

Geometria oltre Euclide

dall'*Ottica* di Euclide alla geometria proiettiva

Francesco Bastianelli

Nella prima parte di questo seminario, abbiamo visto come, con l'avvento della prospettiva, si siano consolidate le seguenti idee, in parte presenti già nell'*"Ottica"* di Euclide:

- A. la rappresentazione sul piano della realtà "euclidea" 3-dimensionale avviene per proiezione da un punto (l'occhio) e i punti dello spazio appartenenti allo stesso raggio visuale vengono proiettati sullo stesso punto del piano;
- B. Introdurre una linea all'orizzonte (all'"infinito") sulle quale si incontrano le rette che nella realtà "euclidea" 3-dimensionale appaiono parallele
- C. Punti di osservazione differenti "deformano" l'oggetto osservato (si pensi all'anamorfosi).

Lo scopo di questa seconda parte del seminario è introdurre il "piano proiettivo reale" evidenziandone alcune proprietà e, nel farlo, noteremo come queste idee siano in qualche modo presenti. Chiaramente, visto il poco tempo a disposizione

e visto le mancanza di alcune nozioni preliminari che servirebbero per una trattazione rigorosa, saremo forzatamente poco formali nell'introdurre il piano proiettivo reale e le sue proprietà.

Questa seconda parte del seminario è strutturata come segue:

1. Inizialmente, introdurremo la "retta proiettiva reale".
2. Poi passeremo a definire il piano proiettivo reale e ne discuteremo alcune proprietà, come il fatto che tutte le rette hanno un punto in comune (cioè non esistono rette parallele).
3. Infine studieremo le coniche sul piano proiettivo reale e mostreremo con un esempio che non è possibile distinguere parabole, ellissi ed iperboli.

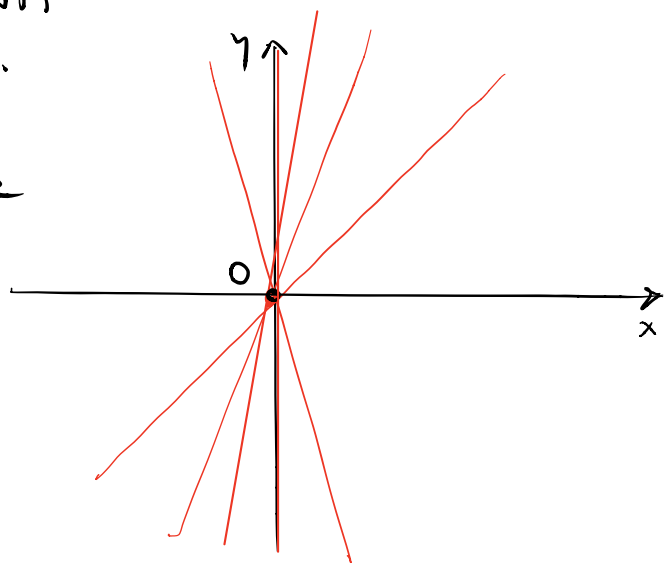
1. LA RETTA PROIETTIVA REALE $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Prima di introdurre il piano proiettivo reale, concentriamoci sul caso (più semplice) della retta proiettiva reale.

Nel seguito, indichiamo con \mathbb{R}^2 il piano cartesiano in cui abbiamo fissato un sistema di riferimento ortogonale

DEFINIZIONE. Chiameremo RETTA PROIETTIVA REALE l'insieme i cui elementi sono le rette del piano cartesiano che passano per l'origine. Tali elementi sono detti PUNTI della retta proiettiva reale.

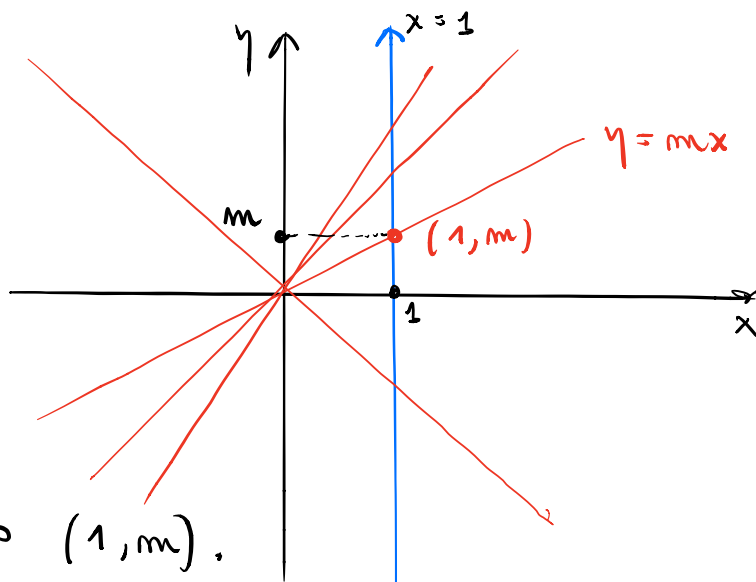
La retta proiettiva reale viene anche detta SPAZIO PROIETTIVO REALE DI DIMENSIONE 1 e viene indicata con $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ \rightarrow DI DIMENSIONE 1
 $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ \rightarrow REALE
 SPAZIO PROIETTIVO

Cerchiamo di descrivere meglio questo insieme. A questo scopo, consideriamo le rette di equazione $x=1$.

Tutte le rette "oblique" passanti per l'origine hanno equazione $y=mx$ e incontrano la retta $x=1$ nel punto $(1, m)$.



Quindi, se consideriamo la retta $x=1$ come se fosse un asse reale, ogni retta obliqua passante per l'origine di equazione $y=mx$, corrisponde ad un valore m sulla retta $x=1$.

\hookrightarrow il suo COEFFICIENTE ANGOLARE.

Questa descrizione, però, non tiene conto della

rette verticali di equazione $x = 0$.

Perché $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \{ \text{retta verticale } x=0 \} \cong \mathbb{R}$

↳ RETTA $x=1$

Come possiamo includere anche la retta $x=0$?

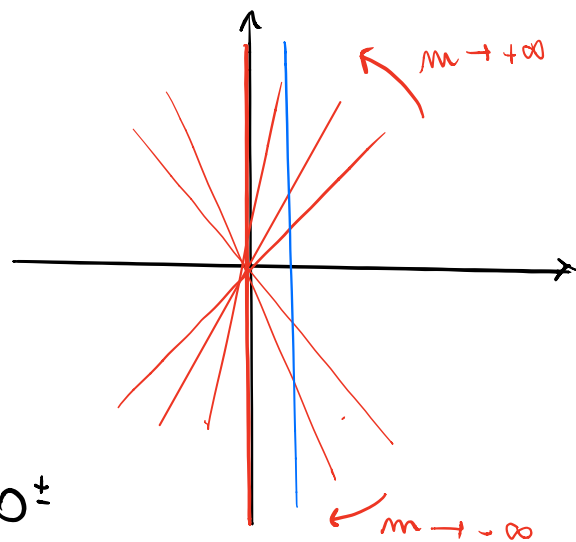
Osserviamo che se $m \rightarrow +\infty$, la retta $y = mx$ tende alla retta $x=0$.

Analogamente, se $m \rightarrow -\infty$, la retta $y = mx$ tende alla stessa retta $x=0$.

Passando alla scrittura in
forme implicite, abbiamo
che, considerate una
retta generica passante per 0

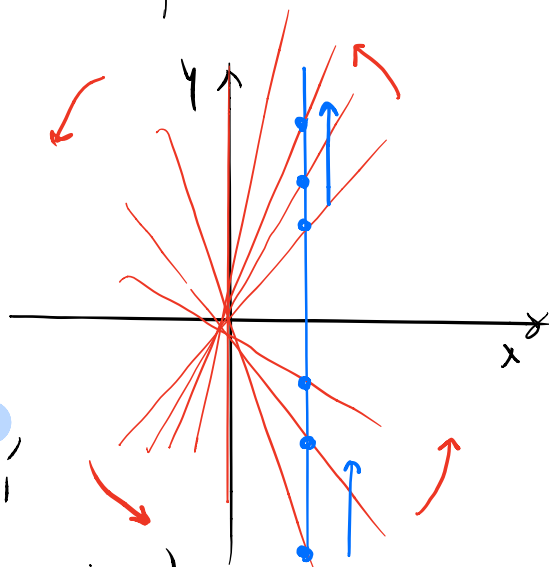
$$r: ax + by = 0,$$

sì che il limite per $b \rightarrow 0^\pm$
di r è proprio la retta $x=0$.



Ricorrendo alla scrittura in forme esplicite
si ha che $m = -\frac{a}{b}$ e $\lim_{b \rightarrow 0^\pm} m = \mp \infty$

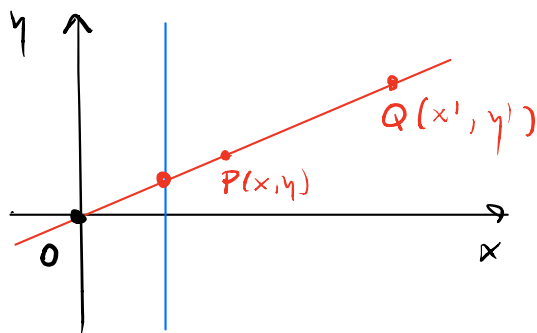
Quindi, se muoviamo in senso
antiorario una retta tenendo
fissa l'origine e seguiamo il
punto corrispondente sulla retta $x=1$,
andremo a finire in un punto all'
infinito (che corrisponde alla retta $x=0$)
e ricominceremo a percorrere la retta $x=1$ da $-\infty$.
In un certo senso, è come se i punti $+\infty$ e $-\infty$
della retta $x=1$ si congiungessero.



Perciò possiamo pensare la retta proiettiva reale come unione dell'asse reale (la retta $x=1$) con un "punto all'infinito" (corrispondente a $x=0$):

$$P^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

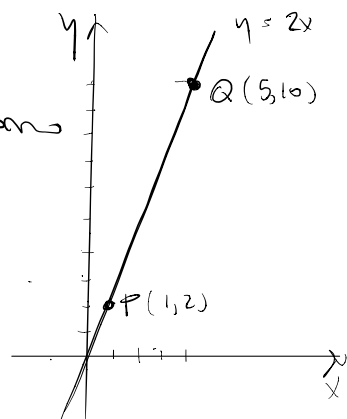
Infine, vogliamo introdurre un sistema di coordinate in $P^1(\mathbb{R})$. Per farlo, osserviamo che per ogni punto $P(x, y)$ nel piano cartesiano, con $P \neq O$, esiste una sola retta passante per O e per P (e questa retta è un elemento di $P^1(\mathbb{R})$).



Inoltre, se $Q(x', y')$ appartiene alla stessa retta, allora P e Q identificano lo stesso punto di $P^1(\mathbb{R})$.

In questo caso, le coordinate di P e Q sono proporzionali, cioè esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x' = \alpha x$ e $y' = \alpha y$.

Esempio. $P(1, 2)$ e $Q(5, 10)$ appartengono entrambi alla retta $y=2x$. In questo caso si ha che $x' = 5x$ e $y' = 5y$ (cioè $\alpha=5$).



Perché P e Q devono indicare lo stesso punto di $P^1(\mathbb{R})$, indichiamo i punti di $P^1(\mathbb{R})$ con le coordinate $[x, y]$, con la proprietà che

1) Se $\exists a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, tale che $x' = ax$ e $y' = ay$,
allora $[x, y] = [x', y']$

(cioè due punti proporzionali P e Q individuano
la stessa retta).

2) $[x, y] \neq [0, 0]$, perché se $P(x, y) = O(0, 0)$ non è
vero che esiste una sola retta che passa per P e O .
(Il punto $[0, 0]$ non appartiene a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$!)

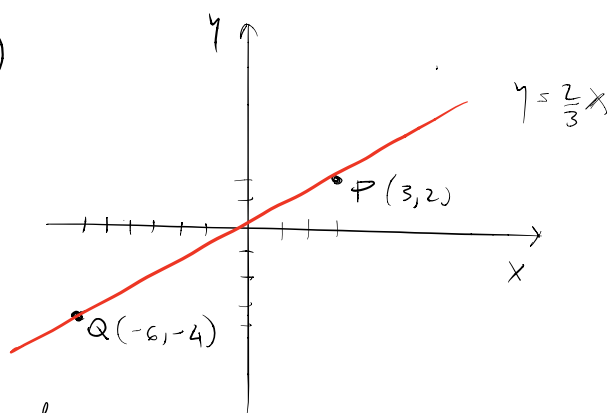
Queste coordinate si chiamano COORDINATE OMOGENEE
(e sono state introdotte da MÖBIUS (1827) e PLÜCKER (1830)).

Esempio Il punto $[3, 2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

corrisponde alla retta di

equazione $2x - 3y = 0$, cioè

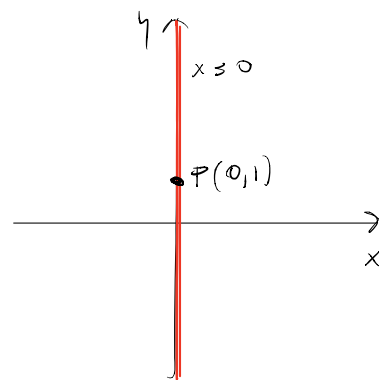
$$y = \frac{2}{3}x$$



Il punto $[-6, -4] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ corrisponde
alla stessa retta, cioè $[3, 2] = [-6, -4]$

(Infatti $-6 = (-2) \cdot 3$ e $-4 = (-2) \cdot 2$)

Il punto $[0, 1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ corrisponde
alla retta $x = 0$, cioè al punto
all'infinito di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.



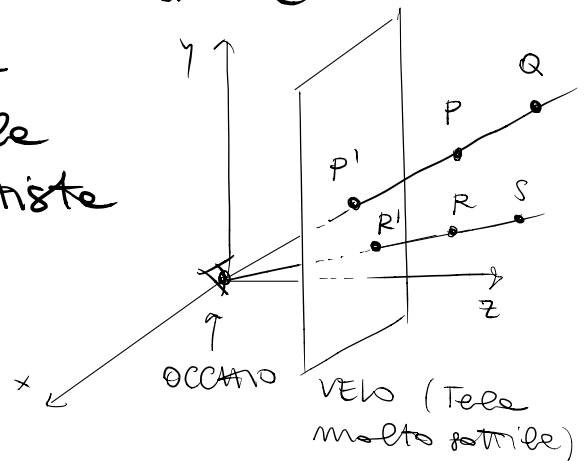
In realtà, tutti i punti nella

forma $[0, a] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ coincidono con $[0, 1]$ perché

$$0 = a \cdot 0 \quad \text{e} \quad a = a \cdot 1.$$

2. IL PIANO PROIETTIVO REALE $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Torniamo alla situazione 3-dimensionale che era oggetto della prospettiva ed alla rappresentazione su tela mediante il "Velo" di Leon Battista Alberti.



Nel seguito, indichiamo con \mathbb{R}^3 lo spazio euclideo

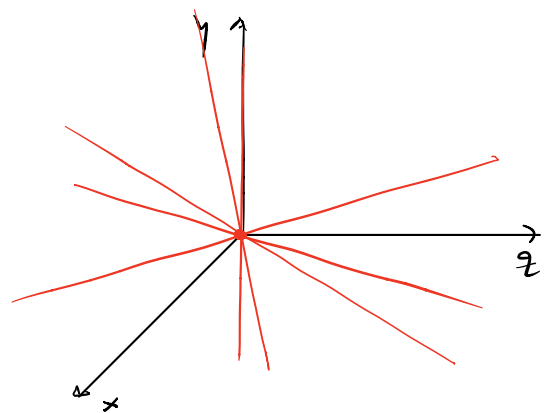
3-dimensionale in cui abbiamo fissato un sistema di riferimento ortogonale.

Analogamente al caso della retta $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, definiremo il piano proiettivo reale come segue.

DEFINIZIONE. Il PIANO PROIETTIVO REALE è l'insieme i cui elementi sono le rette dello spazio \mathbb{R}^3 che passano per l'origine.

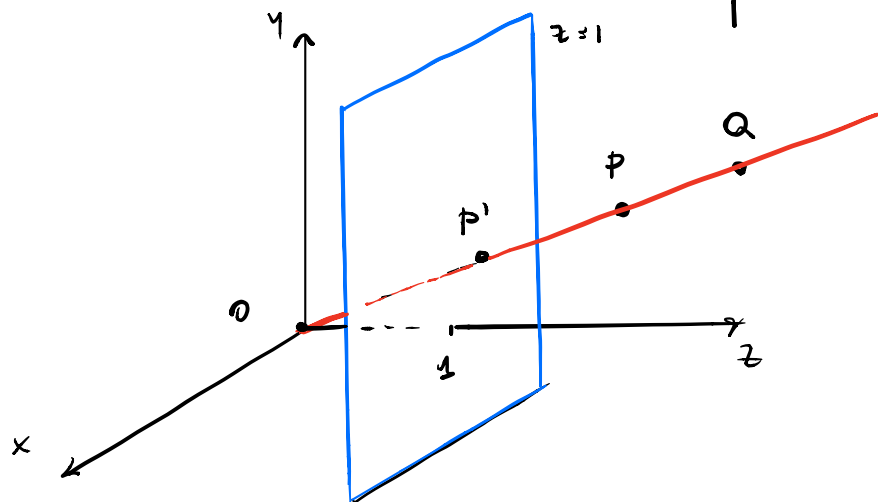
Tali elementi sono detti PUNTI del piano proiettivo reale.

Il piano proiettivo reale è detto anche SPAZIO PROIETTIVO REALE di DIMENSIONE 2 e viene indicato con $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.



di DIMENSIONE 2
 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
SPAZIO PROIETTIVO
REALE

Al fine di descrivere meglio i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, ragioniamo come nel caso delle rette proiettive reali e consideriamo il piano di equazione $z=1$.



Anche in questo caso, dato un punto $P(x,y,z)$ esiste un'unica retta passante per l'origine O e per P , cioè esiste

un unico punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associato a P .

Inoltre, due punti dello spazio $P(x,y,z)$ e $Q(x',y',z')$ individuano la stessa retta se e solo se le loro coordinate sono proporzionali, cioè se esiste un numero $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$x' = \alpha x, \quad y' = \alpha y \quad \text{e} \quad z' = \alpha z.$$

Allora, introduciamo delle coordinate su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, dette anche COORDINATE OMOGENEE, mediante cui ogni punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sarà individuato da una terne $[x,y,z]$ avente le seguenti proprietà:

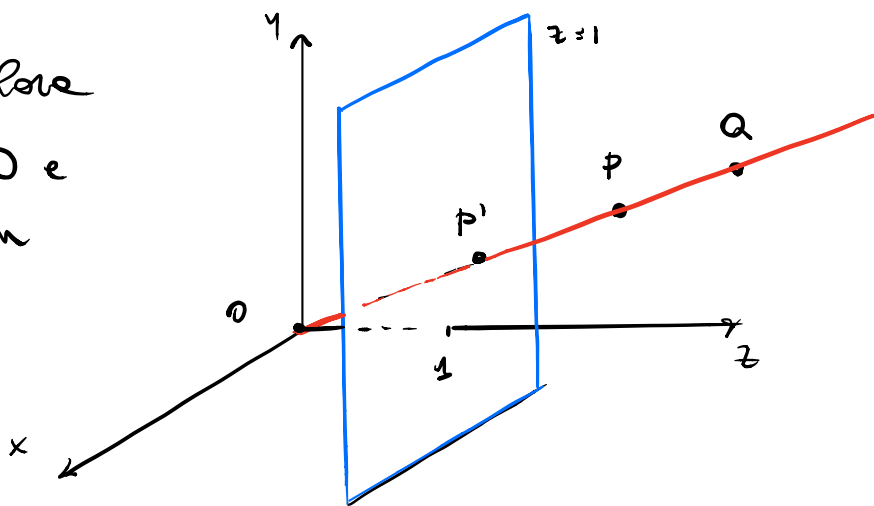
1) Due terne $[x,y,z]$ e $[x',y',z']$ individuano lo stesso punto se e solo se $\exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che

$$x' = \alpha x, \quad y' = \alpha y \quad \text{e} \quad z' = \alpha z.$$

2) $[x,y,z] \neq [0,0,0]$ perché se $P(0,0,0) = O(0,0,0)$ non è vero che esiste una sola retta passante per P e O .
(Il punto $[0,0,0]$ non è un punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$!)

Quindi, se $P(x_p, y_p, z_p)$ è un punto dello spazio, allora la retta passante per O e P è il punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di coordinate omogenee $[x_p, y_p, z_p]$.

Inoltre, se $z_p \neq 0$, allora la retta passante per O e per P corrisponde ad un unico punto P' sul piano $z=1$ (ovè il punto di intersezione tra la retta e il piano)



Invece, le rette che giacciono nel piano $z=0$ (ovè il piano generato dagli assi x e y) sono parallele al piano $z=1$ e non lo incontrano mai.

Osserva che queste rette corrispondono ad un punto di coordinate $[x_p, y_p, 0]$ (perché tutti i punti nel piano xy hanno coordinate $P(x_p, y_p, 0)$).

Questi punti corrispondono ai punti di una retta proiettiva reale, che chiamiamo RETTA ALL'INFINITO e indichiamo con π_∞ .

Riepilogando, il piano proiettivo reale può essere pensato come l'unione del piano $z=1$ (che è naturalmente identificato con il piano cartesiano \mathbb{R}^2) con la retta all'infinito π_∞ , ovè

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{\pi_\infty\}.$$

Prima di procedere oltre, diamo la seguente

DEFINIZIONE. Sia $d \in \mathbb{N}$ un numero naturale.

Un polinomio $f(x, y, z)$ si dice OMOGENEO di grado d se tutti i monomi che lo compongono hanno grado d .

Esempi. • $f(x, y, z) = 5x^3 + 3xy^2 + 4xyz + 3z^3$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

• $f(x, y, z) = x^2 + 2xy + 3xz + y^2$ è un polinomio omogeneo di grado 2.

• $f(x, y, z) = 3x + 2y + z$ è un polinomio omogeneo di grado 1.

• $f(x, y, z) = 3x^2 + 2x + 1 + y^2$ non è omogeneo, perché è costituito da monomi di grado 2, di grado 1 e di grado 0 (il termine noto).

Come nel caso del piano euclideo \mathbb{R}^2 , le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si rappresentano mediante equazioni di primo grado, ma in questo caso, esse saranno date da un polinomio omogeneo.

Quindi, una qualunque retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha equazione
me $\pi: ax + by + cz = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Pensando $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \ell_\infty$ come unione del piano cartesiano e di una retta all'infinito, si ha che la retta all'infinito ha equazione

$$\ell_\infty: z = 0$$

(perché tutti i suoi punti sono nelle forme $[x, y, 0]$)

mentre ogni altra retta

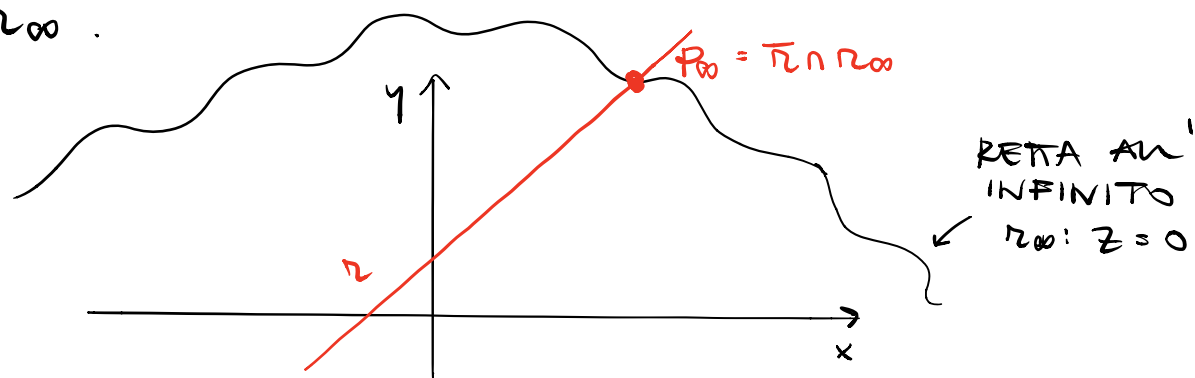
$$\bar{\pi}: ax + by + cz = 0$$

corrisponde alle rette di \mathbb{R}^2 di equazione

$$r: ax + by + c = 0$$

e ci viene "unito" un punto all'infinito

$$p_{\infty} = \bar{\pi} \cap r_{\infty}.$$



Il seguente teorema ci assicura che tutte le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ hanno un punto in comune, cioè in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non esistono rette parallele.

TEOREMA. Siano $\bar{\pi}$ e \bar{l} due rette nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Allora

$$\bar{\pi} \cap \bar{l} \neq \emptyset,$$

cioè due rette hanno sempre un punto in comune.

Dimostrazione. Questo teorema può essere dimostrato in vari modi. Noi ne diamo una dimostrazione algebrica.

Siano $\bar{\pi}: ax + by + cz = 0$ e $\bar{l}: a'x + b'y + c'z = 0$ le equazioni di $\bar{\pi}$ e \bar{l} .

Siano $r: ax + by + c = 0$ e $l: a'x + b'y + c' = 0$ le corrispondenti rette nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 .

Distinguiamo alcuni casi:

a) Se r e l non sono parallele in \mathbb{R}^2 , allora

esse hanno un punto in comune, così che $\pi \cap l \neq \emptyset$.

Quindi $\pi \cap \bar{l} \neq \emptyset$ e il teorema è dimostrato.

b) Supponiamo che π e l siano parallele.

b1) Se π e l sono rette verticali,

esse saranno nelle forme

$$\pi: ax + c = 0 \quad \text{e} \quad l: a'x + c' = 0$$

$$\text{cioè} \quad \pi: x = -\frac{c}{a} \quad \text{e} \quad l: x = -\frac{c'}{a'}$$

perciò $\pi: x = -\frac{c}{a}z$ e $\bar{l}: x = -\frac{c'}{a'}z$, quindi

la loro intersezione si ottiene risolvendo il

$$\begin{aligned} \text{sistema} \quad \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z \\ x = -\frac{c'}{a'}z \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z \\ -\frac{c}{a}z = -\frac{c'}{a'}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z \\ z\left(\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a}\right) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z = -\frac{c}{a} \cdot 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

\Rightarrow Il punto $[x, y, z] = [0, 1, 0]$ soddisfa le
sisteme, cioè $\pi \cap \bar{l}$ è un punto $P_{\infty}[0, 1, 0]$
sulle rette all'infinito $\pi_{\infty}: z = 0$.

b2) Infine, supponiamo che π e l siano rette oblique
e parallele.

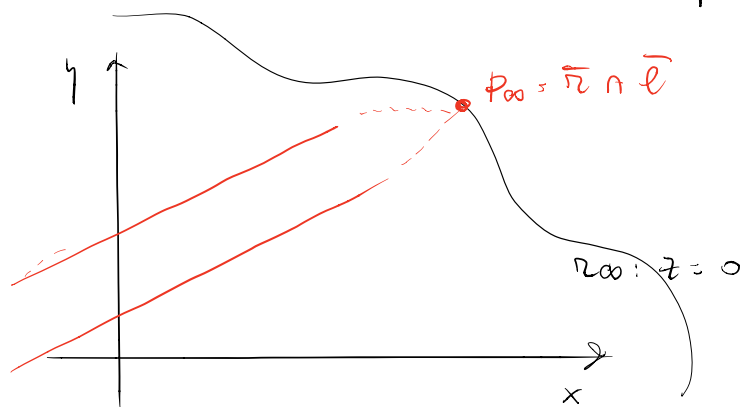
Per cui

$$\pi: y = mx + q$$

$$\text{e} \quad l: y = mx + q'$$

$$\text{con} \quad m = -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$$

$$q = -\frac{c}{b} \quad \text{e} \quad q' = -\frac{c'}{b'}$$



Quindi $\bar{r}: y = mx + qz$ e $\bar{l}: y = mx + q'z$.

Mettemmo a sistema le equazioni di \bar{r} e \bar{l}

$$\text{otteniamo } \begin{cases} y = mx + qz \\ y = mx + q'z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + qz \\ qz = q'z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + qz \\ (q - q')z = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ z = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow Il punto $[x, y, z] = [1, m, 0]$ soddisfa il sistema (e tutte le altre soluzioni sono ad esso proporzionali), quindi $\bar{r} \cap \bar{l}$ è dato da un punto $P_{\infty}[1, m, 0]$ che giace sulle rette all'infinito. \square

OSSERVAZIONE. La dimostrazione precedente mostra che "rette parallele in \mathbb{R}^2 si incontrano nelle rette all'infinito di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ " come nell'idea B a pagina 1.

OSSERVAZIONE. Poiché in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non esistono rette parallele, non è soddisfatto il \forall POSTULATO DI EUCLIDE. Quindi il piano proiettivo reale è un esempio di geometrie non euclidee.

OSSERVAZIONE. Nella descrizione di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e delle sue coordinate omogenee emerge l'idea di proiezione da un punto dello spazio 3-dimensionale su un piano, come nell'idea A a pagina 1.

Infine, nelle prossime ed ultima sezione, vedremo alcune analogie con l'idea C a pagina 1.

3. "ANAMORFOSI" DELLE CONICHE IN $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Abbiamo visto che una retta \bar{r} nel piano proiettivo reale è rappresentata da un polinomio omogeneo di grado 1 ed è ottenuta come unione di una retta r nel piano cartesiano \mathbb{R}^2 e di un punto all'infinito $P_\infty = r \cap r_\infty$.

Vogliamo ora cercare di capire cosa accade alle coniche (immutabili), cioè le PARABOLE, IPERBOLI ed ELLISSI (e, in particolare, alle CIRCONFERENZE).

Nel piano cartesiano, questi luoghi geometrici sono rappresentati da equazioni di secondo grado. Analogamente, le coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono descritte da equazioni date da un polinomio omogeneo di secondo grado.

Quindi, ogni conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è nella forma

$$\bar{C}: ax^2 + by^2 + cxy + dxz + eyz + fz^2 = 0$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Pensando $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come $\mathbb{R}^2 \cup r_\infty$, possiamo pensare

\bar{C} come l'unione di una conica nel piano cartesiano

$$C: ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

e dei suoi eventuali punti all'infinito, ottenuti

dall'intersezione $\bar{C} \cap \pi_\infty$.

OSSERVAZIONE. Per passare dall'equazione di \bar{C} a quella di C , abbiamo posto $z=1$.

Questo processo si chiama DEOMOGENEIZZAZIONE rispetto a z (e viene fatto così perché la retta all'infinito π_∞ ha equazione $z=0$).

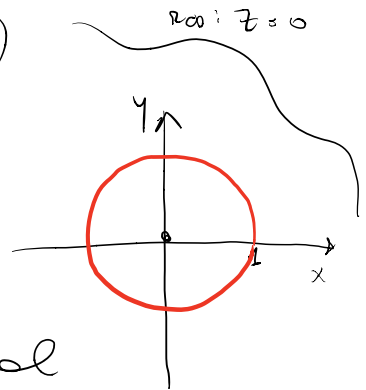
Ora, studiamo quanti sono i punti all'infinito delle varie coniche di \mathbb{R}^2 .

- 1) Se C è un'ELLISSE o, in particolare, una CIRCONFERENZA, \bar{C} non ha punti all'infinito, cioè $\bar{C} \cap \pi_\infty = \emptyset$.

Mostriamolo in un esempio, anche se questo fatto è vero per ogni ellisse (o circonferenza)

Consideriamo la circonferenza $C: x^2 + y^2 - 1 = 0$

Essa è la curva in \mathbb{R}^2 corrispondente alla conica $\bar{C}: x^2 + y^2 - z^2 = 0$.



Allora l'intersezione $\bar{C} \cap \pi_\infty$ è data dal

$$\text{Sistema } \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è data dal punto $[x, y, z] = [0, 0, 0]$, che (come abbiamo visto) non appartiene a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

- 2) Una PARABOLA ha un solo punto all'infinito.
(anche se l'intuizione potrebbe farci pensare che

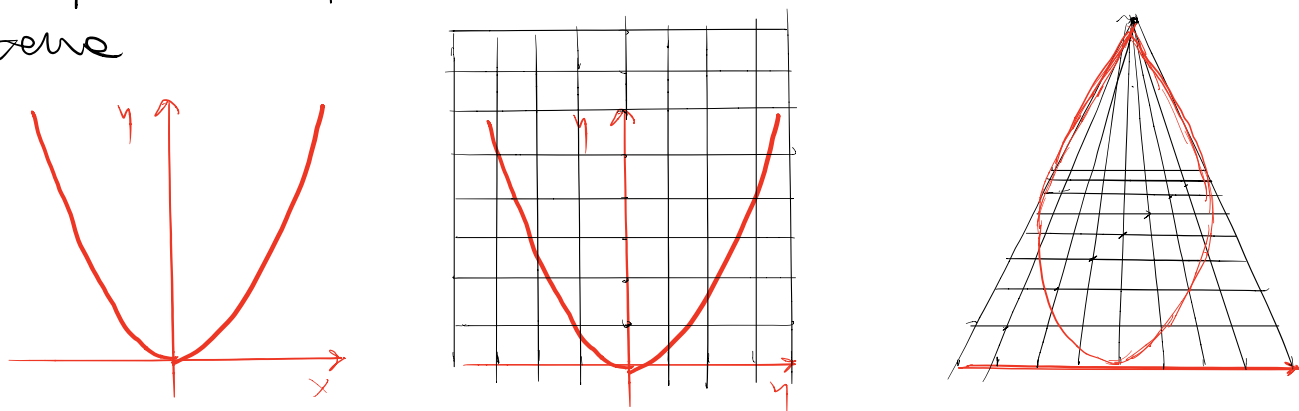
esse ne abbia 2, uno per ciascun ramo della parabola).

Il fatto è che i 2 rami della parabola si incontrano nella retta all'infinito.

Anche questa volta, verifichiamolo solo in un esempio.

Sia $C: y - x^2 = 0$, così che $\bar{C}: yz - x^2 = 0$

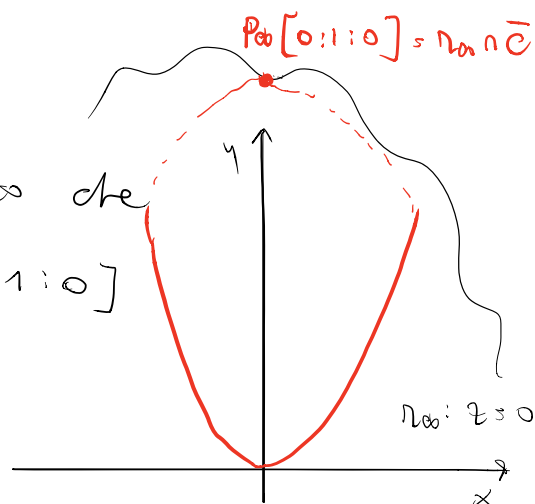
Prima di fare i conti, cerchiamo di comprenderne "mediante le prospettive". A tal fine, rappresentiamo la parabola nel piano cartesiano, mettiamo una quadrettatura nel piano e, infine, mettiamo il piano "in prospettiva" come se lo appoggiassimo a terra.



Da un punto di vista algebrico, i punti all'infinito di $\bar{C}: yz - x^2 = 0$ si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} yz - x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

\Rightarrow vi è un solo punto all'infinito che ha coordinate $[x, y, z] = [0:1:0]$



3) Infine, l'IPERBOLE ha 2 punti all'infinito, uno per ciascun asintoto.

Anche per l'iperbole, vediamo in un caso particolare.

Sia $C: xy - 1 = 0$, che corrisponde alla conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ avente equazione

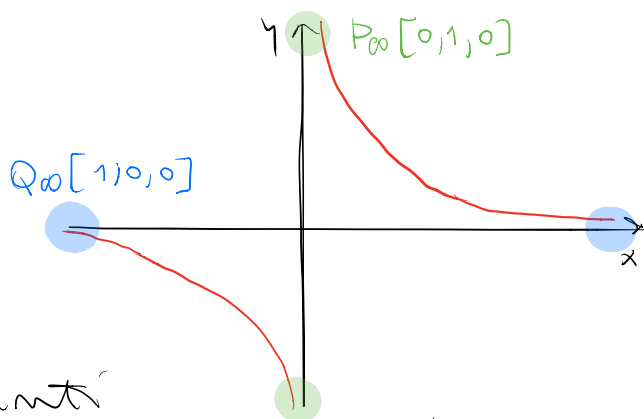
$$\bar{C}: xy - z^2 = 0$$

le coordinate dei suoi punti all'infinito si ottengono come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} xy - z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

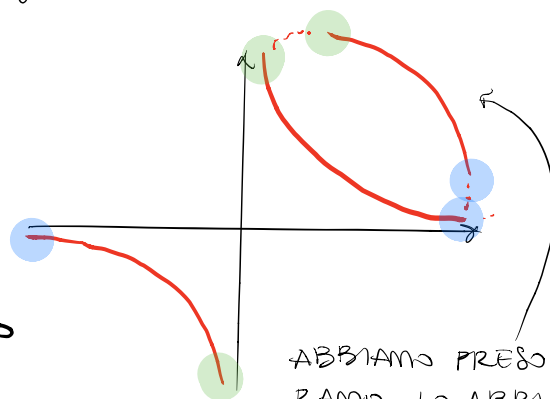
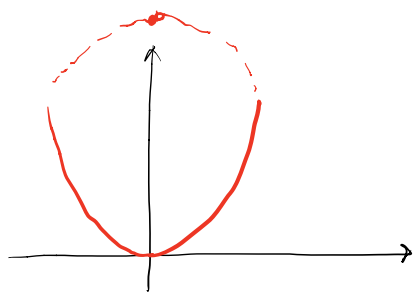
\Rightarrow Otteniamo 2 punti all'infinito:

$$P_\infty [0, 1, 0] \text{ e } Q_\infty [1, 0, 0]$$



OSSERVAZIONE. Dalla descrizione appena vista si ha che in un certo senso, l'iperbole si chiude all'infinito come se fosse un'ellisse. tagliata in 2 dalle rette π_∞

Inoltre, anche per la parabola, abbiamo visto che i suoi rami si "chiudono" all'infinito



ABBIAMO PRESO L'ALTRO RAMO, LO ABBIAMO RIBALTATO IN MODO DA FAR CONCIDERE I PUNTI ALL'INFINITO E, INFINE, INCOLIAMO I DUE RAMI.

A breve, vedremo infatti che in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è possibile stabilire se una data conica \bar{C} sia un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

In particolare, vedremo che "a seconda del punto da cui osserviamo la conica, essa apparirà di volta in volta un'ellisse (o una circonferenza), una parabola o un'iperbole, ossia vedremo una sorta di "ammorfi" delle coniche immeribili in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ " (in linea con l'idea C di pagina 1).

In particolare, osserveremo questo fenomeno mediante la seguente conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

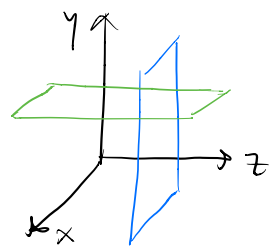
$$\bar{C}: x^2 - 2yz + z^2 = 0.$$

Prima di cominciare la nostra analisi, osserviamo che finora abbiamo posto che la retta all'infinito fosse la retta \mathbb{R}^3 di equazione $z=0$.

Tuttavia, questa è una scelta che corrisponde allo scegliere un particolare sistema di riferimento o punto di osservazione.

Di fatto, ciò dipende dal fatto che per rappresentare le rette di \mathbb{R}^3 abbiamo usato il piano $z=1$.

Se, ad esempio, avessimo usato il piano $y=1$, la retta all'infinito sarebbe stata quella di equazione $y=0$ (cioè l'asse delle ascisse).



Quello che faremo ora sarà scegliere di volta in volta una retta all'infinito diversa, ottenendo una conica diversa.

- Inizialmente, poniamo $\tau_0: z=0$, perciò omogeneizziamo l'equazione di $\bar{C}: x^2 - 2yz + z^2 = 0$ ponendo $z=1$.

In questo modo, otteniamo la conica

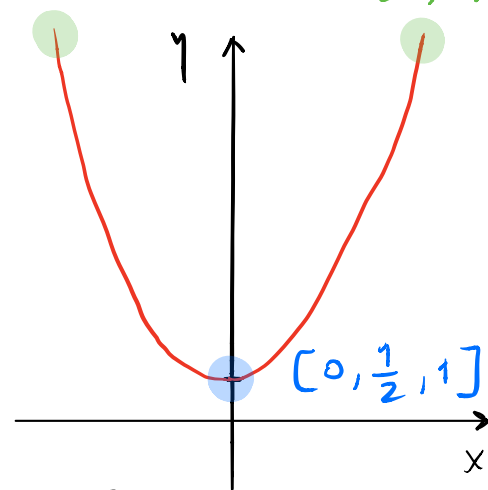
$$C_z: x^2 - 2y + 1 = 0,$$

ossia $C_z: y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

è una PARABOLA.

Il vertice della parabola è nel punto $(0, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$, che

come punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è $[0, \frac{1}{2}, 1]$.



Il punto all'infinito di C_z è la soluzione

del sistema $\begin{cases} x^2 - 2yz + z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, cioè $[x, y, z] = [0, 1, 0]$.

- Poniamo ora che la retta all'infinito sia la retta $\tau_0: y=0$.

Quindi, omogeneizziamo l'equazione della conica $\bar{C}: x^2 - 2yz + z^2 = 0$ rispetto a y , ossia poniamo $y=1$.

In questo modo otteniamo

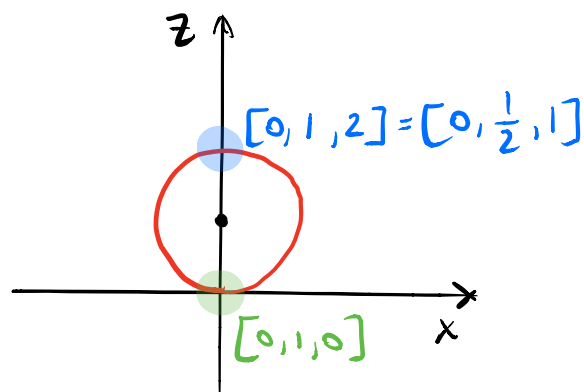
$$C_y: x^2 - 2z + z^2 = 0$$

ovvero $C_y: x^2 + (z-1)^2 = 1$

che è l'equazione di

una CIRCONFERENZA di

centro $(x, z) = (0, 1)$ e raggio 1.



In particolare, la circonferenza C_y interseca gli assi cartesiani nei punti $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ e $(0,2) \in \mathbb{R}^2$ che corrispondono ai punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di coordinate $[0,1,0]$ e $[0,1,2] = [0, \frac{1}{2}, 1]$

↳ I due punti sono proporzionali.

- Infine, assumiamo che la retta all'infinito abbia equazione $r_\infty: x=0$ e deomogeneizziamo rispetto a x ponendo $x=1$ nell'equazione

$$\bar{C}: x^2 - 2yz + z^2 = 0.$$

Otteniamo quindi la conica $C_x: 1 - 2yz + z^2 = 0$,

ovvero $C_x: z(2y - z) = 1$ è un'IPERBOLE con asintoti $z=0$ e $2y - z = 0$.

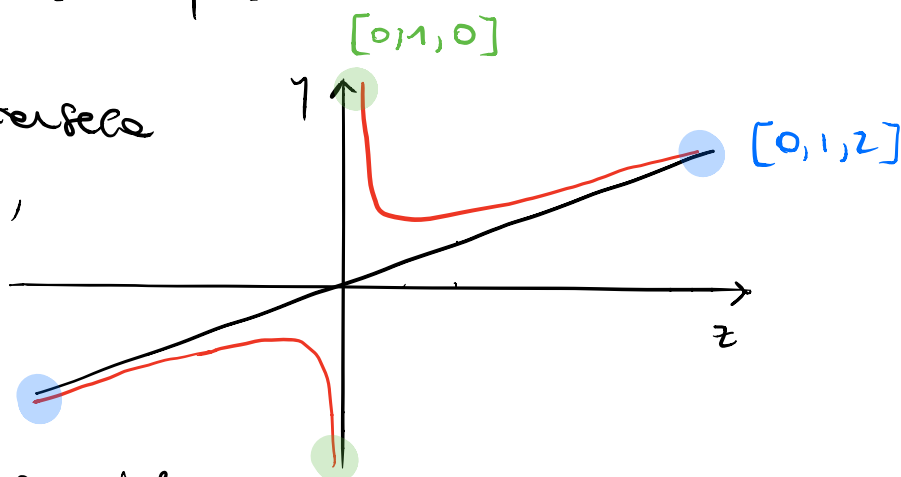
Quindi C_x non interseca gli altri cartesiani, ma ha 2 punti all'infinito,

che si ottengono

come soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 2yz + z^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(2y - z) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \begin{cases} z = 0 \\ z = 2y \end{cases}$$

ossia $[0,1,0]$ e $[0,1,2]$.



In conclusione, abbiamo visto come deomogeneizzare la conica proiettiva $\bar{C} \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rispetto a variabili diverse, si ottengono coniche euclidee C_z, C_y e C_x diverse.