti sono:

  20, 14, 8 e 2

- La strategia vincente per il primo giocatore è

  saltare sulla seconda casella



https://nrich.maths.org/gotit

E cosa succede se cambiamo il numero corrispondente all'obiettivo e/o quello della lunghezza del salto massimo?

Provate per esempio con obiettivo 30 e salto massimo 4

Il primo giocatore ha sempre una strategia vincente?

E per finire…

L'anno scorso a Marienbad

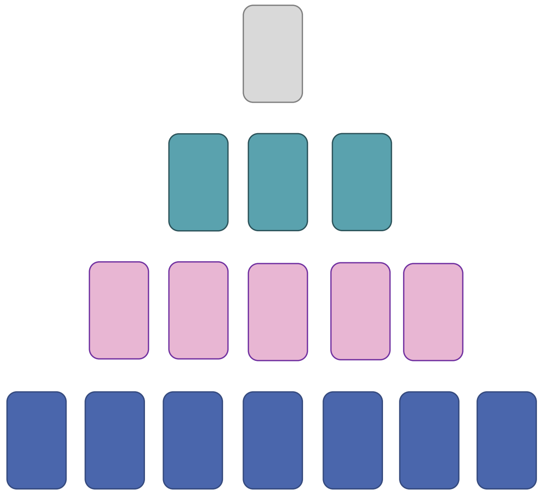
Ingredienti

- Un uomo misterioso - sfidante
- Un uomo sfidato
- Un insieme di carte/fiammiferi/gettoni

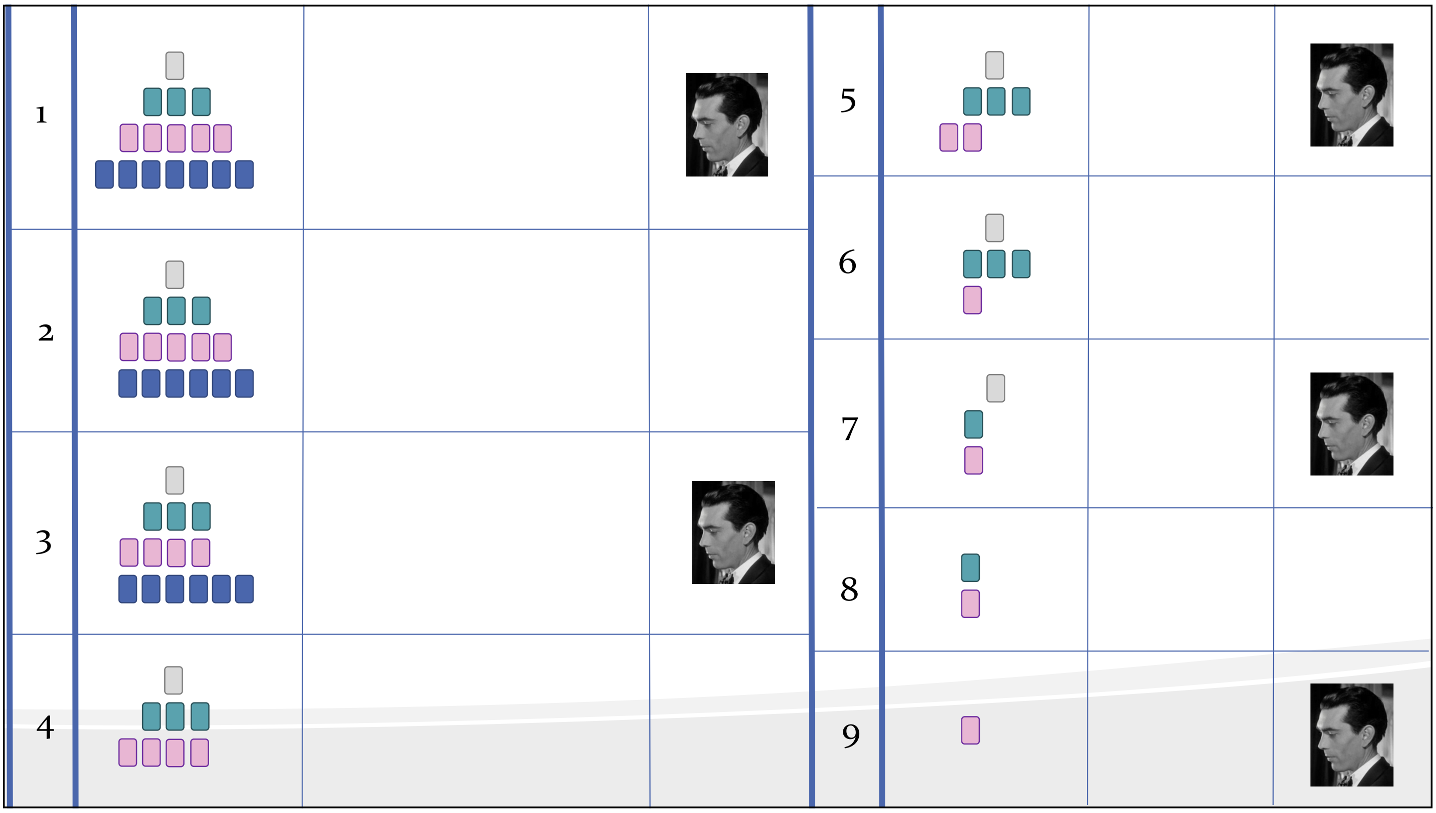
Una gioco… rompicapo

Il NIM a Marienbad

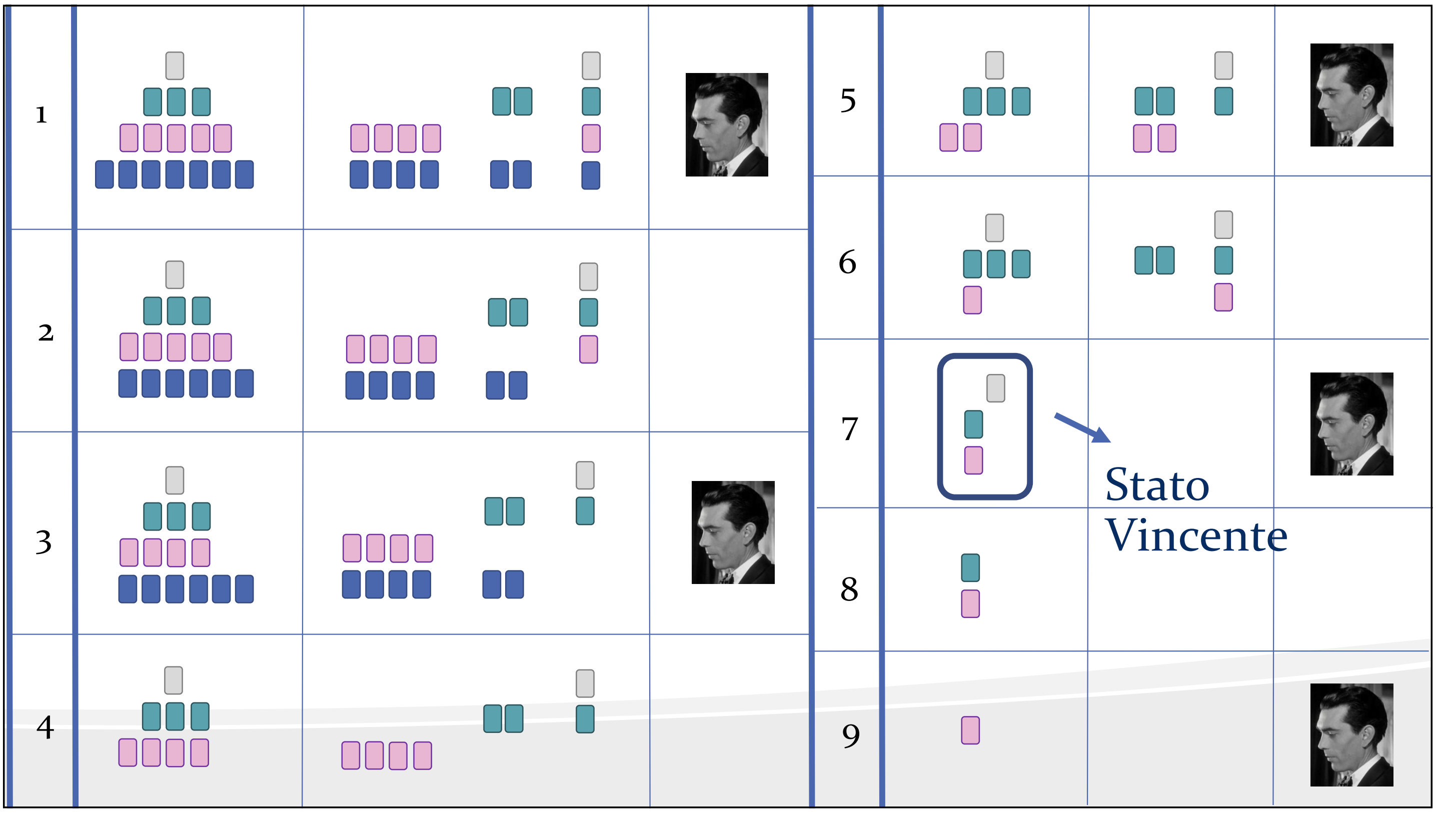
- Ad ogni turno il giocatore prende uno o più carte da una stessa riga
- Chi prende l’ultima carta perde



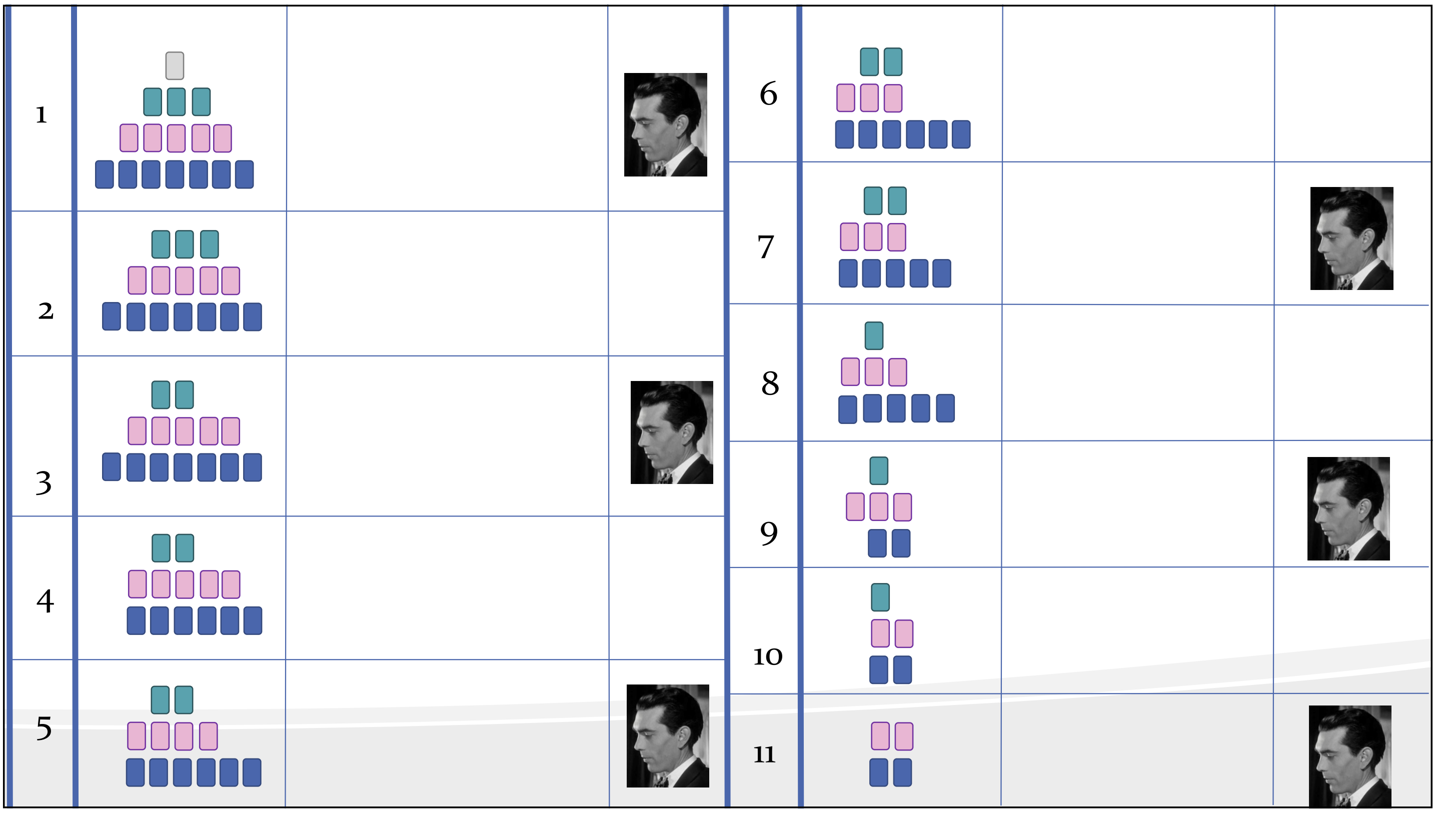
La prima partita

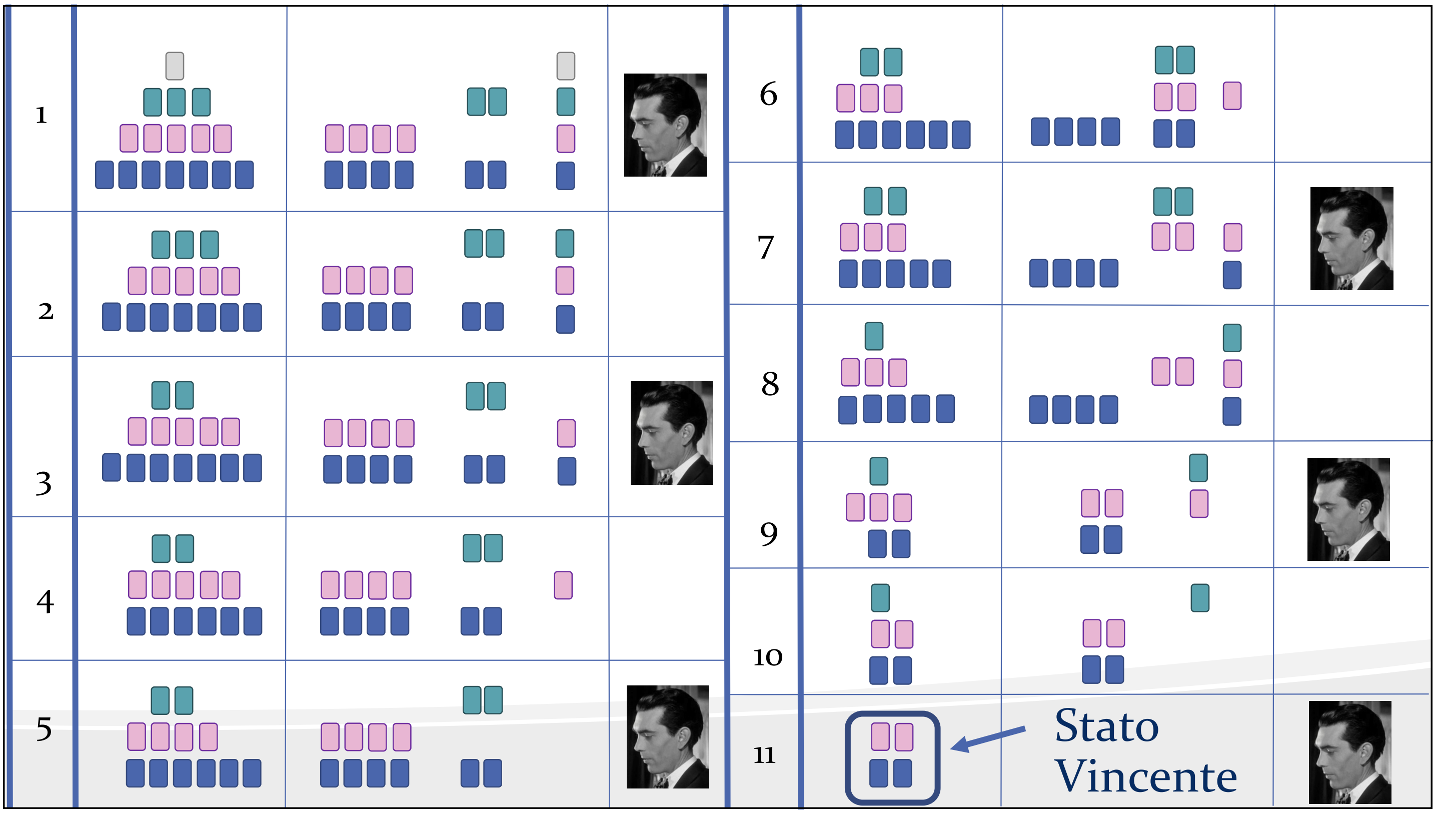


Come fa l'uomo misterioso a vincere?



La seconda partita

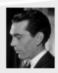

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
Stato Vincente

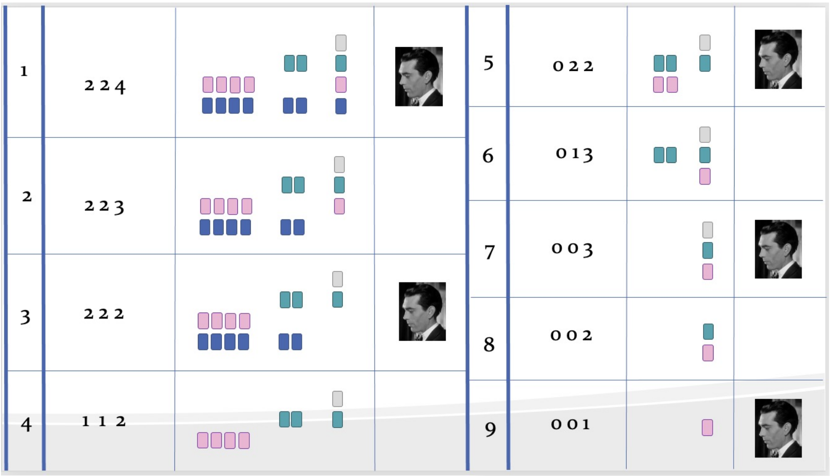
Ricapitoliamo e cerchiamo di formalizzare

La prima partita (1,3,5,7): comincia l'avversario e toglie 1 da 7

- (1,3,5,6)
- (1,3,4,6)
- (1,3,4)
- (1,3,2)
- (1,3,1)
- (1,1,1)
- (1,1)
- (1)

1		(1, 3, 5, 7)		5		(1, 3, 2)	
2		(1, 3, 5, 6)		6		(1, 3, 1)	
3		(1, 3, 4, 6)		7		(1, 1, 1)	
4		(1, 3, 4)		8		(1, 1)	
				9			

La prima partita (1,3,5,7): comincia l'avversario e toglie 1 da 7



- 223
- 222
- 112
- 22
- 13
- 3
- 2

La prima partita (1,3,5,7): comincia l'avversario e toglie 1 da 7

- (1,3,5,6)
- (1,3,4,6)
- (1,3,4)
- (1,3,2)
- (1,3,1)
- (1,1,1)
- (1,1)
- (1)

- 223
- 222
- 112
- 22
- 13
- 3
- 2

Seconda partita:

- (3,5,7)
- (2,5,7)
- (2,5,6)
- (2,4,6)
- (2,3,6)
- (2,3,5)
- (1,3,5)
- (1,3,2)
- (1,2,2)
- (2,2)

- 223
- 222
- 221
- 220
- 131
- 122
- 113
- 22
- 21
- 2

Scrivere i numeri in notazione binaria

- Le configurazioni vincenti sono quelle per le quali su ciascuna colonna compare un numero pari di 1, diremo in tal caso che la Somma-Nim è zero:

- Es. (3,4,7)

la notazione binaria di 3 è	0 1 1
la notazione binaria di 4 è	1 0 0
la notazione binaria di 7 è	1 1 1
il numero di cifre 1 per colonna è	2 2 2
la Somma-Nim della configurazione è	zero

Configurazioni vincenti (1,3,5,7)

Quattro righe
- (1,2,4,7)
- (1,3,4,6)
- (1,2,5,6)
- (1,1,2,2)
- (1,1,3,3)
- (1,1,4,4)
- (1,1,5,5)

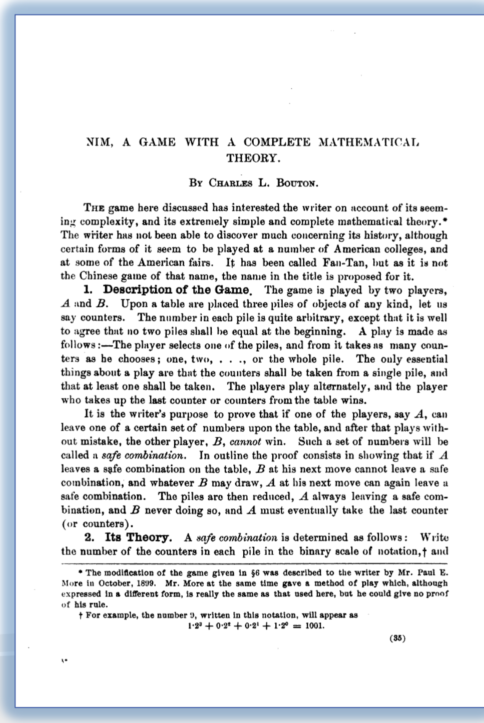
Tre righe
- (2,5,7)
- (3,4,7)
- (3,5,6)
- (2,4,6)
- (1,4,5)
- (1,2,3)
- (1,1,1)

Due righe
- (2,2)
- (3,3)
- (4,4)
- (5,5)

Un gioco con una teoria matematica completa

Charles L. Bouton, Harvard University

1902



NIM, A GAME WITH A COMPLETE MATHEMATICAL THEORY.

By Charles L. Bouton.

The game here discussed has interested the writer on account of its seeming complexity, and its extremely simple and complete mathematical theory.* The writer has not been able to discover much concerning its history, although certain forms of it seem to be played at a number of American colleges, and at some of the American fairs. It has been called Fan-Tan, but as it is not the Chinese game of that name, the name in the title is proposed for it.

1. Description of the Game. The game is played by two players, A and B. Upon a table are placed three piles of objects of any kind, let us say counters. The number in each pile is quite arbitrary, except that it is well to agree that no two piles shall be equal at the beginning. A play is made as follows:—The player selects one of the piles, and from it takes as many counters as he chooses; one, two, . . ., or the whole pile. The only essential things about a play are that the counters shall be taken from a single pile, and that at least one shall be taken. The players play alternately, and the player who takes up the last counter or counters from the table wins.

It is the writer's purpose to prove that if one of the players, say A, can leave one of a certain set of numbers upon the table, and after that plays without mistake, the other player, B, *cannot* win. Such a set of numbers will be called a *safe combination*. In outline the proof consists in showing that if A leaves a safe combination on the table, B at his next move cannot leave a safe combination, and whatever B may draw, A at his next move can again leave a safe combination. The piles are then reduced, A always leaving a safe combination, and B never doing so, and A must eventually take the last counter (or counters).

2. Its Theory. A *safe combination* is determined as follows: Write the number of the counters in each pile in the binary scale of notation,† and

* The modification of the game given in §6 was described to the writer by Mr. Paul E. More in October, 1899. Mr. More at the same time gave a method of play which, although expressed in a different form, is really the same as that used here, but he could give no proof of his rule.

† For example, the number 9, written in this notation, will appear as

$$1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 0\cdot2^1 + 1\cdot2^0 = 1001.$$