

# Geometria oltre Euclide

dall'Ottica di Euclide alla geometria proiettiva

Francesco Bastianelli

Nelle prime parte di questo seminario, elaboriamo visto come, con l'avvento delle prospettive, si riempiono consolidate le seguenti idee, finora presenti già nell'"ottica" di Euclide:

- A. la rappresentazione sul piano delle realtà "euclidiene" 3-dimensionale avviene per proiezione da un punto (l'occhio) e i punti dello spazio appartenenti allo stesso raggruppamento vengono proiettati nello stesso punto del piano;
- B. Introduzione una linea all'orizzonte (all'"infinito") sulle quale si incontrano le rette che nelle realtà "euclidiene" 3-dimensionale chiamiamo parallele;
- C. Punti di osservazione differenti "deformano" l'oggetto osservato (si pensi all'emorfosi).

Lo scopo di questa seconda parte del seminario è introdurre il "piano proiettivo reale" esistenzialmente elencare proprietà e, nel farlo, mostrare come queste idee siano in qualche modo presenti. Chiaramente, visto il poco tempo a disposizione

e visto le mancante di clausre mostruose preliminari che servirebbero per una trattazione rigorosa, seremo fortemente poco formali nell'introdurre il piano proiettivo reale e le sue proprietà.

Questa seconda parte del seminario è strutturata come segue:

1. Inizialmente, introduciamo le "rette proiettive reali"
2. Poi passeremo a definire il piano proiettivo reale e ne discuteremo alcune proprietà, come il fatto che tutte le rette hanno un punto in comune (cioè non esistono rette parallele).
3. Infine studieremo le coniche sul piano proiettivo reale e mostriremo con un esempio che non è possibile distinguere parabole, ellissi ed iperbolici.

## 1. LA RETTA PROIETTIVA REALE $P^1(\mathbb{R})$

Prima di introdurre il piano proiettivo reale, concentriamoci sul caso (più semplice) delle rette proiettive reali.

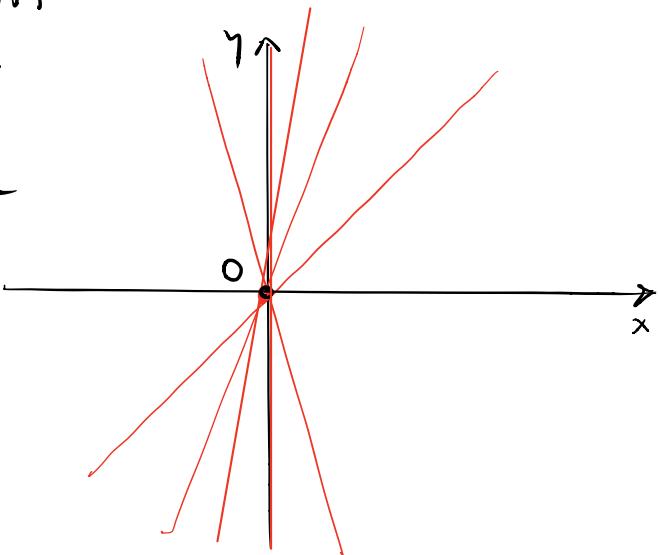
Nel seguito, indicheremo con  $\mathbb{R}^2$  il piano cartesiano in cui elaboriamo fissato un sistema di riferimento ortogonale.

DEFINIZIONE. Chiamiamo RETTA PROIETTIVA REALE l'insieme i cui elementi sono le rette del piano cartesiano che passano per l'origine.

Tali elementi sono detti PUNTI delle rette proiettive reali.

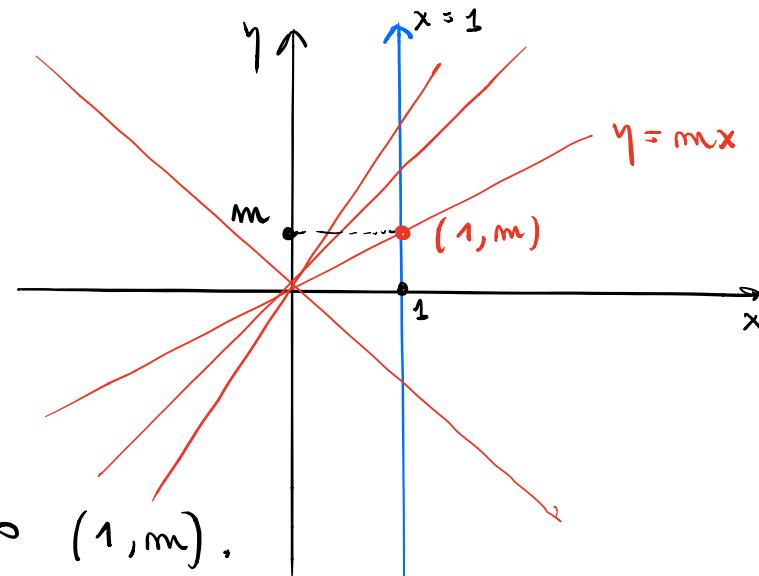
Le rette proiettive reali viene anche dette SPAZIO PROIETTIVO REALE di DIMENSIONE 1 e viene indicato con  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow$  DI DIMENSIONE 1  
SPAZIO PROIETTIVO



Cerchiamo di descrivere meglio questo insieme. A questo scopo, consideriamo le rette di equazione  $x=1$ .

Tutte le rette "oblique" passanti per l'origine hanno equazione  $y = mx$  e incontrano le rette  $x=1$  nel punto  $(1, m)$ .



Quindi, se consideriamo le rette  $x=1$  come se fosse un asse reale, ogni retta obliqua passante per l'origine di equazione  $y = mx$ , corrisponde ad un valore  $m$  sulle rette  $x=1$ .

↳ il suo COEFFICIENTE ANGOLARE.

Questa descrizione, però, non tiene conto delle

rette verticali di equazione  $x = 0$ .

Perciò  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{ \text{retta verticale } x=0 \} \cong \mathbb{R}$

↪ RETTA  $x=1$

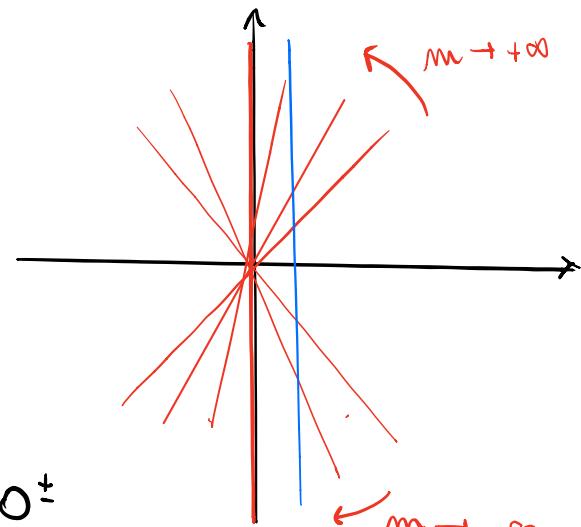
Come possiamo includere anche le rette  $x=0$ ?

Osserviamo che se  $m \rightarrow +\infty$ , le rette  $y = mx$  tendono alla retta  $x=0$ .

Analogamente, se  $m \rightarrow -\infty$ , le rette  $y = mx$  tendono alle stesse rette  $x=0$ .

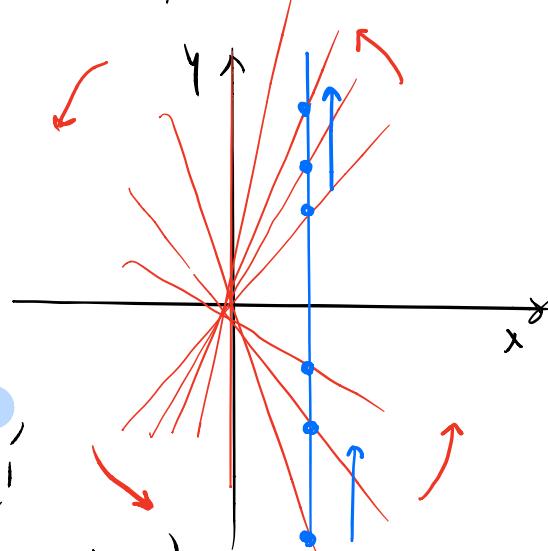
Possendo alle sentenze in forme implicite, abbiamo che, considerando una retta generica passante per 0

$$r: ax + by = 0,$$



si ha che il limite per  $b \rightarrow 0^\pm$  della  $r$  è proprio la retta  $x=0$ .

Ricollegandoci alle sentenze in forme esplicite s'ha che  $m = -\frac{a}{b}$  e  $\lim_{b \rightarrow 0^\pm} m = \mp\infty$

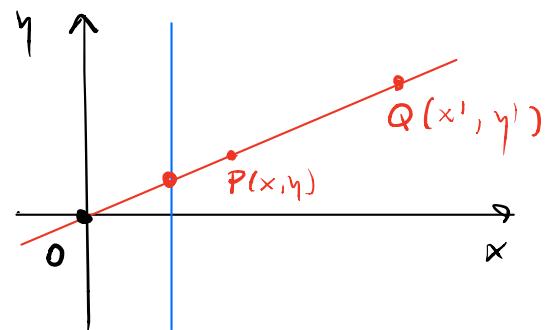


Animati, se mettiamo in senso antiorario una retta tenendo fissa l'origine e segniamo il punto corrispondente sulle rette  $x=1$ , andremo a finire in un punto all'infinito (che corrisponde alla retta  $x=\infty$ ) e ricominciamo a percorrere le rette  $x=1$  da  $-\infty$ . In un certo senso, è come se i punti  $+\infty$  e  $-\infty$  delle rette  $x=1$  si incontrano.

Però possiamo pensare le rette proiettive reale come unione dell'esse reale (le rette  $x=1$ ) con un "punto all'infinito" (corrispondente a  $x=0$ ):

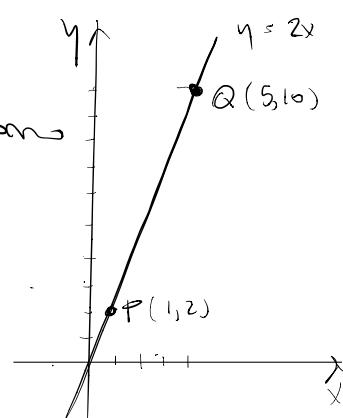
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

In fine, vogliamo introdurre un sistema di coordinate in  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Per farlo, osserveremo che per ogni punto  $P(x, y)$  sul piano cartesiano, con  $P \neq 0$ , esiste una sola retta passante per  $O$  e per  $P$  (e queste rette è un elementi di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ).



Inoltre, se  $Q(x', y')$  appartiene alla stessa retta, allora  $P$  e  $Q$  identificano lo stesso punto di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . In questo caso, le coordinate di  $P$  e  $Q$  sono proporzionali, cioè esiste un numero  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che  $x' = ax$  e  $y' = ay$ .

Esempio:  $P(1, 2)$  e  $Q(5, 10)$  appartengono entrambi alla retta  $y = 2x$ . In questo caso si ha che  $x' = 5x$  e  $y' = 5y$  (cioè  $a = 5$ ).



Perché  $P$  e  $Q$  devono indicare lo stesso punto di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , indichiamo i punti di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  con le coordinate  $[x, y]$ , con le proprietà che

1) Se  $\exists a \in \mathbb{R}$ , con  $a \neq 0$ , tale che  $x' = ax$  e  $y' = ay$ ,  
allora  $[x, y] = [x', y']$

(cioè due punti proporzionali  $P$  e  $Q$  individuano le stesse rette).

2)  $[x, y] \neq [0, 0]$ , perché se  $P(x, y) = O(0,0)$  non è vero che esiste una sola retta che passa per  $P$  e  $O$ .  
(il punto  $[0, 0]$  non appartiene a  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ !)

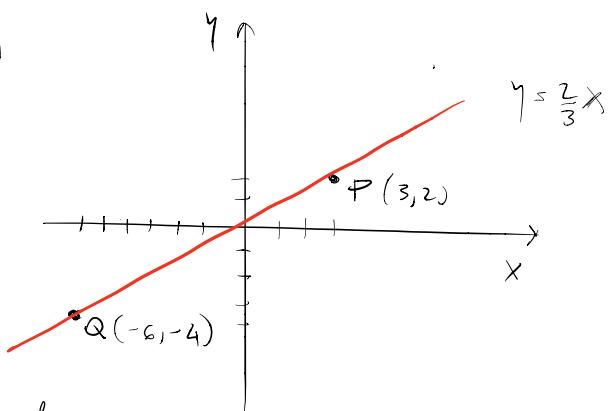
Queste coordinate si chiamano COORDINATE OMOCONESE  
(e sono state introdotte da MÖBIUS (1827) e PLÜCKER (1830)).

Esempio Il punto  $[3, 2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

corrisponde alla retta di

equazione  $2x - 3y = 0$ , cioè

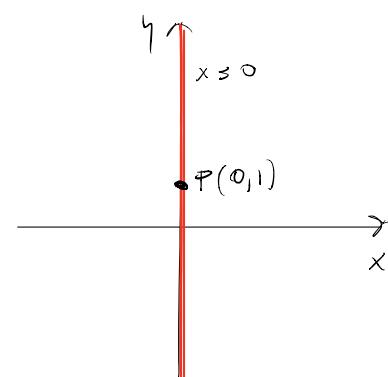
$$y = \frac{2}{3}x$$



Il punto  $[-6, -4] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  corrisponde  
alla stessa retta, cioè  $[3, 2] = [-6, -4]$

(infatti  $-6 = (-2) \cdot 3$  e  $-4 = (-2)(-2)$ )

Il punto  $[0, 1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  corrisponde  
alla retta  $x = 0$ , cioè al punto  
all'infinito di  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .



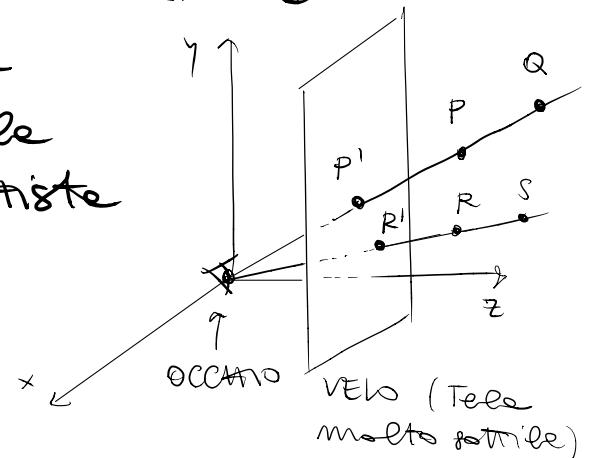
In realtà, tutti i punti nelle  
forme  $[0, a] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  coincidono con  $[0, 1]$  perché

$$0 = a \cdot 0 \quad \text{e} \quad a = a \cdot 1.$$

## 2. IL PIANO PROIETTIVO REALE $P^2(\mathbb{R})$

Torniamo alla situazione 3-dimensionale che era oggetto delle prospettive ed alla rappresentazione su tele mediante le "Veli" di Leon Battista Alberti.

Nel seguito, indichiamo con  $\mathbb{R}^3$  lo spazio euclideo 3-dimensionale in cui abbiamo fissato un sistema di riferimento ortogonale.

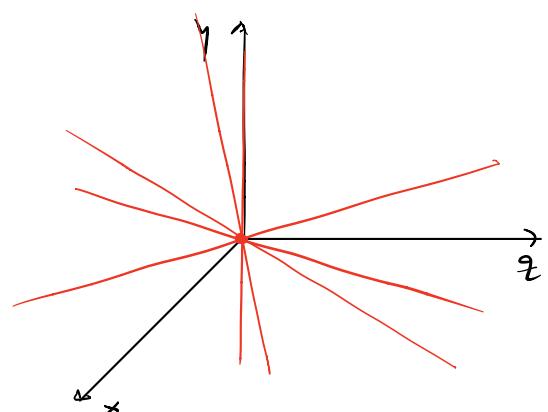


Analogo al caso delle rette  $P^1(\mathbb{R})$ , definiamo il piano proiettivo reale come segue.

DEFINIZIONE. Il PIANO PROIETTIVO REALE è l'insieme i cui elementi sono le rette dello spazio  $\mathbb{R}^3$  che passano per l'origine.

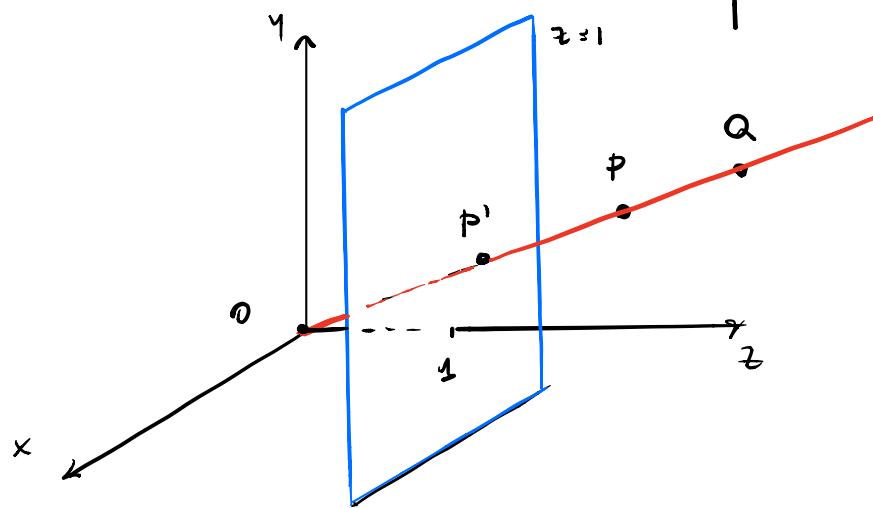
Tali elementi sono detti PUNTI del piano proiettivo reale.

Il piano proiettivo reale è detto anche SPAZIO PROIETTIVO REALE di DIMENSIONE 2 e viene indicato con  $P^2(\mathbb{R})$ .



$P^2(\mathbb{R})$  di dimensione 2  
SPAZIO PROIETTIVO REALE

Al fine di ottenere meglio i punti di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , ragioniamo come nel caso delle rette proiettive reale e consideriamo il piano di equazione  $z = 1$ .



Anche in questo caso, dato un punto  $P(x, y, z)$  esiste un'unica retta passante per l'origine  $O$  e per  $P$ , cioè esiste un unico punto del  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  associato a  $P$ .

Inoltre, due punti dello spazio  $P(x, y, z)$  e  $Q(x', y', z')$  indichiamo le stesse rette se e solo se le loro coordinate sono proporzionali, cioè se esiste un numero  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tale che

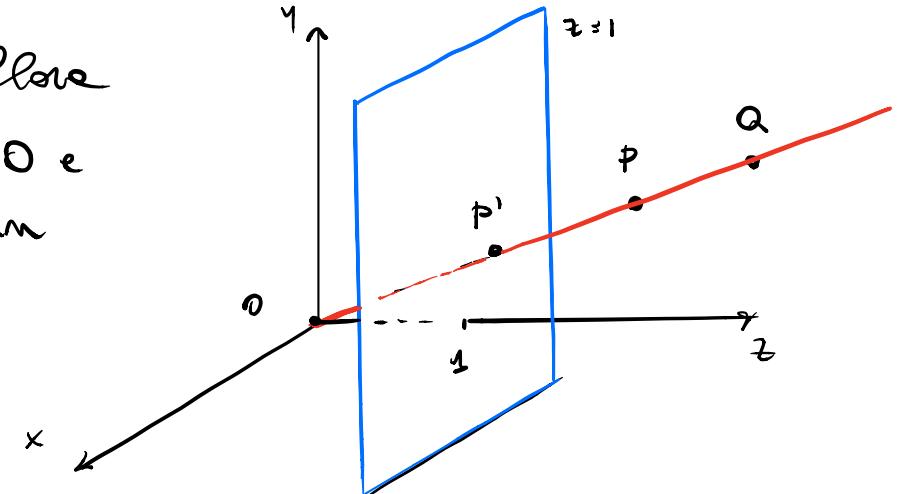
$$x' = \alpha x, \quad y' = \alpha y \quad e \quad z' = \alpha z.$$

Allora, introduciamo delle coordinate in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , dette ancora COORDINATE OMOCENESE, mediante cui ogni punto del  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sarà individuato da una terna  $[x, y, z]$  avente le seguenti proprietà:

- 1) Due terne  $[x, y, z]$  e  $[x', y', z']$  indichino lo stesso punto se e solo se  $\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tali che
- $$x' = \alpha x, \quad y' = \alpha y \quad e \quad z' = \alpha z.$$
- 2)  $[x, y, z] \neq [0, 0, 0]$  perché se  $P(0, 0, 0) = O(0, 0, 0)$  non è vero che esiste una sola retta passante per  $P$  e  $O$ . (Il punto  $[0, 0, 0]$  non è un punto del  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ !)

Quindi, se  $P(x_p, y_p, z_p)$  è un punto dello spazio, allora la retta passante per  $O$  e  $P$  è il punto di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  con coordinate omogenee  $[x_p, y_p, z_p]$ .

Inoltre, se  $z_p \neq 0$ , allora la retta passante per  $O$  e per  $P$  corrisponde ad un unico punto  $P'$  sul piano  $z=1$  (cioè al punto di intersezione delle due rette e il piano).



Invece, le rette che generano sul piano  $z=0$  (cioè il piano generato dagli assi  $x$  e  $y$ ) sono parallele al piano  $z=1$  e non si incontrano mai.

Cioè siano di queste rette corrispondente ad un punto di coordinate  $[x_p, y_p, 0]$  (perché tutti i punti sul piano  $xy$  hanno coordinate  $P(x_p, y_p, 0)$ ).

Questi punti corrispondono ai punti di una retta proiettiva reale, che chiamiamo RETTA ALL'INFINITO e indichiamo con  $r_\infty$ .

Ripetendo, il piano proiettivo reale può essere pensato come l'unione del piano  $z=1$  (che è metterelemento identificato con il piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ ) con la retta all'infinito  $r_\infty$ , cioè

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{r_\infty\}.$$

Prima di procedere oltre, siamo al seguente

DEFINIZIONE. Sia  $d \in \mathbb{N}$  un numero naturale.

Un polinomio  $f(x, y, z)$  si dice OMOGENEO di grado  $d$  se tutti i monomi che lo compongono hanno grado  $d$ .

Esempio. •  $f(x, y, z) = 5x^3 + 3xy^2 + 4yz + 3z^2$  è un polinomio omogeneo di grado 3.

•  $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3xz + y^2$  è un polinomio omogeneo di grado 2

•  $f(x, y, z) = 3x + 2y + z$  è un polinomio omogeneo di grado 1.

•  $f(x, y, z) = 3x^2 + 2x + 1 + y^2$  non è omogeneo, perché è costituito da monomi di grado 2, di grado 1 e di grado 0 (il termine noto).

Come nel caso del piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ , le rette di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  si rappresentano mediante equazioni di primo grado, ma in questo caso, esse saranno date da un polinomio omogeneo.

Ovunque, una qualunque retta di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  ha equazione

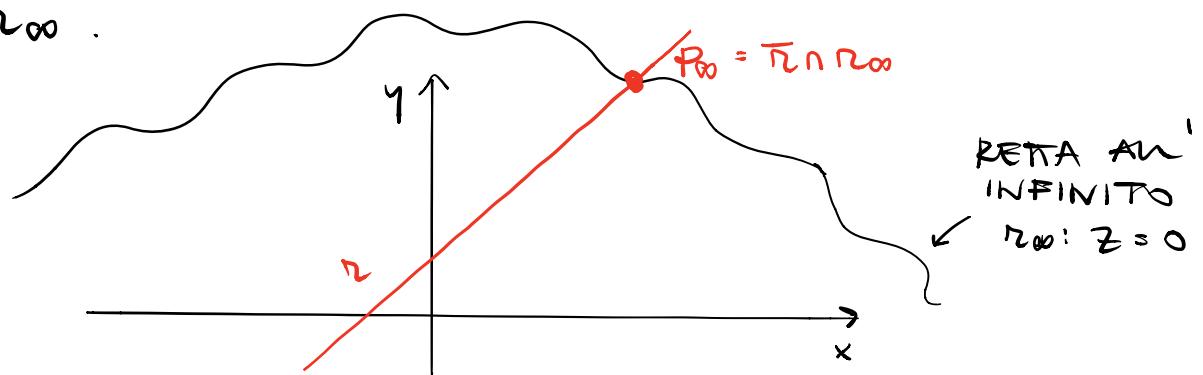
me  $\bar{r}: ax + by + cz = 0$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Pensiamo  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \mathcal{R}_{\infty}$  come unione del piano cartesiano e di una retta all'infinito, si ha che la retta all'infinito ha equazione

$$\mathcal{R}_{\infty}: z = 0$$

(perché tutti i suoi punti sono nelle forme  $[x, y, z]$ ) mentre ogni altra retta  $\bar{r}: ax + by + cz = 0$  corrisponde alle rette di  $\mathbb{R}^2$  di equazione  $r: ax + by + c = 0$

e qui viene "unito" un punto all'infinito  $P_\infty = \bar{r} \cap \bar{r}_\infty$ .



Il seguente teorema ci assicura che tutte le rette di  $\text{IP}^2(\mathbb{R})$  hanno un punto in comune, cioè in  $\text{IP}^2(\mathbb{R})$  non esistono rette parallele.

TEOREMA. Siamo  $\bar{r}$  e  $\bar{l}$  due rette nel piano proiettivo reale  $\text{P}^2(\mathbb{R})$ . Allora

$$\bar{r} \cap \bar{l} \neq \emptyset,$$

cioè due rette hanno sempre un punto in comune.

Dimostrazione. Questo teorema può essere dimostrato in vari modi. Noi ne dimostreremo una dimostrazione algebrica.

Siamo  $\bar{r}: ax + by + cz = 0$  e  $\bar{l}: a'x + b'y + c'z = 0$  le equazioni di  $\bar{r}$  e  $\bar{l}$ .

Siamo  $r: ax + by + c = 0$  e  $l: a'x + b'y + c' = 0$  le corrispondenti rette nel piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$ .

Distinguiamo alcuni casi:

- e) Se  $r$  e  $l$  non sono parallele in  $\mathbb{R}^2$ , allora

esse hanno un punto in comune, così che  $r \cap l \neq \emptyset$ .

Quindi  $r \cap l \neq \emptyset$  e il teorema è dimostrato.

b) Supponiamo che  $r$  e  $l$  siano parallele.

b1) Se  $r$  e  $l$  sono rette verticali,

esse saranno nelle forme

$$r: ax + c = 0 \quad \text{e} \quad l: a'x + c' = 0$$

cioè  $r: x = -\frac{c}{a}$  e  $l: x = -\frac{c'}{a'}$

Perciò  $\bar{r}: x = -\frac{c}{a}z$  e  $\bar{l} = x = -\frac{c'}{a'}z$ , quindi

la loro intersezione si ottiene risolvendo il

sistema

$$\begin{cases} x = -\frac{c}{a}z \\ x = -\frac{c'}{a'}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z \\ -\frac{c}{a}z = -\frac{c'}{a'}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z \\ z\left(\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a}\right) = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z = -\frac{c}{a} \cdot 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

=> Il punto  $[x, y, z] = [0, 1, 0]$  soddisfa le  
sistemi, cioè  $\bar{r} \cap \bar{l}$  è un punto  $P_{\infty}[0, 1, 0]$   
sulla retta all'infinito  $r_{\infty}: z=0$ .

b2) Infine, supponiamo che  $r$  e  $l$  siano rette oblique  
e parallele.

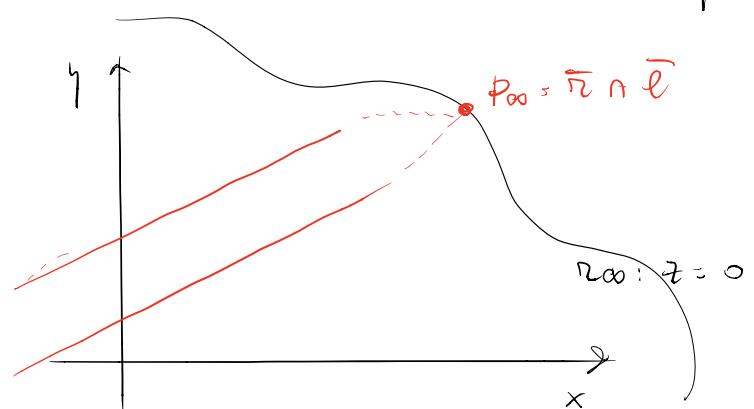
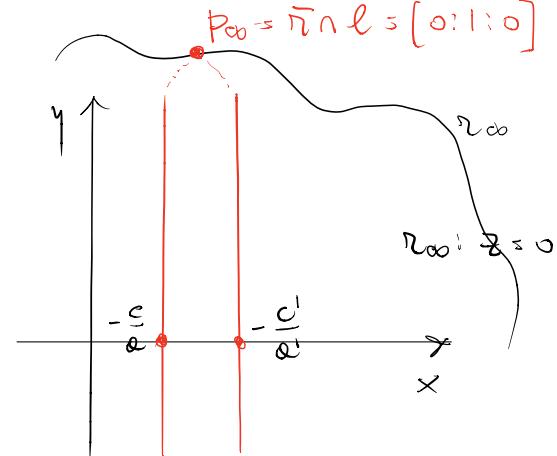
Ricordi

$$r: y = mx + q$$

$$l: y = m'x + q'$$

$$\text{con } m = -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$$

$$q = -\frac{c}{b} \quad \text{e} \quad q' = -\frac{c'}{b'}$$



Quindi  $\bar{r} : y = mx + qz$  e  $\bar{l} : y = mx + q'z$ .

Mettendo a sistema le equazioni di  $\bar{r}$  e  $\bar{l}$

otteniamo  $\begin{cases} y = mx + qz \\ y = mx + q'z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + qz \\ qz = q'z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + qz \\ (q - q')z = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Il punto  $[x, y, z] = [1, m, 0]$  soddisfa il sistema (e tutte le altre soluzioni sono ed esso proporzionali), quindi  $\bar{r} \cap \bar{l}$  è dato da un punto  $P_0[1, m, 0]$  che giace sulle rette all'infinito.  $\square$

OSSERVAZIONE. La dimostrazione precedente mostra che "rette parallele in  $\mathbb{R}^2$ " si incontrano nelle rette all'infinito di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  come nell'idea B a pagina 1.

OSSERVAZIONE. Poiché in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  non esistono rette parallele, non è soddisfatto il  $\checkmark$  POSTULATO DI EUCLIDE. Quindi il piano proiettivo reale è un esempio di geometrie non euclidiene.

OSSERVAZIONE. Nella descrizione di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  e delle sue coordinate omogenee emerge l'idea di proiezione da un punto dello spazio 3-dimensionale su un piano, come nell'idea A a pagina 1.

Infine, nelle prossime e ultime sezioni, vedremo alcune analogie con l'idea C a pagina 1.

### 3. "ANAMORFOSI" DELLE CONICHE IN $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Abbiamo visto che una retta  $r$  nel piano proiettivo reale è rappresentata da un polinomio omogeneo di grado 1 ed è ottenuta come unione di una retta  $r$  nel piano cartesiano  $\mathbb{R}^2$  e di un punto all'infinito  $r_\infty = r \cap r_\infty$ .

Vogliamo ora cercare chi si aprirà così a esse delle coniche (invincibili), cioè a PARABOLE, IPERBOLI ed ELISSI (e, in particolare, alle CIRCONFERENZE).

Nel piano cartesiano, questi luoghi geometrici sono rappresentati da equazioni di secondo grado. Analogamente, le coniche in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  sono descritte da equazioni date da un polinomio omogeneo di secondo grado.

Quindi, ogni conica in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è nella forma

$$\bar{C}: ax^2 + by^2 + cxy + dxz + eyz + fz^2 = 0$$

con  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ .

Pensando  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  come  $\mathbb{R}^2 \cup r_\infty$ , possiamo pensare  $\bar{C}$  come l'unione di una conica nel piano cartesiano

$$C: ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

e dei suoi eventuali punti all'infinito, ottenuti

dell'intersezione  $\bar{C} \cap r_\infty$ .

OSSERVAZIONE. Per avere dell'equazione di  $\bar{C}$  e quella di  $C$ , abbriemo posto  $z=1$ .

Questo processo si chiama DEMOGENEZIAZIONE rispetto a  $z$  (e viene fatto così perché le rette all'infinito  $r_\infty$  ha equazione  $z=0$ ).

Ora, studieremo quanti sono i punti all'infinito delle curve coniche di  $\mathbb{R}^2$ .

1) Se  $C$  è un'ELLISSE o, in particolare, una CIRCONFERENZA,  $\bar{C}$  non ha punti all'infinito, cioè  $\bar{C} \cap r_\infty = \emptyset$ .

Mostriremo in un esempio, anche se questo fatto è vero per ogni ellisse (o circonferenza)

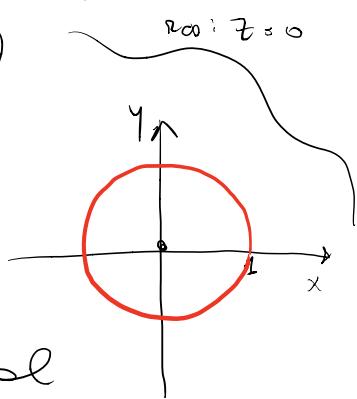
Considereremo la circonferenza  $C: x^2 + y^2 - 1 = 0$

Eso è la curva in  $\mathbb{R}^2$  corrispondente

alla conica  $\bar{C}: x^2 + y^2 - z^2 = 0$ .

Allora l'intersezione  $\bar{C} \cap r_\infty$  è data dal

sistema  $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$



Allora l'unica soluzione del sistema è data dal punto  $[x, y, z] = [0, 0, 0]$ , che (come abbiamo visto) non appartiene a  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ .

2) Una PARABOLA ha un solo punto all'infinito. (anche se l'intuizione potrebbe farci pensare che

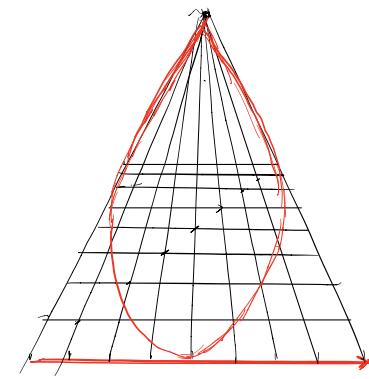
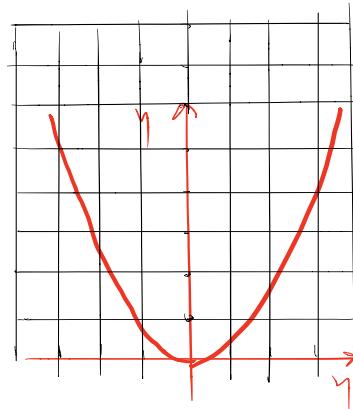
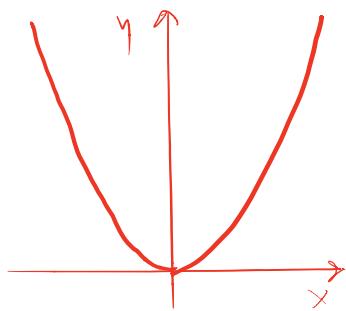
esse ne ottiene 2, uno per ciascun ramo della parabola).

Il fatto è che i 2 rami della parabola si incontrano sulla retta all'infinito.

Aveva questa volta, verifichiamolo solo in un esempio.

$$\text{Sia } C: y - x^2 = 0, \text{ così che } \bar{C} : yz - x^2 = 0$$

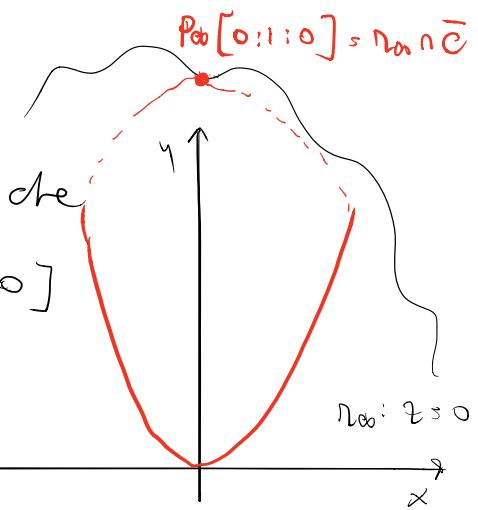
Prima si fare i conti, cerchiamo di convincerne "mediante le prospettive". A tal fine, rappresentiamo le parabole sul piano cartesiano, mettiamo una quadrettatura sul piano e, infine, mettiamo il piano "in prospettiva" come se lo appoggiassimo a terra.



Se un punto di vista algebrico, i punti all'infinito di  $\bar{C} : yz - x^2 = 0$  si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} yz - x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  vi è un solo punto all'infinito che ha coordinate  $[x, y, z] = [0 : 1 : 0]$



3) Infine, l'iperbole ha 2 punti all'infinito, uno per ognuna asintoto.

Anche per l'iperbole, vediamo che cosa ce lo permettere.

Scegli  $C: xy - 1 = 0$ , che

corrisponde alla

conica di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  avente  
equazione

$$\bar{C}: xy - z^2 = 0$$

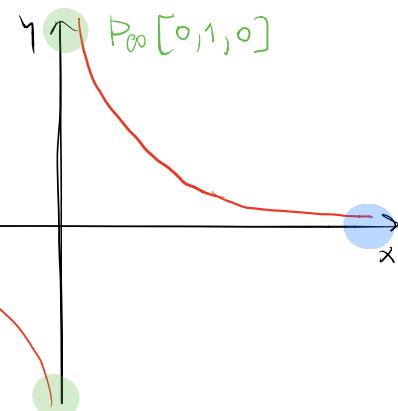
le coordinate dei suoi punti

sull'infinito si ottengono come soluzioni del  
sistema

$$\begin{cases} xy - z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Ottieniamo 2 punti all'infinito:

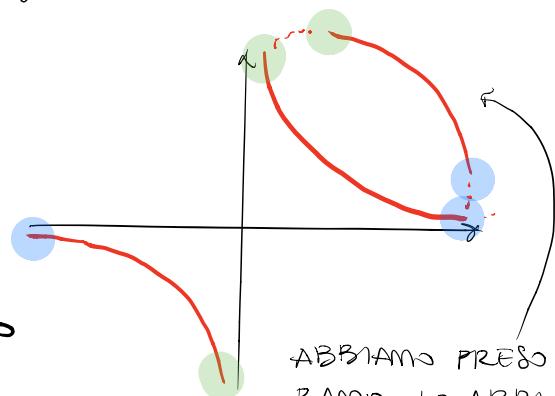
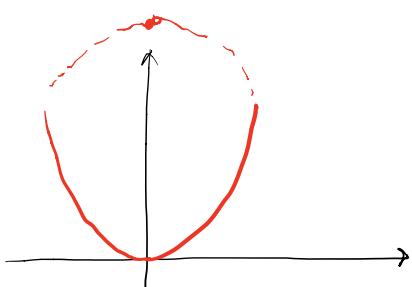
$$P_\infty [0, 1, 0] \text{ e } Q_\infty [1, 0, 0]$$



OSSERVAZIONE. Dalle descrizioni appena viste si ha che  
in un certo senso, l'iperbole si chiude all'infinito  
come se fosse un'ellisse.

tagliate in 2 delle rette  $r_\infty$

Inoltre, anche per  
le parabole, abbiamo  
visto che i suoi vertici  
si "chiudono" all'infinito



ABBIAMO PRESO L'ALTRO  
RAMO, LO ABBIAMO  
RIBALTO IN MODO DA  
FAR CONCIDERE I PUNTI  
ALL'INFINITO E, INFINE,  
INCOLLIAMO I DUE RAMI.

A breve, vedremo infatti che in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  non è  
possibile stabilire se una data conica  $\bar{C}$  sia  
un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

In particolare, vedremo che "a seconda del punto da cui osserveremo la conica, esse apparirà di volta in volta un'ellisse (o una circonferenza), una parabola o un'iperbole; ormai vedremo una sorta di "ammortato" delle coniche immersibili in  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ " (in linea con l'idea C di pagina 1).

In particolare, osserveremo questo fenomeno mediante le seguenti coniche di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ :

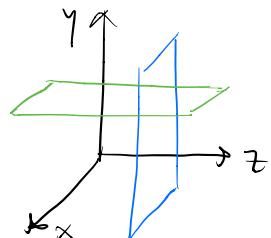
$$\bar{C}: x^2 - 2yz + z^2 = 0.$$

Prima di cominciare le nostre analisi, osserveremo che finora abbiamo posto che le rette all'infinito fosse le rette  $\mathbb{R}\mathbb{P}$  di equazione  $z=0$ .

Tuttavia, questa è una scelta che corrisponde allo scegliere un particolare sistema di riferimento o punto di osservazione.

In fatto, era un'ipotesi del fatto che per rappresentare le rette di  $\mathbb{R}^3$  abbiamo scelto il piano  $z=1$ .

Se, ad esempio, avessimo scelto il piano  $y=1$ , le rette all'infinito sarebbero state quelle di equazione  $y=0$  (che esse stesse sono diverse).



Quello che faremo sarà scegliere di volta in volta una retta all'infinito diversa, ottenendo una conica diversa.

- Inizialmente, poniamo  $z_00$ :  $z=0$ , perciò otteniamo l'equazione di  $\bar{C}$ :  $x^2 - 2yz + z^2 = 0$  ponendo  $z=1$ .

In questo modo, ottieniamo la conica  $[0, 1, 0]$

$$C_z: x^2 - 2y + 1 = 0,$$

ossia  $C_z: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

è una PARABOLA.

Il vertice della parabola è nel punto  $(0, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$ , da

come punto di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  è  $[0, \frac{1}{2}, 1]$ .

Il punto all'infinito di  $C_z$  è la soluzione del sistema  $\begin{cases} x^2 - 2yz + z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ , cioè  $[x, y, z] = [0, 1, 0]$ .

- Poniamo ora che la retta all'infinito è la retta  $z_00$ :  $y=0$ .

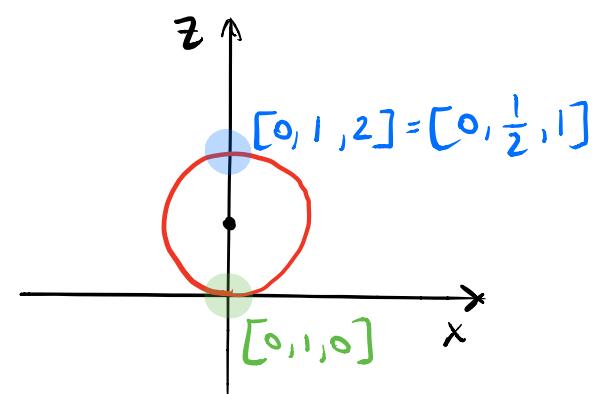
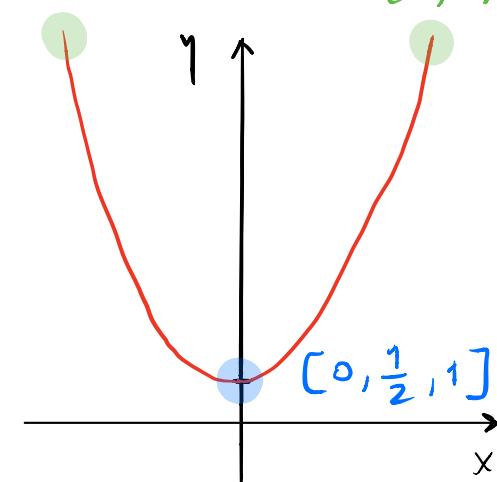
Allora, otteniamo l'equazione della conica  $\bar{C}: x^2 - 2yz + z^2 = 0$  rispetto a  $y$ , ossia poniamo  $y=1$ .

In questo modo ottieniamo

$$C_y: x^2 - 2z + z^2 = 0$$

ossia  $C_y: x^2 + (z-1)^2 = 1$

che è l'equazione di una CIRCONFERENZA di centro  $(x, z) = (0, 1)$  e raggio 1.



In particolare, le le circonferenze  $C_y$  interseca gli assi cartesiani nei punti  $(\overset{x}{0}, \overset{z}{0}) \in \mathbb{R}^2$  e  $(\overset{x}{0}, \overset{z}{2}) \in \mathbb{R}^2$  che corrispondono ai punti di  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  di coordinate  $[0, 1, 0]$  e  $[0, 1, 2] = [0, \frac{1}{2}, 1]$

$\hookrightarrow$  i due punti sono proporzionali.

- Infine, assumiamo che le rette all'infinito abbiano equazione  $x_0 : x = 0$  e scommegenericità rispetto a  $x$  ponendo  $x=1$  nell'equazione  $\bar{C} : x^2 - 2yz + z^2 = 0$ .

Ottieniamo quindi la conica  $C_x : 1 - 2yz + z^2 = 0$ , cioè  $C_x : z(2y - z) = 1$  è un'IPERBOLE con estinti  $z=0$  e  $2y-z=0$ .

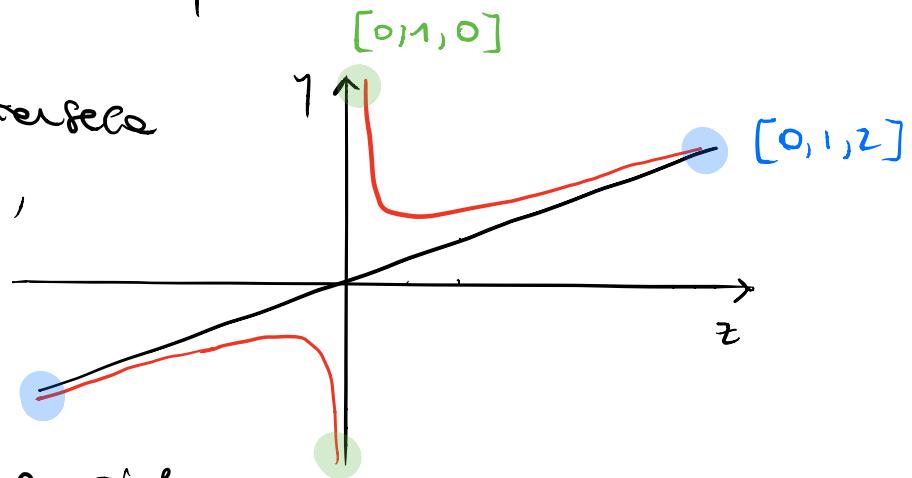
Ora la  $C_x$  non interseca gli assi cartesiani, ma ha 2 punti all'infinito,

che si ottengono

come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2yz + z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(2y - z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 0 \\ z = 2y \end{cases}$$

ossia  $[0, 1, 0]$  e  $[0, 1, 2]$ .



In conclusione, abbiamo visto come scommegenericità della conica proiettiva  $\bar{C} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  rispetto a varie rette diverse, si ottengano coniche euclidiene  $C_x, C_y$  e  $C_z$  diverse.