

Galois e le equazioni

Lucio Centrone

lucio.centrone@uniba.it, centrone@unicamp.br

Università degli Studi di Bari "Aldo Moro", Bari, Italy

April 4, 2025

Chi è Evariste Galois?



Chi è Evariste Galois?



Sappiamo risolvere le equazioni di secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sappiamo risolvere le equazioni di secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sappiamo risolvere le equazioni di
secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sappiamo risolvere le equazioni di
secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Sappiamo risolvere le equazioni di
secondo grado?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Risolubile via radicali!

$+\ - \times : \sqrt[n]$

Risolubile via radicali!

$$+ - \times : \sqrt[n]$$

Risolubile via radicali!

$$+ - \times : \sqrt[n]$$

Risolubile via radicali!

$\pm \sqrt[n]{\text{...}}$

Risolubile via radicali!

$+$ $-$ \times \div $\sqrt[n]{}$

Risolubile via radicali!

$+$ $-$ \times $:$ $\sqrt[n]{\cdot}$

Risolubile via radicali!

$+\color{blue}{-}\color{red}{\times}\color{yellow}{:}\sqrt[n]$

Tutte le equazioni sono risolubili
via radicali?

$$-\pi x^3 + 455x^2 - 72 = 0$$

è risolubile via radicali? E questa?

$$x^{1066} - 0.3x^{78} + 100x^{30} - 1/2 = 0$$

Tutte le equazioni sono risolubili
via radicali?

$$-\pi x^3 + 455x^2 - 72 = 0$$

è risolubile via radicali? E questa?

$$x^{1066} - 0.3x^{78} + 100x^{30} - 1/2 = 0$$

Tutte le equazioni sono risolubili
via radicali?

$$-\pi x^3 + 455x^2 - 72 = 0$$

è risolubile via radicali? E questa?

$$x^{1066} - 0.3x^{78} + 100x^{30} - 1/2 = 0$$

Tutte le equazioni sono risolubili
via radicali?

$$-\pi x^3 + 455x^2 - 72 = 0$$

è risolubile via radicali? E questa?

$$x^{1066} - 0.3x^{78} + 100x^{30} - 1/2 = 0$$

Galois e le
equazioni

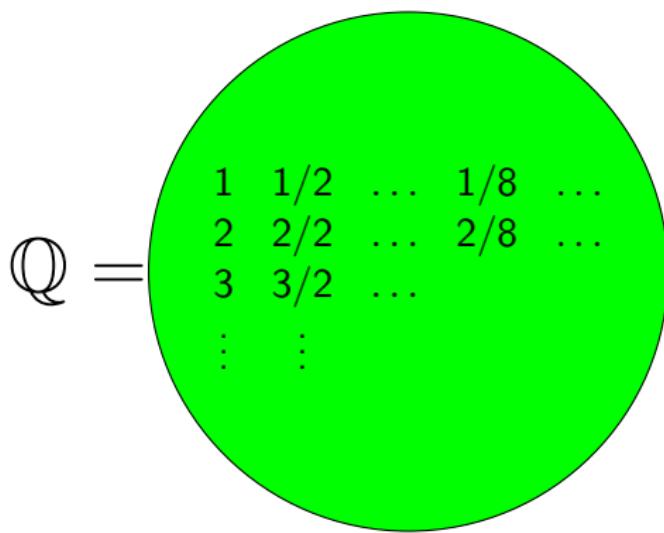
Lucio
Centrone

Teoria di Galois

Numeri Razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \begin{array}{ccccccc} 1 & 1/2 & \dots & 1/8 & \dots \\ 2 & 2/2 & \dots & 2/8 & \dots \\ 3 & 3/2 & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & & \end{array} \right.$$

Numeri Razionali



Quali sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2 = 0?$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

Ma $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ NON sono
razionali!!!

Quali sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2 = 0?$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

Ma $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ NON sono
razionali!!!

Quali sono le soluzioni dell'equazione

$$x^2 - 2 = 0?$$

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

Ma $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ NON sono
razionali!!!

Quali sono le soluzioni
dell'equazione

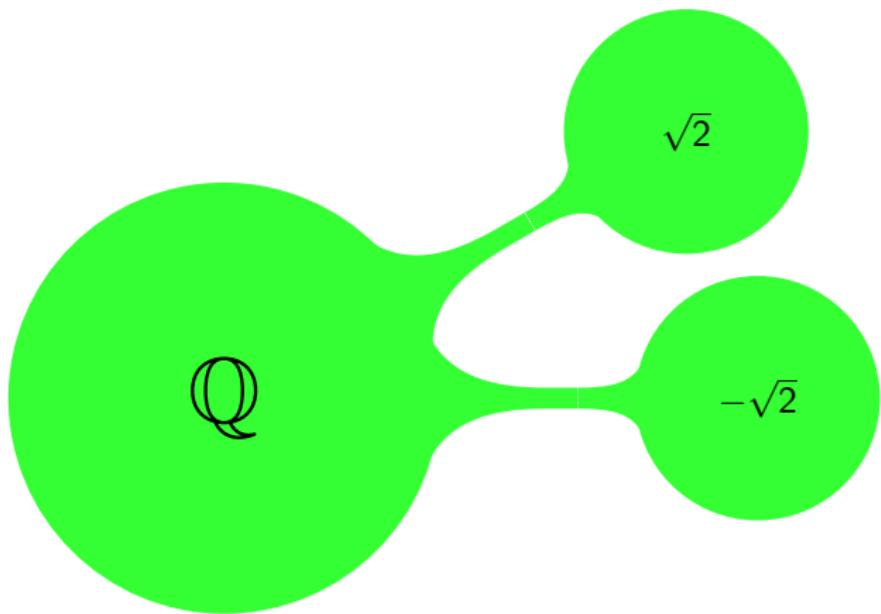
$$x^2 - 2 = 0?$$

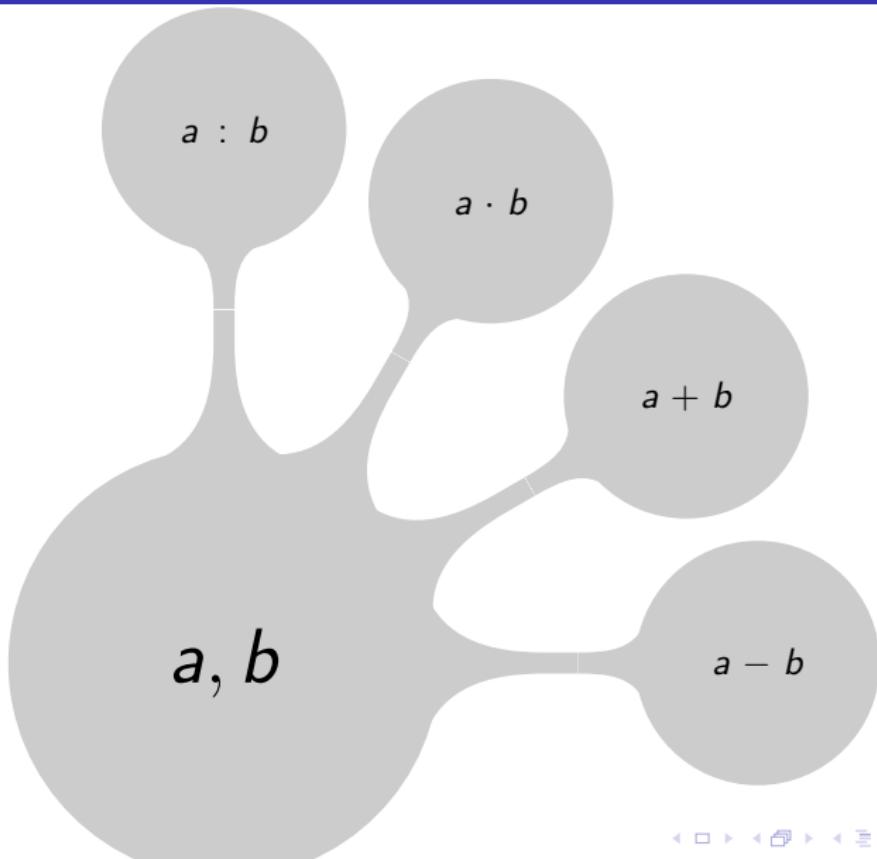
$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

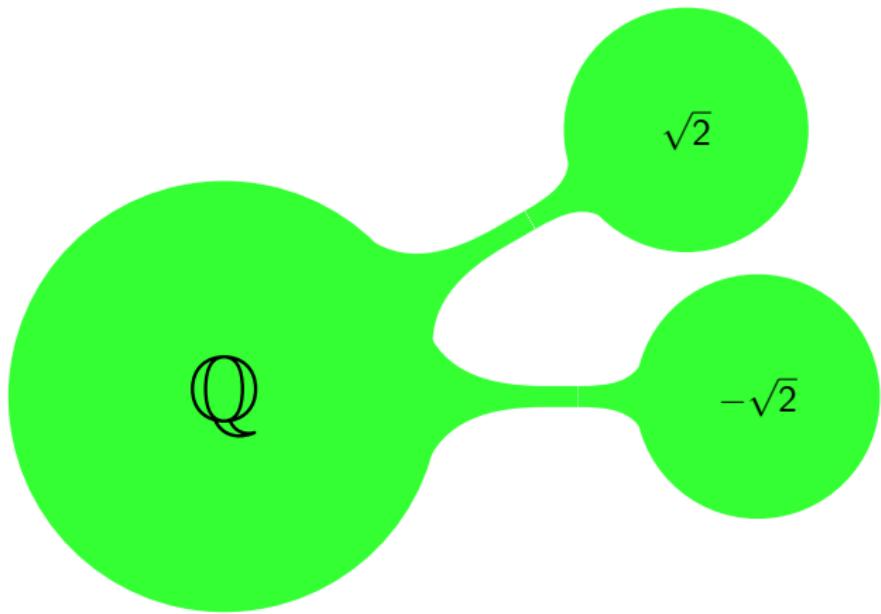
Ma $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ NON sono
razionali!!!

Che facciamo? Proviamo ad
incollare $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ a \mathbb{Q} ?

Che facciamo? Proviamo ad
incollare $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ a \mathbb{Q} ?

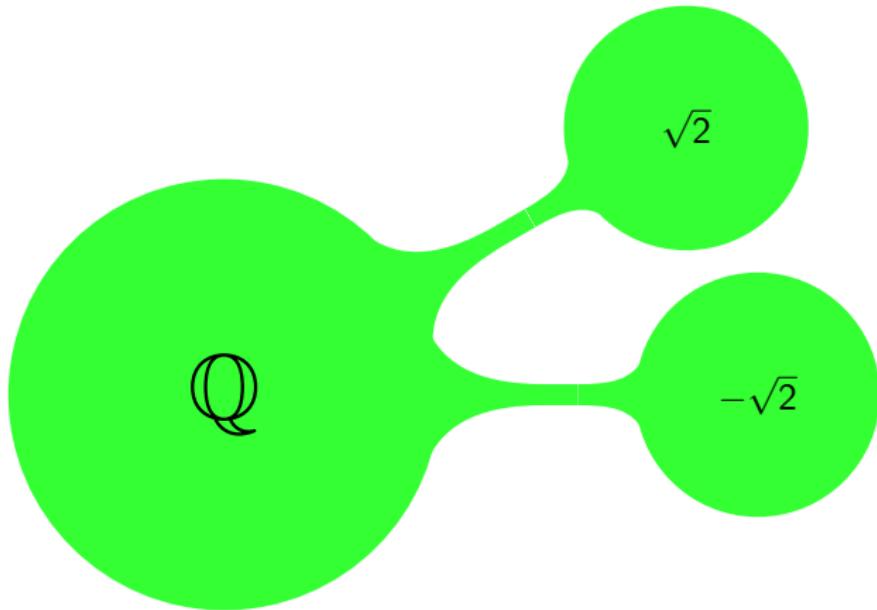






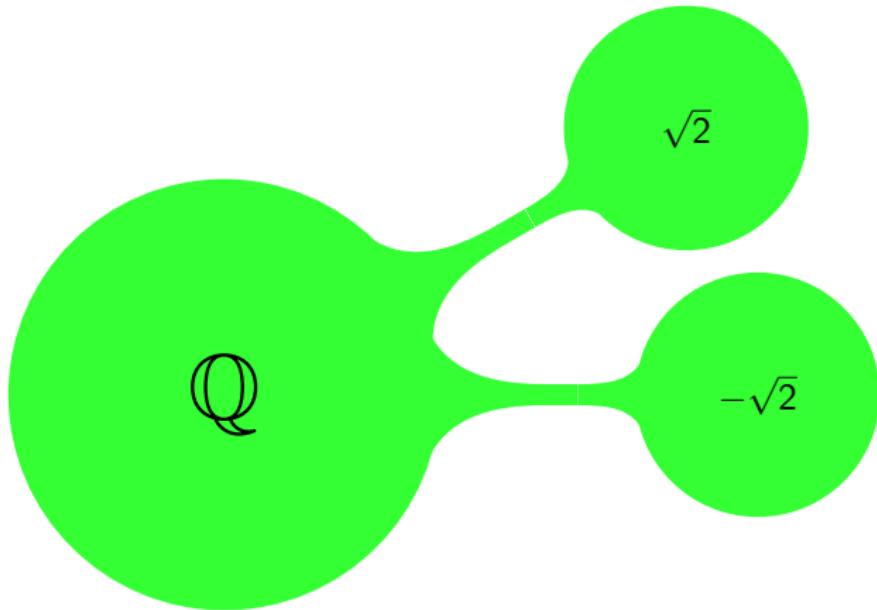
$1 - \sqrt{2}?$

$1 + \sqrt{2}?$



$1 - \sqrt{2}?$

$1 + \sqrt{2}?$



$1 - \sqrt{2}?$

$1 + \sqrt{2}?$

Siamo costretti ad inserire
tutte le combinazioni
algebriche di $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ per
ottenere:

Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})!!!$

Siamo costretti ad inserire
tutte le combinazioni
algebriche di $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ per
ottenere:

Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})!!!$

Siamo costretti ad inserire
tutte le combinazioni
algebriche di $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ per
ottenere:

Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})!!!$

Siamo costretti ad inserire
tutte le combinazioni
algebriche di $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ per
ottenere:

Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2})!!!$

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

$$\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

$$\mathbb{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \rightarrow -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \rightarrow -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \rightarrow -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \rightarrow -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \rightarrow -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Adesso facciamo così:

$$-3 + \sqrt{2} \cdot 7 \rightarrow -3 - \sqrt{2} \cdot 7$$

Questa è una *SIMMETRIA*

Diamole un nome:

φ

Questa è una *SIMMETRIA*
Diamole un nome:



Questa è una *SIMMETRIA*
Diamole un nome:

$$\varphi$$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie
delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie
delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie
delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è il GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie
delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è IL GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie
delle radici di $x^2 - 2$

L'insieme

$$\{I, \varphi\}$$

è IL GRUPPO DI GALOIS di

$$x^2 - 2$$

Cioè l'insieme di tutte le simmetrie
delle radici di $x^2 - 2$

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Gruppi di Galois: insieme di tutte le simmetrie!!!

Risolubilità via radicali

$$x^2 - 2 = 0$$

$$G = \{I, \varphi\}$$

Galois e le
equazioni

Lucio
Centrone

$$x^7 - 2 = 0$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$

$$x^7 - 2 = 0$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$

$$x^7 - 2 = 0$$

$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7$

$$x^7 - 2 = 0$$

$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7$

$$x^7 - 2 = 0$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$

$$x^7 - 2 = 0$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$

$$x^7 - 2 = 0$$

$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7$

$$x^7 - 2 = 0$$

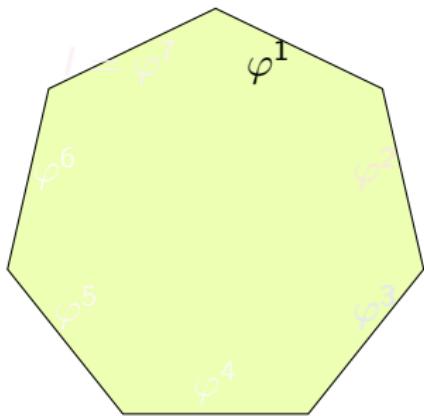
$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7$

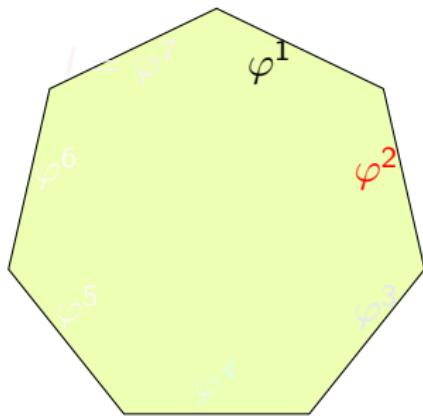
$$x^7 - 2 = 0$$

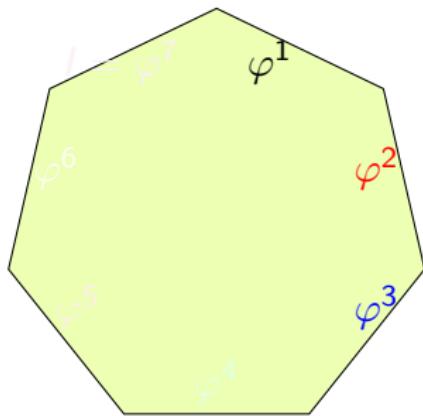
$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6, \ x_7$

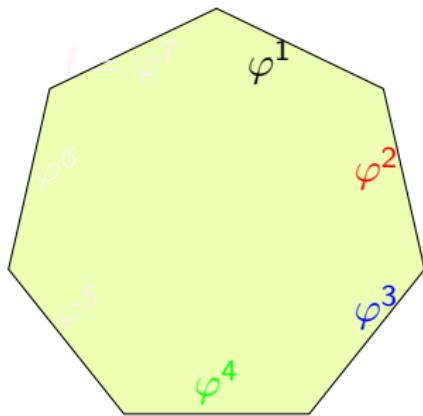
Galois e le
equazioni

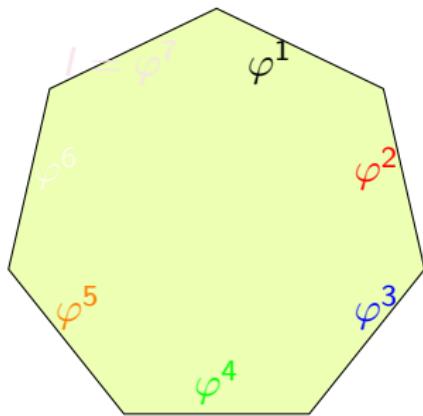
Lucio
Centrone

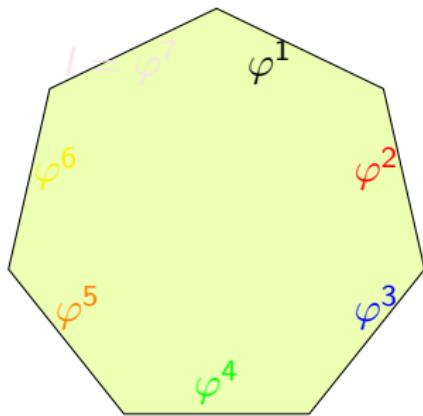


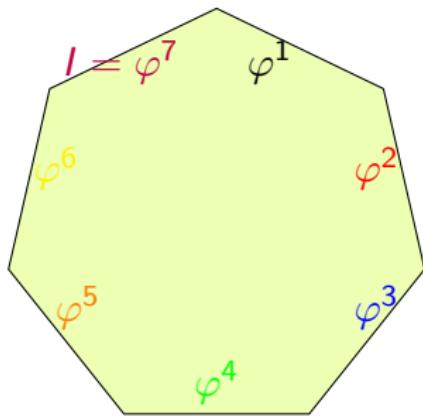












$$x^7 - 2 = 0$$



$$x = \sqrt[7]{2}$$

$$x^7 - 2 = 0$$



$$x = \sqrt[7]{2}$$

Gruppo di Galois "buono"

$$G = \{I, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6\}$$

Ciclici

Gruppo di Galois "buono"

$$G = \{I, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6\}$$

Ciclici

Gruppo di Galois "buono"

$$G = \{I, \varphi, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6\}$$

Ciclici

$$x^{12} - x^7 - x^5 + 1 = 0$$

$$(x^7 - 1)(x^5 - 1) = 0$$

Galois e le
equazioni

Lucio
Centrone

Non ciclico ma...

Abeliano!!!

Non ciclico ma...

Abeliano!!!

$$\varphi \circ \lambda = \lambda \circ \varphi$$

L'ordine non importa!

$$\varphi \circ \lambda = \lambda \circ \varphi$$

L'ordine non importa!

Galois e le
equazioni

Lucio
Centrone

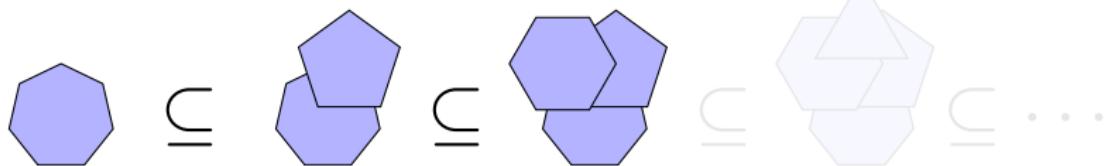
$$x^5 + x^3 + 2x^2 + 2 = 0$$



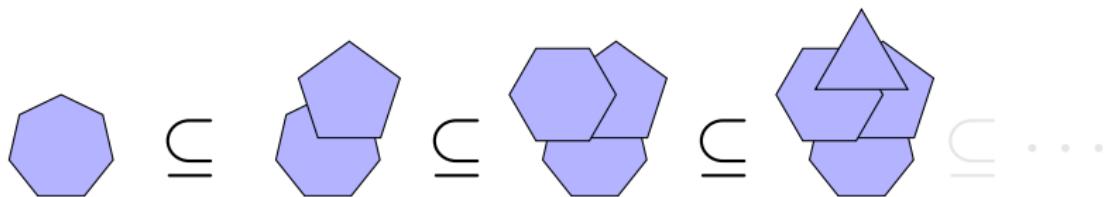
Equazione Risolubile via radicali!



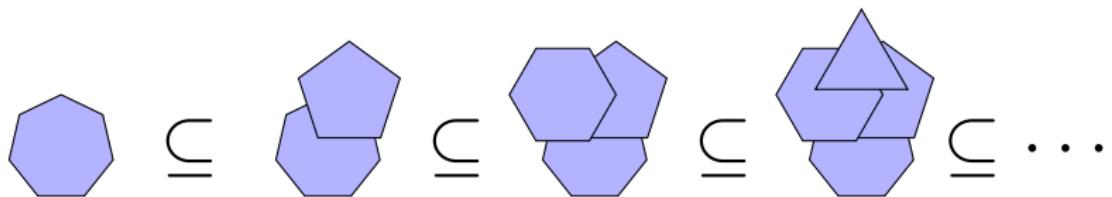
Equazione Risolubile via radicali!



Equazione Risolubile via radicali!



Equazione Risolubile via radicali!



Equazione Risolubile via radicali!

Gruppo di Galois risolubile!

Tutti i gruppi sono risolubili?

Nope!

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

x₁ x₂ x₃ x₄ x₅

G = tutte le permutazioni di 5 elementi = S_5

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$

G = tutte le permutazioni di 5 elementi = S_5

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$

G = tutte le permutazioni di 5 elementi = S_5

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

G = tutte le permutazioni di 5 elementi = S_5

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

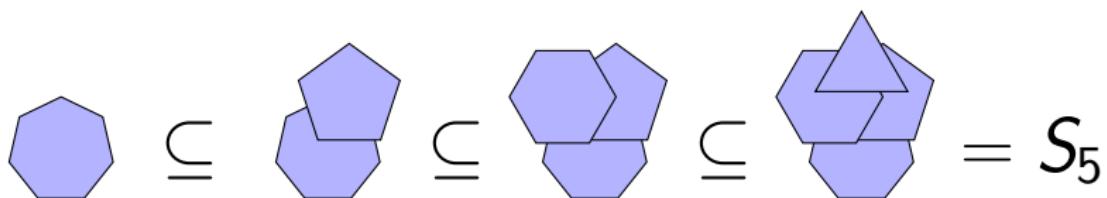
$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$

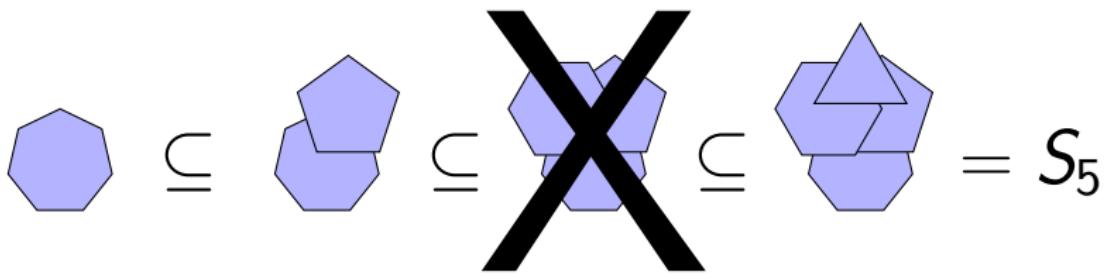
G = tutte le permutazioni di 5 elementi = S_5

$$x^5 - 2x + 1 = 0$$

$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5$

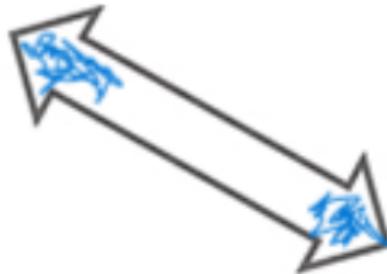
G = tutte le permutazioni di 5 elementi = S_5





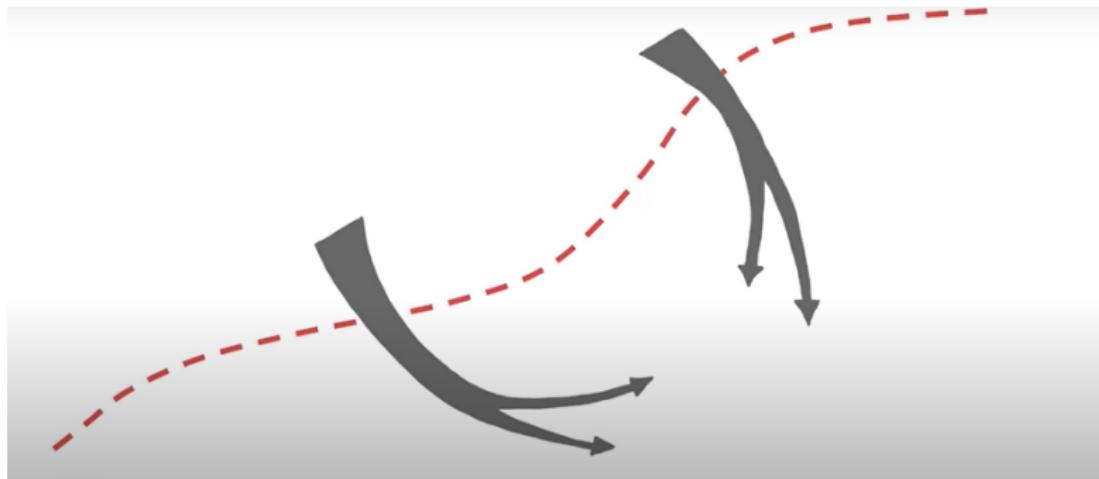
$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

Risolubile via radicali



Il gruppo di Galois G è
risolubile

Equazioni



Gruppi