La Matematica dentro Google

F. Iavernaro, A. Pugliese

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Bari Aldo Moro

felice.iavernaro@uniba.it alessandro.pugliese@uniba.it

ORIENTAMENTO CONSAPEVOLE
Marzo 2023

Funzionamento di un motore di ricerca

- Come funziona un motore di ricerca?
  - scansione (web crawling, eg. Googlebot)
  - indicizzazione (inserimento nel database del motore di ricerca)
  - classificazione (posizionamento di una pagina web in termini della sua importanza)

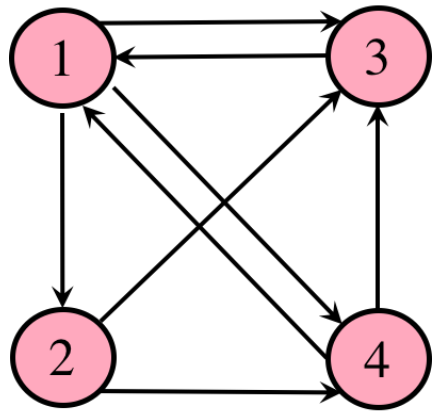
  Quando un'utente effettua una ricerca, viene selezionato un sottoinsieme di pagine web nel database che contengono l'informazione desiderata. I risultati vengono ordinati e presentati secondo la loro importanza (i primi risultati sono quelli più rilevanti).
- Come ordinare i risultati di un motore di ricerca dal più rilevante al meno rilevante? Come misurare l'importanza di una pagina web?
  Un modo classico (ma non funzionante) di procedere è quello di ordinare le pagine in base alla frequenza con cui compaiono i termini della query.

Il PageRank di Google (1/3)

- Sergey Brin e Larry Page creano Google nel 1998 a Stanford (California) e ideano un nuovo modo di classificare i documenti web in termini della loro rilevanza e popolarità: il PageRank.
- Il loro obiettivo era quello di aiutare gli utenti di internet a trovare più facilmente le informazioni.
- Al fine di identificare le pagine pertinenti con la query, Page e Brin ebbero l'idea di considerare non solo le ripetizioni delle parole ma anche i link che provenivano da altri siti e che puntavano ad una determinata pagina (backlink).
- Il loro ragionamento era semplice: se un certo sito viene citato e consigliato da molti altri significa che ha dei contenuti interessanti e quindi è giusto farlo vedere prima di altri.

Il PageRank di Google (2/3)

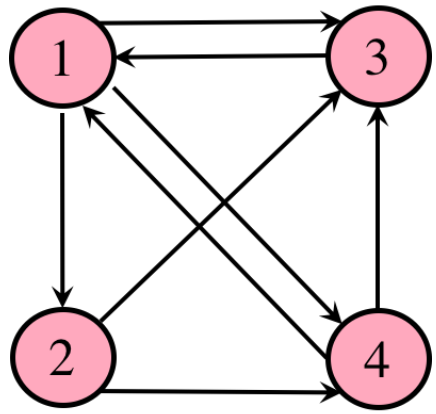
Supponiamo che, a seguito di una query, siano state identificate le quattro pagine visualizzate in figura. Le frecce indicano i collegamenti (link) da una pagina all'altra.



Quale sarà la pagina più importante?

Il PageRank di Google (2/3)

Supponiamo che, a seguito di una query, siano state identificate le quattro pagine visualizzate in figura. Le frecce indicano i collegamenti (link) da una pagina all'altra.



Quale sarà la pagina più importante?

Non è la pagina 3

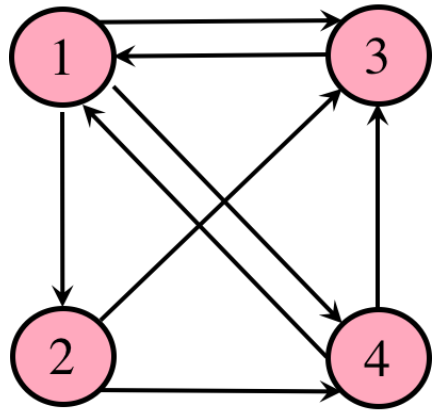
Il PageRank di Google (3/3)

- Per il calcolo delPageRank di una pagina web P si tiene conto:
  - del numero di link che P riceve dalle altre pagine del web;
  - della qualità di ciascun link:
    - un link da una pagina importante darà un contributo maggiore rispetto a un link da una pagina più sconosciuta;
    - un link da una pagina da cui partono molti link dovrà pesare meno di un link da una pagina che ne contiene pochi.

Idea fondamentale:

Un link alla pagina P dalla pagina Q aumenta il PageRank della pagina P in misura direttamente proporzionale al PageRank della pagina Q ed inversamente proporzionale al numero di link che dalla pagina Q rimandano ad altre pagine

Esempio (1/3)



Consideriamo il microweb rappresentato dal grafo orientato in figura e costituito dalle quattro pagine P_1, P_2, P_3, e P_4. Denotiamo con x_1, x_2, x_3 e x_4 il loro Pagerank.

- Alla pagina P_1 giungono due link: uno dalla pagina P_3 (che contiene un solo link) e l'altro dalla pagina P_4 (che contiene due link). Pertanto: $x_1 = x_3 + \frac{1}{2}x_4$.
- Ragionando analogamente, per la pagina P_2 risulta: $x_2 = \frac{1}{3}x_1$.
- Per la pagina P_3 risulta: $x_3 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_4$.
- Infine, per la pagina P_4 risulta: $x_4 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2$.

Esempio (2/3)

Abbiamo ottenuto il sistema lineare

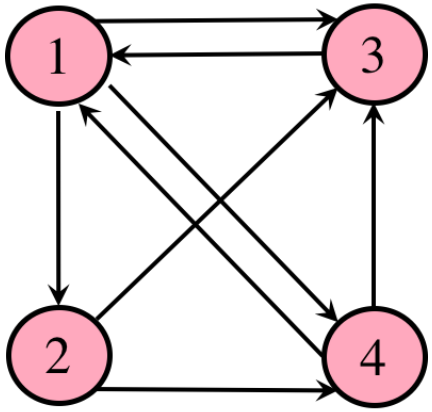
$$\begin{cases} & & x_3 + \frac{1}{2}x_4 = x_1 \\ \frac{1}{3}x_1 & & & = x_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & & + \frac{1}{2}x_4 = x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & & & = x_4 \end{cases}$$

- Si vede facilmente che, se (x_1, x_2, x_3, x_4) è una sua soluzione, lo sono anche $(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4)$ al variare di α parametro reale (non sorprende: la classifica è invariante rispetto alla moltiplicazione di tutti i punteggi per uno stesso fattore)
- Per convenzione si sceglie la quadrupla che soddisfa

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

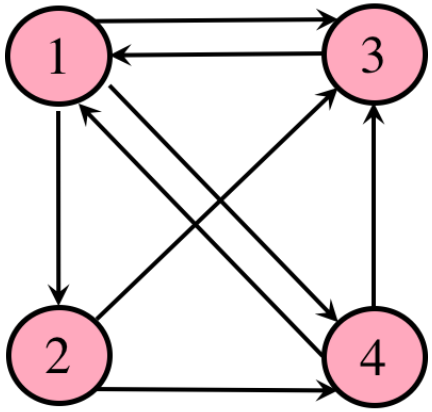
(si chiama normalizzazione). In questa maniera, il punteggio di ogni pagina può essere interpretato come la sua importanza in termini percentuali rispetto alle altre pagine.

Esempio (3/3)



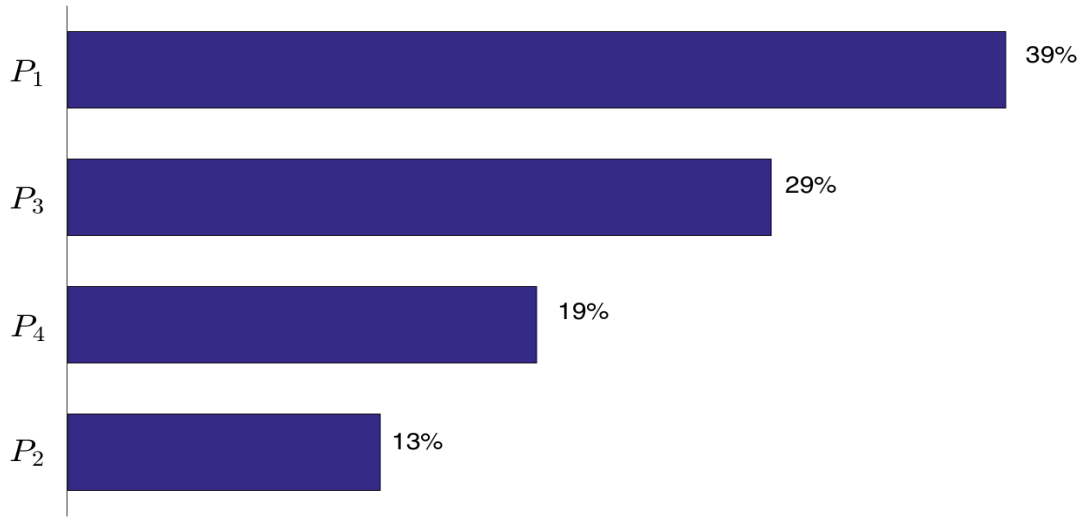
- Qual è la pagina web più importante?

Esempio (3/3)



- Qual è la pagina web più importante?
- La soluzione (normalizzata) del sistema è:

$$x_1 = \frac{12}{31} \approx 0.39, \quad x_2 = \frac{4}{31} \approx 0.13, \quad x_3 = \frac{9}{31} \approx 0.29, \quad x_4 = \frac{6}{31} \approx 0.19.$$



Definizione del PageRank

- Consideriamo un insieme di n pagine web: $P_1, P_2, \ldots, P_n$
- Indichiamo con l_j il numero di link che dalla pagina P_j puntano verso altre pagine
- Indichiamo con B_i l'insieme delle pagine che contengono un link alla pagina P_i
- L'importanza x_i della pagina P_i sarà la somma dei contributi di tutte le pagine che hanno un link ad essa

Formalmente:

$$x_i = \sum_{P_j \in B_i} \frac{x_j}{l_j}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

La (1) equivale a un sistema lineare di n equazioni in n incognite.

Matrice di Google

Riprendiamo il sistema dell'esempio precedente:

$$\begin{cases} & x_3 + \frac{1}{2}x_4 = x_1 \\ \frac{1}{3}x_1 & = x_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & + \frac{1}{2}x_4 = x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & = x_4 \end{cases}$$

Il sistema lineare può essere scritto utilizzando il *formalismo delle matrici*. I coefficienti che compaiono ai membri sinistri delle 4 equazioni possono essere rappresentati mediante la matrice di 4 righe e 4 colonne:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

G è detta *matrice di Google*.

Cosa sono le matrici?

Dati due interi positivi m e n, una matrice A con m righe e n colonne è una tabella di $m \cdot n$ numeri, indicati con a_{ij}, per $i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$. A è rappresentata nel seguente modo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

In forma compatta scriveremo: $A = (a_{ij})$.

- Se $m = n$, la matrice si dirà *quadrata* di dimensione n;
- se $m \neq n$ la matrice è detta *rettangolare*;
- se $n = 1$, la matrice è costituita da una sola colonna ed è detta *vettore colonna*;
- se $m = 1$, la matrice è costituita da una sola riga ed è detta *vettore riga*.

Esempi di matrici

- matrice quadrata di dimensione 3: $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -7 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
- matrice rettangolare 2×4: $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$
- vettore riga: $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$
- vettore colonna: $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$

Come costruire G (1/2)

Si parte dalla *matrice di adiacenza* $A = (a_{ij})$:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se nella pagina } P_j \text{ c'è un link alla pagina } P_i \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio precedente:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ogni riga ed ogni colonna corrispondono ad una pagina web
- Somma lungo la riga i: numero di link alla pagina P_i da altre pagine
- Somma lungo la colonna j: numero di link dalla pagina P_j verso altre pagine
- l_j è la somma degli elementi lungo la colonna j

Come costruire G (2/2)

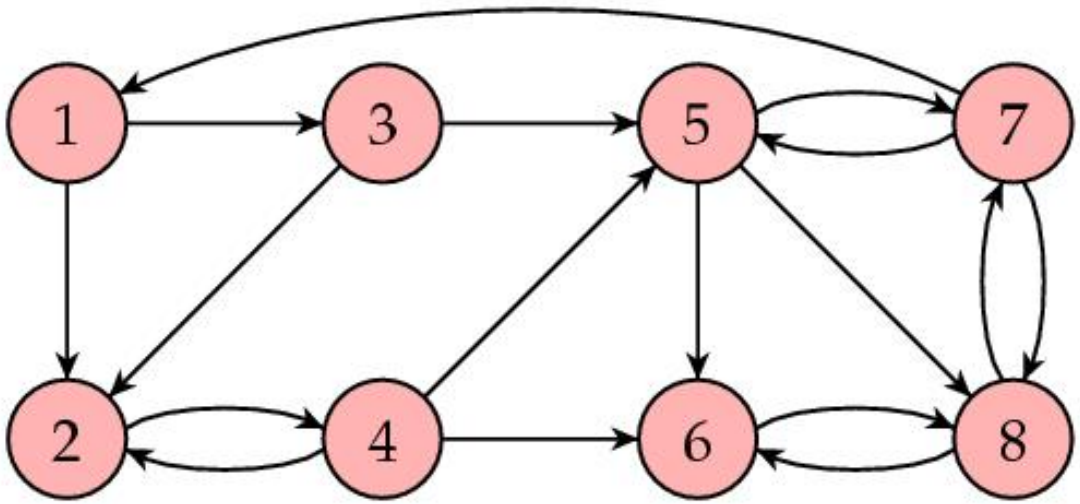
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Formalmente:

$$g_{ij} = \frac{a_{ij}}{l_j}, \text{ per ogni } i \text{ e } j$$

- Gli elementi di A valgono 0 oppure 1
- Gli elementi di G sono numeri positivi compresi tra 0 e 1
- La somma degli elementi di ciascuna colonna di G è uguale a 1

Esercizio



Costruire la matrice di adiacenza A e la matrice di Google G per questo insieme di pagine web.

Prodotto di una matrice per un vettore

- se $\boldsymbol{x}$ è un vettore riga e $\boldsymbol{y}$ è un vettore colonna entrambi di lunghezza n, il *prodotto scalare* di $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ è così definito:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i.$$

- Sia A una matrice quadrata di dimensione n e $\boldsymbol{x}$ un vettore colonna di lunghezza n. Si definisce prodotto tra A e x il vettore colonna $\boldsymbol{y} = A \cdot \boldsymbol{x}$ il cui elemento generico y_i è il prodotto scalare tra la riga i-esima di A e il vettore $\boldsymbol{x}$:

$$y_i = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, x_j, \quad i = 1, \ldots n.$$

dove, $\boldsymbol{a}_i \rightarrow$ denota la i-esima riga di A; .

Esempi

- $\begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$ (vettori ortgonali)
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ -17 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{31} \\ \frac{4}{31} \\ \frac{9}{31} \\ \frac{6}{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{31} \\ \frac{4}{31} \\ \frac{9}{31} \\ \frac{6}{31} \end{bmatrix}$ (matrice di Google dell'esempio)

Sistemi lineari e matrici (1/2)

Un sistema lineare di n equazioni in n incognite ha la seguente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

Con $A = (a_{ij})$ *matrice dei coefficienti*,

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *vettore delle incognite*, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ *vettore dei termini noti*.

Ad ogni riga di A corrisponde un'equazione, ad ogni sua colonna corrisponde un'incognita.

Sistemi lineari e matrici (2/2)

Il sistema può essere rappresentato nella seguente forma, detta *forma matriciale*:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Esempio precedente:

Sistema lineare:

$$\begin{cases} & & x_3 + \frac{1}{2}x_4 = x_1 \\ \frac{1}{3}x_1 & & & = x_2 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & & + \frac{1}{2}x_4 = x_3 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 & & & = x_4 \end{cases}$$

Forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Forma compatta: $G\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

Considerazioni sul costo computazionale

- Al momento Google indicizza circa 30×10^{12} pagine web. La matrice G ha quindi dimensioni enormi.
- Per risolvere $G\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ potremmo usare un computer. Ci sono algoritmi classici per risolvere i sistemi lineari (eg. metodo di riduzione di Gauss), ma anche questi diventano molto onerosi al crescere delle dimensioni del sistema:

  circa n^3 operazioni algebriche elementari
  se la matrice G ha dimensione n

- Il più veloce supercomputer al mondo può eseguire circa 93×10^{15} operazioni al secondo
- Quanto tempo occorrerebbe per risolvere il sistema? Troppo!

Per fortuna c'è un metodo più efficiente per ottenere il PageRank. Si sfrutta la sparsità della matrice di Google (la maggior parte degli elementi di G sono nulli).

Il metodo delle potenze

- Si considera un vettore $\boldsymbol{x}_0$ arbitrario con l'unica condizione che la somma dei suoi elementi sia 1.
- Si genera la successione dei vettori

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= G\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_2 &= G\boldsymbol{x}_1 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{x}_{k+1} &= G\boldsymbol{x}_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

N.B. Così come $\boldsymbol{x}_0$, ogni $\boldsymbol{x}_k$ ha elementi che sommano a 1.

Il metodo delle potenze

- Si considera un vettore $\boldsymbol{x}_0$ arbitrario con l'unica condizione che la somma dei suoi elementi sia 1.
- Si genera la successione dei vettori

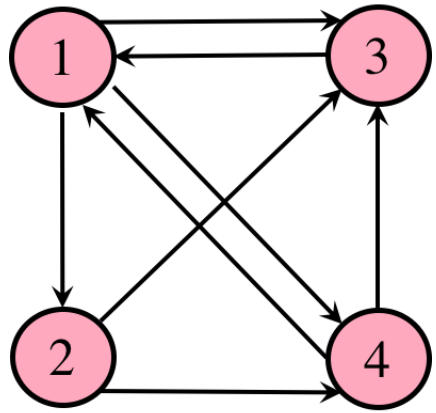
$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_1 &= G\boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x}_2 &= G\boldsymbol{x}_1 \\ &\vdots \\ \boldsymbol{x}_{k+1} &= G\boldsymbol{x}_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

  N.B. Così come $\boldsymbol{x}_0$, ogni $\boldsymbol{x}_k$ ha elementi che sommano a 1.
- Assumiamo che
  (a) G non possiede colonne nulle (non ci sono pagine che non contengono alcun link);
  (b) il grafo che rappresenta il web è fortemente connesso (si può raggiungere un qualsiasi nodo a partire da un qualsiasi altro nodo);

  Allora, la successione $\{\boldsymbol{x}_k\}$ "converge" alla soluzione del sistema lineare $Gx = x$ cioè al vettore dei PageRank!

Esercitazione in Python

Segue implementazione sul calcolatore dell'esempio



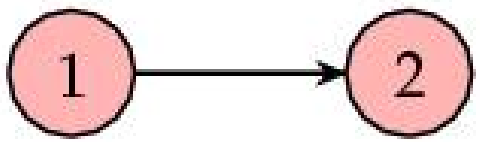
mediante software per il calcolo scientifico (gratuito) *Octave*, nella versione che gira all'interno del browser, disponibile al seguente link:

https://octave-online.net

Modifica della matrice di Google

Vediamo come ovviare ai casi (frequenti nel web) in cui una delle due condizioni non è soddisfatta:

(a) Dangling nodes (pagine che non contengono link)



Ogni colonna nulla di G viene sostituita dalla colonna di valori $\frac{1}{n}$. È come se la pagina contenesse i link verso tutte le altre pagine del web.

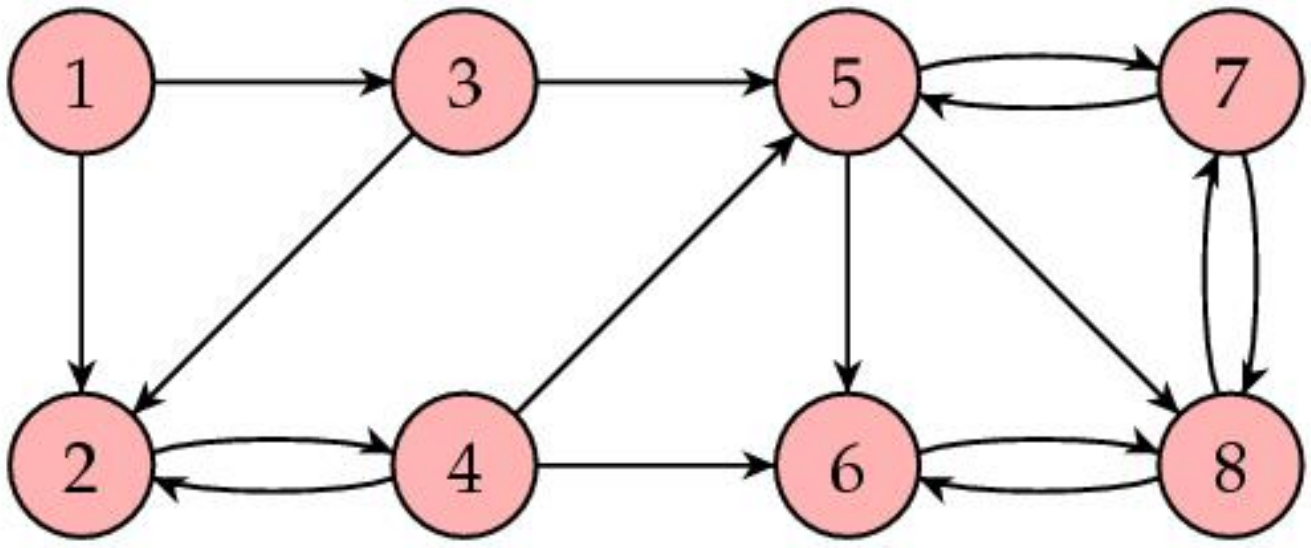
(b) Denotiamo con E la matrice $n \times n$ i cui elementi sono tutti uguali ad 1, e modifichiamo la matrice di Google come segue:

$$G \hookleftarrow (1-m)G + m\frac{1}{n}E, \qquad \text{(solitamente si pone } m = 0.15\text{)}$$

Osserviamo che le colonne della nuova matrice G così ottenuta, continuano ad avere somma pari a 1.

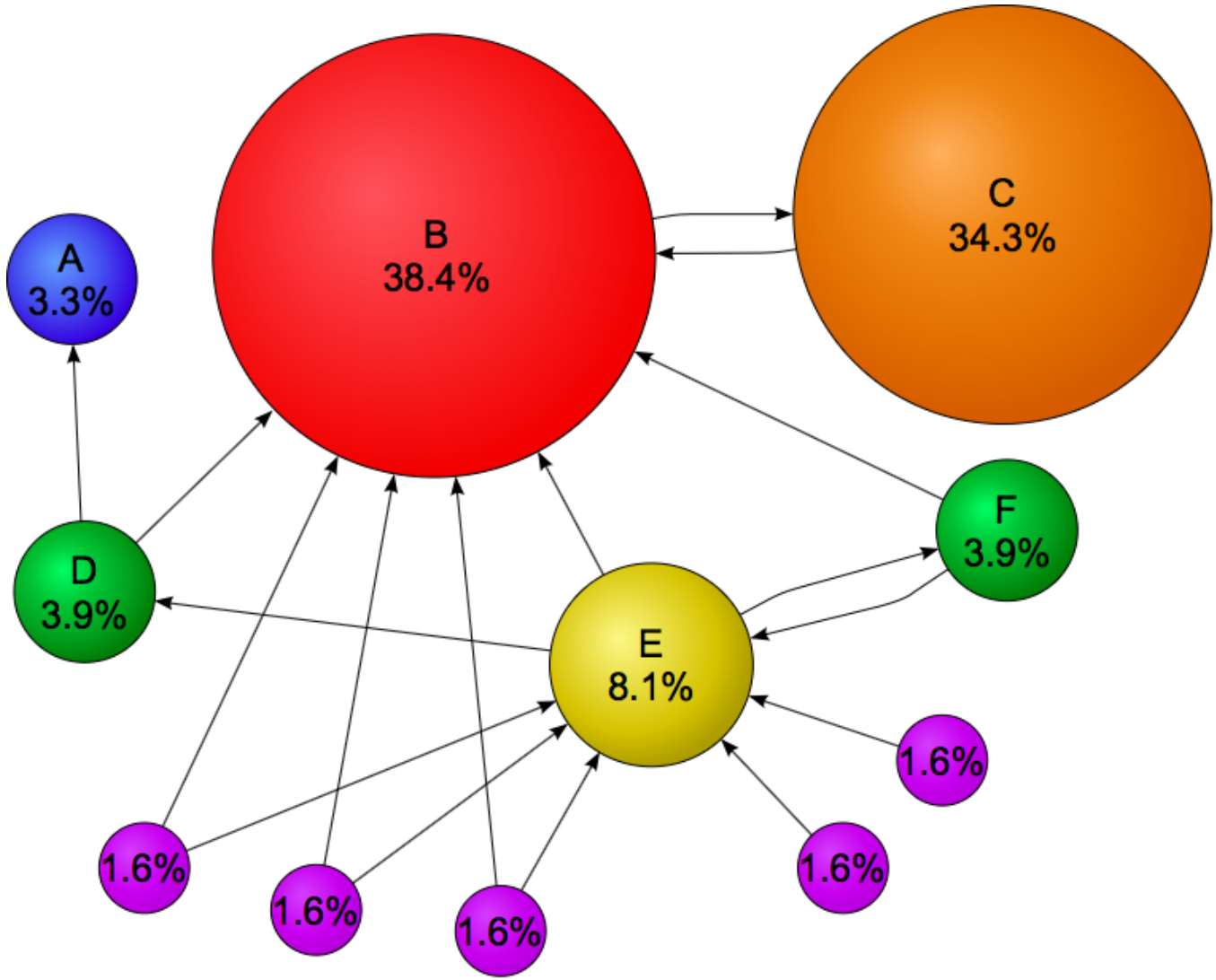
Esercizio

Calcolare il vettore dei PageRank, prima e dopo l'ultima modifica sulla matrice di Google:



Esercizio (da Wikipedia)

Calcolare il vettore dei PageRank della seguente sezione del web.



Curiosità

- Poco dopo aver fondato l'azienda, per mancanza dei fondi necessari, Larry Page e Sergey Brin cercarono di venderla per un milione di dollari a diverse società finanziarie, oltre che a diretti concorrenti come Altavista e Yahoo, ma senza successo.
- Ora è una delle più grandi aziende a livello globale con capitalizzazione azionaria superiore ai 500 miliardi di dollari.
- Il nuovo verbo "to google" significa cercare sulla rete.
- Il motto dei fondatori di google è "don't Be Evil" (non compiere mai il male).
- Il termine Google deriva da googl con cui è indicato il numero 10^{100} (10 seguito da 100 zeri).
- Il quartier generale di Google in California si chiama googleplex il cui termine identifica (oltre che lo stabile di Google) il numero 10^{googl}.

Fonti

- AMS Feature Article: How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack
- Wikipedia: PageRank
- Wikipedia: Google Matrix
- SIAM Review Article: The $25,000,000,000 Eigenvector, the Linear Algebra Behind Google