La nascita del Calcolo Differenziale

Anna Maria Candela

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Bari Aldo Moro

15 marzo 2023
Orientamento Consapevole
"Le forme della Matematica: modelli, algoritmi, teoremi"
Dipartimento di Matematica

Sommario

Sommario

- Alcuni problemi

Sommario

- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz

Sommario

- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz
- Il rigore di Cauchy e Weierstrass

Sommario

- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz
- Il rigore di Cauchy e Weierstrass
- L'Analisi non Standard

Sommario

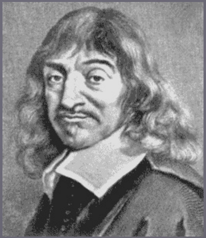
- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz
- Il rigore di Cauchy e Weierstrass
- L'Analisi non Standard
- Il calcolo integrale

Sommario

- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz
- Il rigore di Cauchy e Weierstrass
- L'Analisi non Standard
- Il calcolo integrale
- Fonti bibliografiche e sitografiche

Alcuni problemi

Alcuni problemi



René Descartes = Cartesio (1596 – 1650)

All'inizio del seicento Cartesio rivoluzionò la Matematica:

All'inizio del seicento Cartesio rivoluzionò la Matematica:
la retta e le curve geometriche come circonferenza, parabola, ellissi potevano essere rappresentate da equazioni algebriche per cui la Geometria poteva essere ridotta in buona parte a calcolo.

All'inizio del seicento Cartesio rivoluzionò la Matematica:
la retta e le curve geometriche come circonferenza, parabola, ellissi potevano essere rappresentate da equazioni algebriche per cui la Geometria poteva essere ridotta in buona parte a calcolo.
Da questa idea nasce la Geometria Analitica.

All'inizio del seicento Cartesio rivoluzionò la Matematica:
la retta e le curve geometriche come circonferenza, parabola, ellissi potevano essere rappresentate da equazioni algebriche per cui la Geometria poteva essere ridotta in buona parte a calcolo.
Da questa idea nasce la Geometria Analitica.
Il metodo algebrico si dimostrò molto potente per risolvere tanti problemi:

- l'intersezione tra due curve si riduce a un sistema di equazioni,
- l'interpolazione della curva per n punti si riduce ugualmente a un sistema di equazioni,
- ....

Il problema della tangente

Il problema della tangente

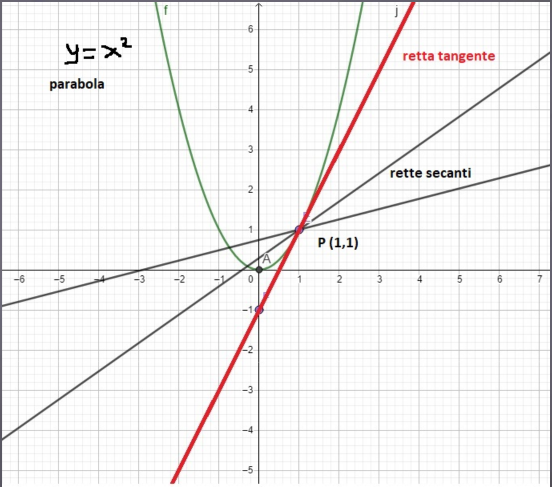


Grafico di $y = x^2$

La tangente di una parabola

La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

Data la parabola di equazione

$$\gamma : \quad y = x^2$$

una retta si dice tangente a γ se ha con essa un unico punto di intersezione.

La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

Data la parabola di equazione

$$\gamma : \quad y = x^2$$

una retta si dice tangente a γ se ha con essa un unico punto di intersezione.

In particolare, la retta tangente nel punto $P(1,1)$ è la retta del fascio per P determinata da

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - 1 = m(x-1) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - mx + m - 1 = 0,$$

La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

Data la parabola di equazione

$$\gamma : \quad y = x^2$$

una retta si dice tangente a γ se ha con essa un unico punto di intersezione.

In particolare, la retta tangente nel punto $P(1,1)$ è la retta del fascio per P determinata da

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - 1 = m(x-1) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - mx + m - 1 = 0,$$

che avrà un'unica soluzione se ha discriminante uguale a zero, cioè

$$\Delta = m^2 - 4(m-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad m = 2.$$

La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

Data la parabola di equazione

$$\gamma : \quad y = x^2$$

una retta si dice tangente a γ se ha con essa un unico punto di intersezione.

In particolare, la retta tangente nel punto $P(1,1)$ è la retta del fascio per P determinata da

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - 1 = m(x-1) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - mx + m - 1 = 0,$$

che avrà un'unica soluzione se ha discriminante uguale a zero, cioè

$$\Delta = m^2 - 4(m-1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m = 2.$$

Quindi l'equazione della retta tangente cercata è

$y = 2x - 1$ con coefficiente angolare $m_P = 2$.

E nel caso della funzione seno?

E nel caso della funzione seno?

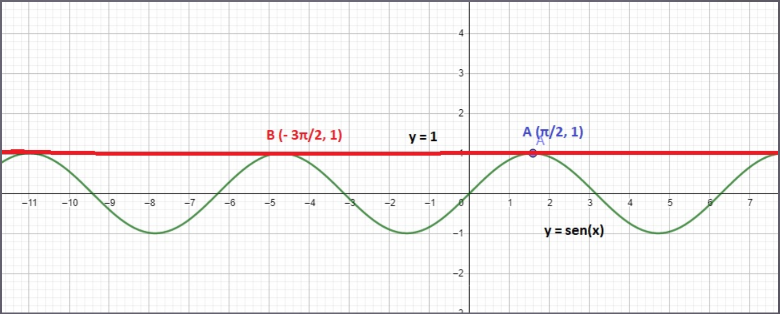


Grafico della funzione $y = \operatorname{sen} x$

Altro approccio

Altro approccio

La retta tangente alla parabola

$$\gamma : \quad y = x^2$$

nel punto $P(1,1)$ è la "retta limite" delle rette per P secanti la parabola.

Altro approccio

La retta tangente alla parabola

$$\gamma : \quad y = x^2$$

nel punto $P(1,1)$ è la "retta limite" delle rette per P secanti la parabola.
Se $Q(x, x^2)$, $x \neq 1$, è un secondo punto di γ, la retta per P e Q è la retta del fascio

$$y - 1 = m(x - 1)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Altro approccio

La retta tangente alla parabola

$$\gamma : \quad y = x^2$$

nel punto $P(1,1)$ è la "retta limite" delle rette per P secanti la parabola.
Se $Q(x, x^2)$, $x \neq 1$, è un secondo punto di γ, la retta per P e Q è la retta del fascio

$$y - 1 = m(x - 1)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Si presume che Q tende a P $\implies$ m_Q tende a $m_P = 2$,

Altro approccio

La retta tangente alla parabola

$$\gamma : \quad y = x^2$$

nel punto $P(1,1)$ è la "retta limite" delle rette per P secanti la parabola.
Se $Q(x, x^2)$, $x \neq 1$, è un secondo punto di γ, la retta per P e Q è la retta del fascio

$$y - 1 = m(x - 1)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Si presume che Q tende a P $\Longrightarrow$ m_Q tende a $m_P = 2$,
cioè

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \to 2 \qquad \text{se } x \to 1.$$

Più in generale

Più in Generale

Più in generale, data la funzione

$$y = f(x), \quad x \in]a, b[,$$

e fissato il punto $P(x_0, f(x_0))$ appartenente al grafico della funzione,

Più in generale

Più in generale, data la funzione

$$y = f(x), \quad x \in]a, b[,$$

e fissato il punto $P(x_0, f(x_0))$ appartenente al grafico della funzione,
se esiste, si ha che la retta tangente in P al grafico della funzione, con coefficiente m_P, è la "retta limite" delle rette per P che intersecano il grafico in un altro punto $Q(x, f(x))$, $x \neq x_0$,

Più in generale

Più in generale, data la funzione

$$y = f(x), \quad x \in]a, b[,$$

e fissato il punto $P(x_0, f(x_0))$ appartenente al grafico della funzione,
se esiste, si ha che la retta tangente in P al grafico della funzione, con coefficiente m_P, è la "retta limite" delle rette per P che intersecano il grafico in un altro punto $Q(x, f(x))$, $x \neq x_0$,
dove la retta per P e Q è la retta del fascio

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Più in generale

Più in generale, data la funzione

$$y = f(x), \quad x \in]a, b[,$$

e fissato il punto $P(x_0, f(x_0))$ appartenente al grafico della funzione,
se esiste, si ha che la retta tangente in P al grafico della funzione, con coefficiente m_P, è la "retta limite" delle rette per P che intersecano il grafico in un altro punto $Q(x, f(x))$, $x \neq x_0$,
dove la retta per P e Q è la retta del fascio

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si presume che Q tende a $P \implies m_Q$ tende a m_P, cioè

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to m_P \qquad \text{se } x \to x_0.$$

La velocità istantanea

La velocità istantanea

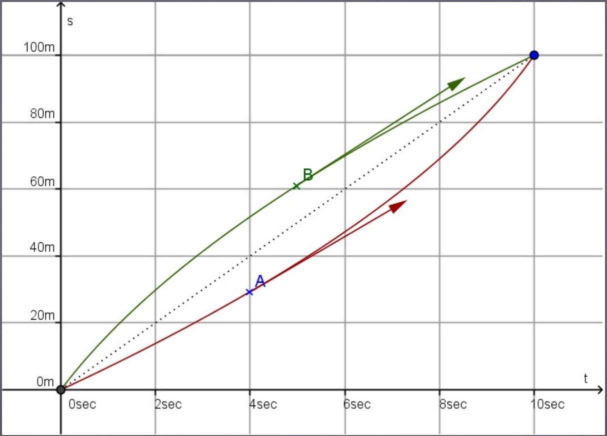


Grafico tempo-spazio

La velocità istantanea

La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10 m/sec \text{ (metri al secondo).}$$

La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10m/sec \text{ (metri al secondo).}$$

Per definizione la velocità media di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo:

La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10m/sec \text{ (metri al secondo).}$$

Per definizione la velocità media di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove $\Delta s = s(t) - s(t_0)$= spazio percorso,
$\Delta t = t - t_0$ = tempo impiegato a percorrerlo.

La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10m/sec \text{ (metri al secondo).}$$

Per definizione la velocità media di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove $\Delta s = s(t) - s(t_0)$= spazio percorso,
$\Delta t = t - t_0$ = tempo impiegato a percorrerlo.
In quei dieci secondi però l'atleta non ha corso sempre alla stessa velocità.

La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10 m/sec \text{ (metri al secondo).}$$

Per definizione la velocità media di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove $\Delta s = s(t) - s(t_0)$= spazio percorso,
$\Delta t = t - t_0$ = tempo impiegato a percorrerlo.
In quei dieci secondi però l'atleta non ha corso sempre alla stessa velocità.
Si può calcolare la velocità istantanea come

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \to v_i \qquad \text{se } t \to t_0.$$

"Retta tangente" vs "velocità istantanea"

"Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in x_0 alla funzione $y = f(x)$:

"Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in x_0 alla funzione $y = f(x)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to m_P \qquad \text{se } x \to x_0.$$

"Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in x_0 alla funzione $y = f(x)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow m_P \qquad \text{se } x \rightarrow x_0.$$

vs

"Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in x_0 alla funzione $y = f(x)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to m_P \qquad \text{se } x \to x_0.$$

vs

Velocità istantanea lungo il percorso $s(t)$ all'istante t_0:

"Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in x_0 alla funzione $y = f(x)$:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to m_P \qquad \text{se } x \to x_0.$$

vs

Velocità istantanea lungo il percorso $s(t)$ all'istante t_0:

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \to v_i \qquad \text{se } t \to t_0.$$

Le origini

Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

- i ragionamenti di Zenone di Elea (489 a.C. - 431 a.C.)
- le dimostrazioni di Eudosso di Cnido (408 a.C. - 355 a.C.)

Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

- i ragionamenti di Zenone di Elea (489 a.C. - 431 a.C.)
- le dimostrazioni di Eudosso di Cnido (408 a.C. - 355 a.C.)
- i calcoli di Archimede di Siracusa (287 a.C. circa - 212 a.C.)

Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

- i ragionamenti di Zenone di Elea (489 a.C. - 431 a.C.)
- le dimostrazioni di Eudosso di Cnido (408 a.C. - 355 a.C.)
- i calcoli di Archimede di Siracusa (287 a.C. circa - 212 a.C.)
- ...

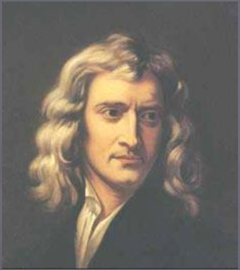
Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

- i ragionamenti di Zenone di Elea (489 a.C. - 431 a.C.)
- le dimostrazioni di Eudosso di Cnido (408 a.C. - 355 a.C.)
- i calcoli di Archimede di Siracusa (287 a.C. circa - 212 a.C.)
- ...
- i lavori di Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), Galileo Galilei (1564 - 1642), Evangelista Torricelli (1608 - 1647), Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 - 1665) che creano le condizioni perché si possa costruire in modo organico il Calcolo sublime

La disputa tra Newton e Leibniz

La disputa tra Newton e Leibniz



Isaac Newton
(1642 - 1727)

VS

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646 - 1716)

Isaac Newton

Isaac Newton

Newton considera le quantità matematiche come descritte da un moto continuo.

Isaac Newton

Newton considera le quantità matematiche come descritte da un moto continuo.
Chiama fluenti queste quantità che sono considerate variabili per gradi e sono indicate, per esempio, con le lettere x, y, z.

Isaac Newton

Newton considera le quantità matematiche come descritte da un moto continuo.
Chiama fluenti queste quantità che sono considerate variabili per gradi e sono indicate, per esempio, con le lettere x, y, z.
Le velocità con le quali le fluenti variano sono dette flussione e sono denotate con $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Isaac Newton

Newton considera le quantità matematiche come descritte da un moto continuo.
Chiama fluenti queste quantità che sono considerate variabili per gradi e sono indicate, per esempio, con le lettere x, y, z.
Le velocità con le quali le fluenti variano sono dette flussione e sono denotate con $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.
Newton si avvicina molto al concetto moderno di derivata ma lo fa in modo confuso.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Partendo da una curva $y = f(x)$, si tracci la retta tangente uscente da un punto (x, y) della curva.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Partendo da una curva $y = f(x)$, si tracci la retta tangente uscente da un punto (x, y) della curva. Dato poi ad x un incremento qualsiasi, detto differenza e indicato con dx,

Gottfried Wilhelm von Leibniz

Partendo da una curva $y = f(x)$, si tracci la retta tangente uscente da un punto (x, y) della curva.
Dato poi ad x un incremento qualsiasi, detto differenza e indicato con dx,
Leibniz sceglie il differenziale della funzione dy in modo che il rapporto $\frac{dy}{dx}$ sia esattamente il coefficiente angolare della retta tangente alla curva.

La disputa

La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni

La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni
- 1676: In due lettere, da comunicare a Leibniz, Newton spiega il suo metodo delle serie che lega, con un anagramma, al metodo delle flussioni

La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni
- 1676: In due lettere, da comunicare a Leibniz, Newton spiega il suo metodo delle serie che lega, con un anagramma, al metodo delle flussioni
- 1672-75: Leibniz trova i fondamenti del Calcolo Differenziale

La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni
- 1676: In due lettere, da comunicare a Leibniz, Newton spiega il suo metodo delle serie che lega, con un anagramma, al metodo delle flussioni
- 1672-75: Leibniz trova i fondamenti del Calcolo Differenziale
- 1684: Leibniz pubblica la "Nova methodus"

La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni
- 1676: In due lettere, da comunicare a Leibniz, Newton spiega il suo metodo delle serie che lega, con un anagramma, al metodo delle flussioni
- 1672-75: Leibniz trova i fondamenti del Calcolo Differenziale
- 1684: Leibniz pubblica la "Nova methodus"
- 1704: Newton pubblica l' "Opticks" con in appendice il "Tractatus de quadratura curvarum", che contiene il metodo delle flussioni

Il rigore di Cauchy e Weierstrass

Il rigore di Cauchy e Weierstrass

Augustin-Louis Cauchy
(1789 - 1857)

Karl Weierstrass
(1815 - 1897)

Una definizione formale

Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy.

Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy.
Cauchy ridefinì derivate e integrali in termini di limiti invece che di infinitesimi.

Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy.
Cauchy ridefinì derivate e integrali in termini di limiti invece che di infinitesimi.

Successivamente Karl Weierstrass diede una definizione rigorosa di limite:

Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy.
Cauchy ridefinì derivate e integrali in termini di limiti invece che di infinitesimi.

Successivamente Karl Weierstrass diede una definizione rigorosa di limite:
se $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A e $\ell \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

equivale a dire

Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy.
Cauchy ridefinì derivate e integrali in termini di limiti invece che di infinitesimi.

Successivamente Karl Weierstrass diede una definizione rigorosa di limite:
se $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ di accumulazione per A e $\ell \in \mathbb{R}$ si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

equivale a dire

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \text{ t.c. } x \in A, \; 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Più in generale

Più in generale

Dato $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si dice intorno di x_0 ogni insieme del tipo:

Più in generale

Dato $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si dice intorno di x_0 ogni insieme del tipo:

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\qquad \text{se} \;\; x_0 \in \mathbb{R},$$

per ogni $\epsilon > 0$;

Più in generale

Dato $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si dice intorno di x_0 ogni insieme del tipo:

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\qquad \text{se} \;\; x_0 \in \mathbb{R},$$

per ogni $\epsilon > 0$;

$$]a, +\infty[\qquad \text{se} \;\; x_0 = +\infty,$$

per ogni $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

Più in generale

Dato $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si dice intorno di x_0 ogni insieme del tipo:

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\qquad \text{se} \ \ x_0 \in \mathbb{R},$$

per ogni $\epsilon > 0$;

$$]a, +\infty[\qquad \text{se} \ \ x_0 = +\infty,$$

per ogni $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$]-\infty, a[\qquad \text{se} \ \ x_0 = -\infty,$$

per ogni $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

Più in generale

Dato $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, si dice intorno di x_0 ogni insieme del tipo:

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[\qquad \text{se } \; x_0 \in \mathbb{R},$$

per ogni $\epsilon > 0$;

$$]a, +\infty[\qquad \text{se } \; x_0 = +\infty,$$

per ogni $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,

$$]-\infty, a[\qquad \text{se } \; x_0 = -\infty,$$

per ogni $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

per cui, data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ di accumulazione per A e $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si ha che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\forall V \text{ intorno di } \ell \quad \exists U \text{ intorno di } x_0 \text{ t.c.}$$

$$x \in A \cap (U \setminus \{x_0\}) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in V.$$

La derivata

La derivata

Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e fissato $x_0 \in]a, b[$ si dice che f è derivabile in x_0 se

La derivata

Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e fissato $x_0 \in]a, b[$ si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

La derivata

Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e fissato $x_0 \in]a, b[$ si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Tale limite è detto derivata prima di f in x_0 e si denota con

$$f'(x_0), \qquad \frac{df}{dx}(x_0).$$

La derivata

Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e fissato $x_0 \in]a, b[$ si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Tale limite è detto derivata prima di f in x_0 e si denota con

$$f'(x_0), \qquad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Usando tale definizione:

- il coefficiente angolare della retta tangente in x_0 alla funzione $y = f(x)$ è proprio $f'(x_0)$;

La derivata

Data una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e fissato $x_0 \in]a, b[$ si dice che f è derivabile in x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Tale limite è detto derivata prima di f in x_0 e si denota con

$$f'(x_0), \qquad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Usando tale definizione:

- il coefficiente angolare della retta tangente in x_0 alla funzione $y = f(x)$ è proprio $f'(x_0)$;
- la velocità istantanea lungo il percorso $s(t)$ all'istante t_0 è proprio $s'(x_0)$.

L'Analisi non Standard

L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di infinitesimo, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi;

L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di infinitesimo, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi;
successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di Cauchy e Weierstrass.

L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di infinitesimo, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi;
successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di Cauchy e Weierstrass.
Tra il 1960 e il 1966 il matematico Abraham Robinson (1918 - 1974) dà un fondamento logico rigoroso agli infinitesimi di Leibniz e tale teoria prende il nome di Analisi non Standard.

L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di infinitesimo, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi;
successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di Cauchy e Weierstrass.
Tra il 1960 e il 1966 il matematico Abraham Robinson (1918 - 1974) dà un fondamento logico rigoroso agli infinitesimi di Leibniz e tale teoria prende il nome di Analisi non Standard.
La scelta di utilizzare questo approccio piuttosto che il concetto formale di limite ha due motivazioni:

L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di infinitesimo, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi;
successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di Cauchy e Weierstrass.
Tra il 1960 e il 1966 il matematico Abraham Robinson (1918 - 1974) dà un fondamento logico rigoroso agli infinitesimi di Leibniz e tale teoria prende il nome di Analisi non Standard.
La scelta di utilizzare questo approccio piuttosto che il concetto formale di limite ha due motivazioni:

- le dimostrazioni sono più semplici e intuitive;

L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di infinitesimo, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi;
successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di Cauchy e Weierstrass.
Tra il 1960 e il 1966 il matematico Abraham Robinson (1918 - 1974) dà un fondamento logico rigoroso agli infinitesimi di Leibniz e tale teoria prende il nome di Analisi non Standard.
La scelta di utilizzare questo approccio piuttosto che il concetto formale di limite ha due motivazioni:

- le dimostrazioni sono più semplici e intuitive;
- l'Aritmetica inizia con i numeri interi naturali, quindi considera gli interi relativi, i razionali, gli irrazionali. In quest'ottica il passo successivo sembra essere l'introduzione degli infinitesimi.

Il calcolo integrale

Il calcolo integrale

Si presentano due problemi:

Il calcolo integrale

Si presentano due problemi:

- data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dire se esiste $F : I \to \mathbb{R}$ tale che F è derivabile in I e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$

Il calcolo integrale

Si presentano due problemi:

- data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dire se esiste $F : I \to \mathbb{R}$ tale che F è derivabile in I e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$
  se esiste, F è detta primitiva di f in I;

Il calcolo integrale

Si presentano due problemi:

- data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dire se esiste $F : I \to \mathbb{R}$ tale che F è derivabile in I e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$
  se esiste, F è detta primitiva di f in I;
- data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e positiva, se possibile calcolare l'area della regione

$$R_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \quad 0 \le y \le f(x)\}$$

detto rettangoloide relativo a f di base $[a, b]$.

Calcolo dell'area del cerchio

Calcolo dell'area del cerchio

Già nel 430 a.C. Antifonte tentò di determinare l'area del cerchio inscrivendovi dei triangoli sempre più piccoli fino a quando la sua area non 'esaurisce'.

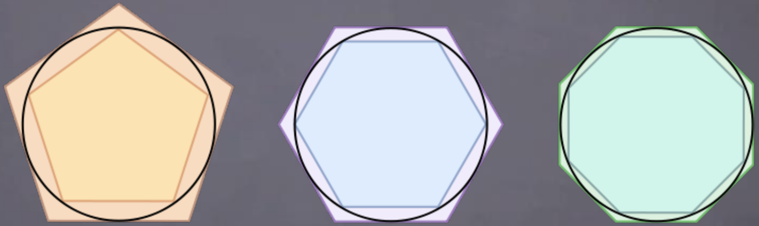
Calcolo dell'area del cerchio

Già nel 430 a.C. Antifonte tentò di determinare l'area del cerchio inscrivendovi dei triangoli sempre più piccoli fino a quando la sua area non 'esaurisce'. Archimede determinò con buona approssimazione l'area del cerchio (e quindi di π!) costruendo poligoni regolari inscritti in un cerchio (metodo di esaustione) e poligoni regolari circoscritti (metodo di compressione):

Calcolo dell'area del cerchio

Già nel 430 a.C. Antifonte tentò di determinare l'area del cerchio inscrivendovi dei triangoli sempre più piccoli fino a quando la sua area non 'esaurisce'.
Archimede determinò con buona approssimazione l'area del cerchio (e quindi di π!) costruendo poligoni regolari inscritti in un cerchio (metodo di esaustione) e poligoni regolari circoscritti (metodo di compressione): all'aumentare del numero dei lati dei poligoni le figure tendono ad avvicinarsi alla forma del cerchio 'per difetto' e 'per eccesso'.

Approssimazione dell'area del cerchio



Metodo di esaustione e metodo di compressione

Il calcolo integrale

Il calcolo integrale

Il metodo di esaustione e il metodo di compressione sono alla base del concetto di integrale di una funzione sviluppato nel Seicento da

Il calcolo integrale

Il metodo di esaustione e il metodo di compressione sono alla base del concetto di integrale di una funzione sviluppato nel Seicento da

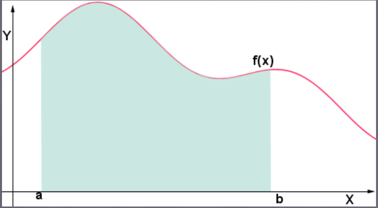
- Isaac Newton (1643 – 1727),
- Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) e

Il calcolo integrale

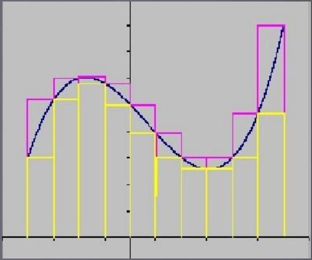
Il metodo di esaustione e il metodo di compressione sono alla base del concetto di integrale di una funzione sviluppato nel Seicento da

- Isaac Newton (1643 – 1727),
- Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716) e
- Johann I Bernoulli (1667 – 1748).

Il calcolo integrale



Area del rettangoloide



Integrale secondo Riemann

Formula fondamentale del calcolo integrale

Formula fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e positiva, si ha che

Formula fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e positiva, si ha che
l'area del rettangoloide relativo a f di base $[a, b]$, cioè

$$R_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq f(x)\},$$

è calcolabile come:

Formula fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e positiva, si ha che
l'area del rettangoloide relativo a f di base $[a, b]$, cioè

$$R_f \; = \; \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq f(x)\},$$

è calcolabile come:

$$area(R_f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Formula fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e positiva, si ha che
l'area del rettangoloide relativo a f di base $[a, b]$, cioè

$$R_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq f(x)\},$$

è calcolabile come:

$$area(R_f) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

con $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ primitiva di f, cioè tale che F è derivabile con $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$.

Fonti bibliografiche e sitografiche

- P. Bonavoglia, Il calcolo infinitesimale, analisi per i licei alla maniera non standard, Editore Matematicamente.it, 2011
- M. Galeazzi, Newton e Leibniz, http://matematica-old.unibocconi.it/galeazzi/capitolo16.htm
- G. Lari, Storia del calcolo differenziale e la disputa tra Leibniz e Newton, Tesi di laurea, Università di Bologna.
- A. Pucci, Nascita del calcolo differenziale, http://www.humanitasnova.net/?p=57
- G.T. Bagni, Differenziale e infinitesimo alle origini del Calcolo infinitesimale: note storiche ed esperienze didattiche, http://www.syllogismos.it/history/Speranza.pdf