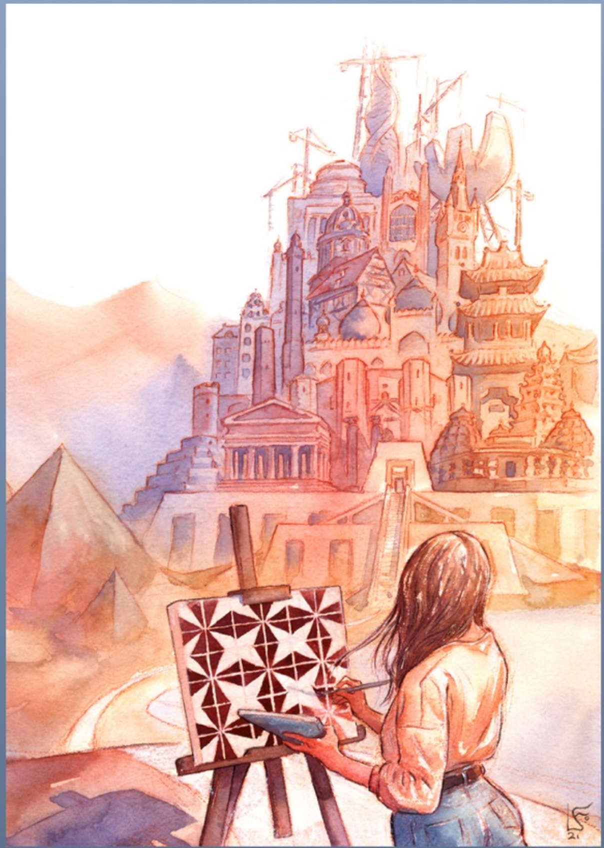
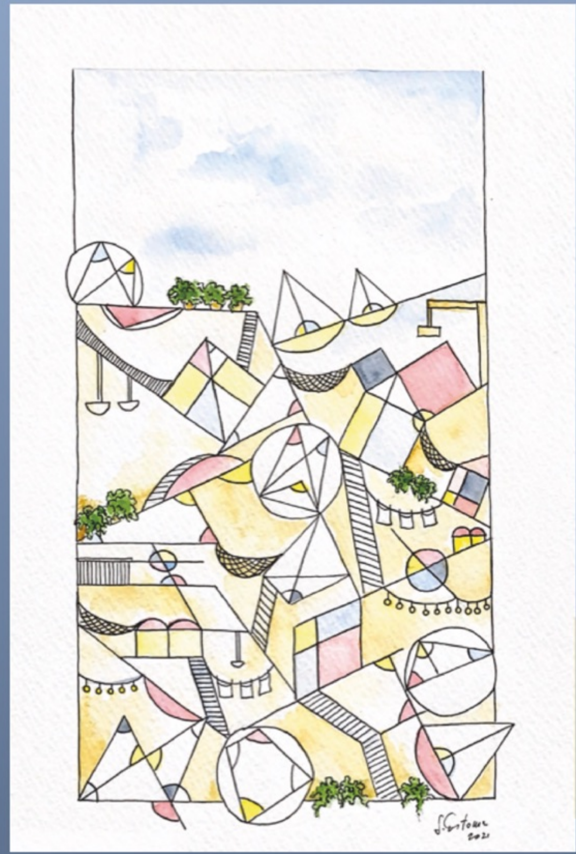




# ARCHITETTURE DELLA MATEMATICA DEL DOMINO E DEL TEMPO

Orientamento consapevole Matematica 2022

Sandra Lucente cOntastorie

In verde le risposte a lezione

BRAINSTORMING

# Cosa vuol dire avere una architettura?

- AVERE IDEA

FASE PROGETTO

DARE STRUTTURA

REALIZZAZIONE

USARE CONOSCENZE PREESISTENTI

BRAINSTORMING

# Quali opere dell'ingegno umano hanno una architettura?

palazzo
oggetto
informatica
teoria scientifica
narrazione
sinfonia
matematica

# BRAINSTORMING

## Architetture della Matematica

- quali rioni ?
- quali architetture ?

Teoremi

Il mercato delle funzioni elementari

Il palazzo della geometria euclidea

PITAGORA

$\pi$

Assioma

Funzioni

Applicazioni

Trigonometria

PERIFERIA POCO RAGGIUNTA!

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

L'architettura cambia con il tempo

il cambiamento racconta una storia e determina il futuro

# BRAINSTORMING

## La storia della matematica

- Inizio ?
- ordinata ? no torna spesso su stessi punti
- quali sono i cambiamenti più importanti

  Algoritmo
  th insiemi
  linguaggio cartesiano

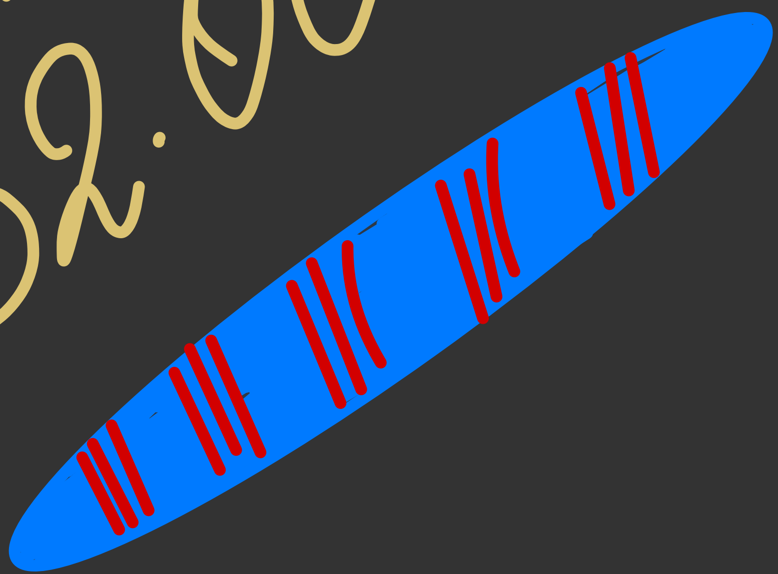
- il futuro ...
  MATE
  TECNOLOGIA

BRAINSTORMING

Il concetto di numero

Usiamo mentimeter

EURASIA
32.000a.C



# GLI INSIEMI NUMERICI

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ $\quad \mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$ INTERI NATURALI

Assiomi

**somma** (legge di composizione interna)

$n, m \in \mathbb{N}, \quad n+m \in \mathbb{N}$

$A_1$ $\quad n+(m+r) = (n+m)+r \quad \forall n,m,r \in \mathbb{N}$

$A_2$ $\quad n+m = m+n \quad \forall n,m \in \mathbb{N}$

$A_3$ $\quad n+0 = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**ordine** (relazione)

- $n \leq n$
- $n \leq m \wedge m \leq r \Rightarrow n \leq r$
- $n \leq m \wedge m \leq n \Rightarrow n = m$

Se $n \geq m$ ha senso $n-m$ operazione

$m+(n-m)=n$ chiamiamola sottrazione

$\mathbb{N}$ non è chiuso per la sottrazione

dato $h \in \mathbb{N}$ $\exists\, k \in \mathbb{N}$ tale che $h+k=0$ ???

## moltiplicazione (legge di composizione interna)

$n, m \in \mathbb{N}$, $\quad n \cdot m \in \mathbb{N}$

$M_1 \quad n \cdot (m \cdot z) = (n \cdot m) \cdot z \qquad \forall n, m, z \in \mathbb{N}$

$M_2 \quad n \cdot m = m \cdot n \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}$

$M_3 \quad n \cdot 1 = n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$

$D \quad n \cdot (m + z) = n \cdot m + n \cdot z \qquad \forall n, m, z \in \mathbb{N}$

- conoscere il significato di numero pari, multiplo

$h$ multiplo di $k$ se $\exists m \in \mathbb{N}^* \quad h = m k$

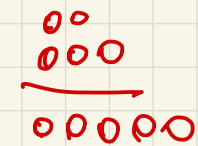
Se $n$ è multiplo di $m$ ha senso l'operazione $n:m$

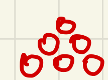
verifica $m\cdot(n:m)=n$ chiamiamola divisione

$\mathbb{N}$ non è chiuso per la divisione

dato $h\in\mathbb{N}$ $\exists\, k\in\mathbb{N}^*$ tale che $h\cdot k=1$?

2 



6 

$\boxed{\text{OGGETTI: PIETRE}}$

infinitesima pietra ?

# ORDINE IN $\mathbb{N}$

Piano di palazzo INIZIO

$$\boxed{X \subseteq \mathbb{N} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad n_0 = \min X}$$

BUON ORDINE

Numero 0, -1, ...

2000 a.C.
300 a.C Cina
250 a.C. Grecia
1200 Italia

$\mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}$

INTERI RELATIVI

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ $\quad$ $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$n, m \in \mathbb{Z}, \quad n+m \in \mathbb{Z}$

$A_1 \quad n+(m+z) = (n+m)+z \qquad \forall n,m,z \in \mathbb{Z}$

$A_2 \quad n+m = m+n \qquad \forall n,m \in \mathbb{Z}$

$A_3 \quad n+0 = n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

$A_4 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ \exists m \in \mathbb{Z} \quad n+m=0 \quad (m =: -n)$

chiuso per sottrazione

$n, m \in \mathbb{Z} \quad n \cdot m \in \mathbb{Z}$

$M_1 \quad n \cdot (m \cdot z) = (n \cdot m) \cdot z \qquad \forall n,m,z \in \mathbb{Z}$

$M_2 \quad n \cdot m = m \cdot n \qquad \forall n,m \in \mathbb{Z}$

$M_3 \quad n \cdot 1 = n \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

$D \quad n \cdot (m+z) = n \cdot m + n \cdot z \qquad \forall n,m,z \in \mathbb{Z}$

Ma non è chiuso per la divisione!

ordine (relazione)

$R_1$ $n \leq n$

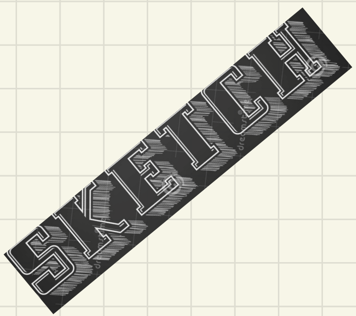
$R_2$ $n \leq m \land m \leq r \Rightarrow n \leq r$

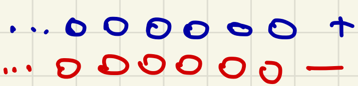
$R_3$ $n \leq m \land m \leq n \Rightarrow n = m$

Le stesse di $\mathbb{N}$ ma c'è una differenza! Quale?

$A \subseteq \mathbb{N}$ "minimo"

buon ordine



non vale in $\mathbb{Z}$

**? OGGETTI ?**

Egitto 1650 a.C.

ERDOS 1950

FRAZIONI EGIZIANE hanno sempre 1 al numeratore

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \neq 7 \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

1950 Congettura: $\frac{4}{n}$ si può scrivere con al più

3 frazioni egizione

PROVATO DA COMPUTER FINO AD $n \sim 10^{14}$, QUINDI NON PROVATO

1956 Sierpinski $\frac{5}{n}$

$$\mathbb{Q} \supsetneq \mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}$$

RAZIONALI

$$\mathbb{Q} = \{ x \mid \exists p \in \mathbb{Z} \ \exists q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x = \frac{p}{q} \}$$

- FRAZIONI EQUIVALENTI $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff pq' = p'q$

- PERCHÈ IL DENOMINATORE DEVE ESSERE NON NULLO?

$$n = \frac{p}{0} \iff n \cdot 0 = p \iff p = 0$$

può essere $\frac{0}{0}$ ? no $\frac{0}{0} = n \quad \forall n$

# I NUMERI RAZIONALI HANNO UN'ALTRA RAPPRESENTAZIONE

- DA FRAZIONE A NUMERO DECIMALE
  - QUALI FRAZIONI DANNO ALLINEAMENTO FINITO? $2^h 5^k$
  - QUALE ALLINEAMENTO NON TROVEREMO MAI?
- DA ALLINEAMENTO DECIMALE A FRAZIONE
  - PARTE INTERA, PERIODO, ANTI-PERIODO

$$a_0, a_1 a_2 \ldots a_k \overline{a_{k+1} \ldots a_n} = a_0 + \frac{a_1 a_2 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_n - a_1 \ldots a_k}{\underbrace{9 \ldots 9}_{n-k} \underbrace{0 \ldots 0}_{k}}$$

Periodo nove?

$0,\bar{9} = \frac{m}{n} \iff m = n \cdot 0,\bar{9}$

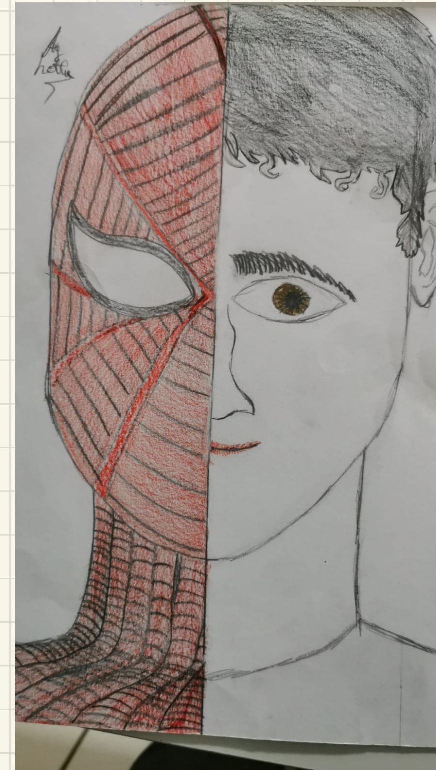
$10\,m = 9,\bar{9}\,n = 9n + 0,\bar{9}\,n$

$9\,m = 9\,n \Rightarrow m = n$

$0,\bar{9} = 1$? assurdo $\frac{m}{n} < 1 \iff m < n$

$$\mathbb{Q} = \{\text{insieme dei numeri che hanno allineamenti decimali periodici escluso il periodo } 9\}$$

$$= \{x \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ \exists q \in \mathbb{N}^* \quad x = \frac{p}{q}\}$$



Le debolezze di ciascuna versione

# Gli insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ numeri interi naturali

$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ numeri interi relativi

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{Z},\ \exists q \in \mathbb{N}^* \quad x = \frac{p}{q} \right\}$$

$$= \left\{ x \;\middle|\; \begin{array}{l} x = a_0, a_1 \dots a_n \dots \quad \text{con } a_0 \in \mathbb{Z} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}\ \forall i \\ \text{periodico con periodo diverso da } 9 \end{array} \right\}$$

**OGGETTI LA DISTRUZIONE DEL CALCOLO**

# Gli insiemi numerici $\quad \mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$

$A_0)\ \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x+y \in \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$A_1)\ \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad x+(y+z) = (x+y)+z$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$A_2)\ \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x+y = y+x$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$A_3)\ \forall x \in \mathbb{Q} \quad x+0 = x$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$A_4)\ \forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q} \quad x+y=0 \quad y := -x$ $\quad \mathbb{Z}$

$M_0)\ \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x \cdot y \in \mathbb{Q}$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$M_1)\ \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$M_2)\ \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x \cdot y = y \cdot x$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$M_3)\ \forall x \in \mathbb{Q} \quad x \cdot 1 = x$ $\quad \mathbb{N}\ \mathbb{Z}$

$M_4)\ \forall x \in \mathbb{Q}\ \exists y \in \mathbb{Q} \quad x \cdot y = 1 \quad y := \frac{1}{x}$

$D)\ \forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

Insiemi ordinati

$\forall x \in \mathbb{Q} \quad x \leq x$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$\forall x, y, z \in \mathbb{Q} \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

ANZI TOTALE ORDINE $\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x \leq y \vee x \geq y$ $\quad \mathbb{N}, \mathbb{Z}$

$\mathbb{N}$ ogni insieme ha un minimo (non è vero in $\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}$)

$\mathbb{Q}$ ogni due numeri $x < y$ c'è almeno un altro numero $z \in \mathbb{Q}$ con $x < z < y$

$\boxed{\text{OGGETTI la distruzione del domino}}$

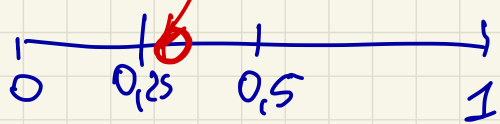
# Eppure qualcosa manca

- *Esempio* 2.2.8. Dire se è razionale il numero

$$34,1311311131111311113....$$

ovvero dopo la virgola il 3 si alterna con sequenze sempre più lunghe di 1.

$$0,252252225\ \ldots\ldots$$




CANTOR

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & & & \\
\frac{4}{1} & & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

**Altro esempio?** E come rappresentare $\mathbb{Q}$?

$x+2=0$ non ha sol in $\mathbb{N}$

$3x=2$ non ha sol in $\mathbb{Z}$

$x^2=2$ non ha sol in $\mathbb{Q}$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2 \qquad p^2=2q^2 \Rightarrow p^2 \text{ pari} \Rightarrow p \text{ è pari}$$

!!!

$$\Rightarrow p=2k \Rightarrow (2k)^2=2q^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4k^2=2q^2 \Rightarrow q^2=2k^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q \text{ pari}$$

ho dim $\left(\frac{p}{q}\right)^2=2$ allora $p,q$ sono pari

ma io posso sempre scegliere $p/q$ ridotto ai minimi termini (ASSURDO)

PROVA DELLA $\Rightarrow$ !!!

$p$ pari $\Rightarrow$ $p^2$ pari $\qquad p = 2k \Rightarrow p^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$

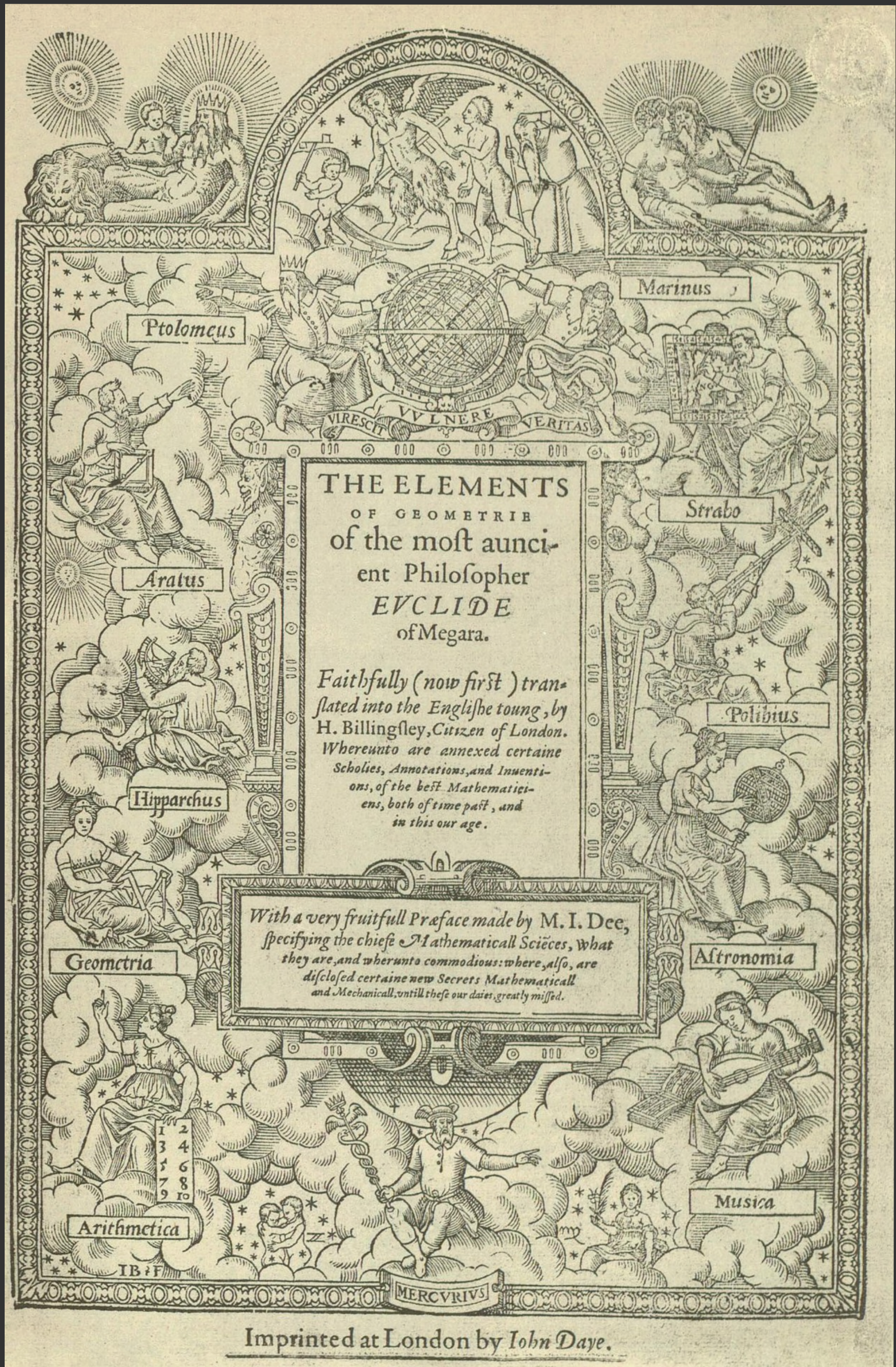
$p$ dispari $\Rightarrow$ $p^2$ dispari $\qquad p = 2k+1 \Rightarrow p^2 = 4k^2 + 4k + 1 =$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1$$

Allora $p^2$ pari $\overset{!!!}{\Longrightarrow}$ $p$ è pari

infatti se fosse $p$ dispari sarebbe $p^2$ dispari

contro l'ipotesi


THE ELEMENTS
OF GEOMETRIE
of the most aunci-
ent Philosopher
EVCLIDE
of Megara.

Faithfully (now first) translated into the Englishe toung, by H. Billingsley, Citizen of London. Whereunto are annexed certaine Scholies, Annotations, and Inuentions, of the best Mathematiciens, both of time past, and in this our age.

With a very fruitfull Præface made by M. I. Dee, specifying the chiefe Mathematicall Sciēces, what they are, and wherunto commodious: where, also, are disclosed certaine new Secrets Mathematicall and Mechanicall, vntill these our daies, greatly missed.

Imprinted at London by Iohn Daye.



# BRAINSTORMING

- Quali libri di matematica ricordi?

Il best-long-seller

ELEMENTI DI EUCLIDE

300 a.C.

L'opera consiste in 13 libri, che trattano:

Il Libro I la teoria dei triangoli, delle parallele e delle aree Pitagora

Il Libro II la cosiddetta algebra geometrica

Il Libro III la teoria del cerchio

Il Libro IV le proprietà e le costruzioni dei poligoni inscritti e circoscritti

Il Libro V la teoria dei rapporti tra grandezze e delle proporzioni astratte

Il Libro VI la teoria della similitudine e delle proporzioni in geometria

Il Libro VII la teoria fondamentale dei numeri

Il Libro VIII le proporzioni continue nella teoria dei numeri

Il Libro IX ancora la teoria dei numeri

Il Libro X la teoria degli incommensurabili

Il Libro XI la geometria solida

Il Libro XII la misura delle figure solide

Il Libro XIII i solidi regolari

Noti niente ?

Abbasso Euclide!

~1900

**TAVOLA II** IL PIANO DEGLI *ELÉMENTS DE MATHÉMATIQUE*

Prima parte

| | | |
|---|---|---|
| I | E | Ensembles |
| II | A | Algèbre |
| III | TG | Topologie générale |
| IV | FVR | Fonctions de variables réelles |
| V | EVT | Espaces vectoriels topologiques |
| VI | INT | Intégration aree |

Seconda parte

| | |
|---|---|
| AC | Algèbre commutative |
| VAR | Variétés |
| LIE | Groupes et algèbres de Lie |
| TS | Théories spectrales |

# BRAINSTORMING

## Cos'è la matematica?

LABORATORIO DIFFICILE:

Lettura dell'Euclide Restituto

# CHE COSA SIA MATEMATICA,
## E quali ſieno le ſue parti.

MATEMATICA chiamiamo tutta quella parte di Filoſofia, che riguarda la quantità.

Due generi di quantità hà per oggetto la Matematica, cioè la quantità continua, e la quantità diſcreta.

Qualunque eſtenſione ſi chiama quantità continua, ed ogni moltitudine ſi dice quantità diſcreta.

La quantità continua ſi diuide in trè generi d'eſtenſioni. La prima è quell'eſtenſione, che coſtituiſce lo ſpazio. La ſeconda è la duratione, che volgarmente vien chiamata tempo; e la terza è il moto ſucceſſiuo, che ſi dice moto perenne.

Quindi è, che la quantità continua cade ſotto la noſtra cognitione, alle volte come coſa mobile, ed altre volte come coſa immobile; cioè la conſideriamo immobile quando ci forma lo ſpatio, e mobile, quando la conſideriamo come tempo, ò moto ſucceſſiuo. Li Matematici però, benche intendano per quantità continua l'eſtenſione materiale, con tuttociò la conſiderano aſtratta, cioè diſgiunta, da ogni materia.

La quantità diſcreta ſi conſidera, ò aſſoluta per ſe, ouero comparatiua ad altra coſa.

Aſſoluta per ſe s'intende, quando quella moltitudine ò è conſiderata in aſtratto, come ſe ſi proferiſſe cento, mille &c. ſenz' altra eſpreſſione; ouero è conſiderata in concreto, cioè applicata à qualche oggetto, come ſe diceſſimo, trenta Naui, mille huomini &c.

Comparatiua ad altro s'intende, quando quella moltitudine è comparata al ſuono, ò voce &c. come ſuccede nelle coſe della muſica.

Finalmente la quantità ſi diuide in quantità rationale, ed irrationale.

Rationale ſi dice quella quantità, della quale, riſpetto à qualche miſura, ſe ne poſſono eſprimere le parti; e quella quantità, della quale, in riguardo à qualche miſura, non ſe ne poſſono eſprimere le parti, ſi chiama irrationale.

La Matematica ſi diuide in quattro generi di Dottrine, cioè Geometria, Aritmetica, Armonica, ed Aſtronomia.

La Geometria è ſcienza, la quale, col mezzo d'alcuni notiſſimi principij, dimoſtra tutte le paſſioni, ò proprietà, che accadono alla quantità continua immobile; onde inſegna anco à miſurare la grandezza della Terra, e di tutte l'altre coſe materiali.

L'Aritmetica è ſcienza, che riguarda la quantità diſcreta, cioè la moltitudine aſſoluta per ſe, ſi riuolge intorno alle paſſioni numeriche, ed eſplica l'arte di ben conteggiare.



Quei principij, li quali ſono per sè tanto noti, e chiari, che non hanno biſogno d'alcuna dimoſtratione, ſi che ſono conceduti da tutti per veri ſenz'alcuna dubitatione, ſi dicono Poſtulati.

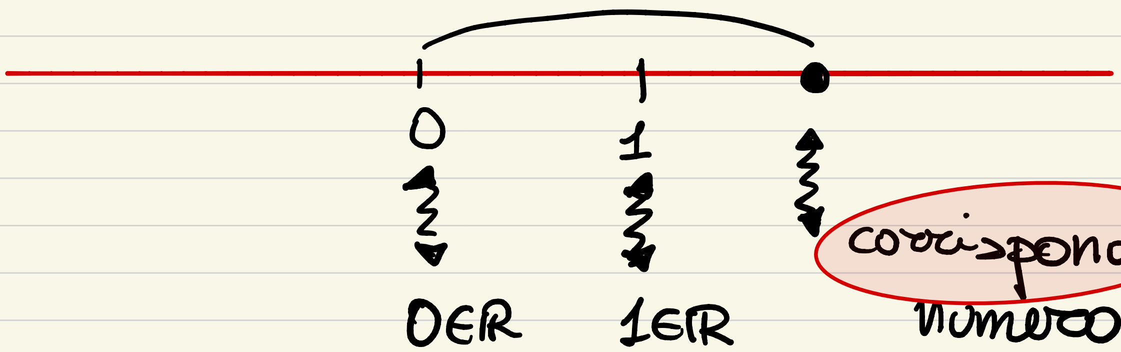
Gli aſſiomi, ò communi ſentenze, ſono certe cognitioni dell'animo, che non ſolo in Matematica, ma in tutte l'altre Dottrine, ſono talmente manifeſte, & euidenti, che, chiunque ne concepiſce rettamente i vocaboli, per niſſuna ragione può diſſentire, e non riceuerli come veri, e reali.

*Per Matematica chiamiamo tutta quella parte della Filosofia, che riguarda la quantità. Due generi di quantità ha per oggetto la Matematica, cioè la quantità continua e la quantità discreta. La quantità continua si divide in tre generi di estensione. La prima è quell’estensione, che costituisce lo spazio. La seconda è la durata, che volgarmente viene chiamata tempo; e la terza è il moto successivo, che si dice moto perenne. Quindi è, che la quantità continua cade sotto la nostra cognizione, alle volte come cosa mobile, ed altre volte come cosa immobile: cioè la consideriamo immobile quando ci forma lo spazio, e mobile quando la consideriamo come tempo, o moto successivo. I Matematici, però, benché intendano per quantità continua l’estensione materiale, con tutto ciò la consideriamo astratta, cioè disgiunta da ogni materia. La quantità discreta si considera o assoluta per sé oppure comparativa ad un altra cosa. Assoluta per sé si intende, quando quella moltitudine o è considerata in astratto, come se si proferisse cento, mille ecc. senz’altra espressione; ovvero è considerata in concreto, cioè è applicata a qualche oggetto, come se dicessimo trenta Navi, mille uomini ecc. Comparativa ad altro si intende, quando quella moltitudine è comparata al suono o voce ecc. come succede nelle cose della musica. Finalmente la quantità si divide in quantità razionale ed irrazionale. Razionale si dice della quantità, della quale, rispetto a qualche misura, se ne possono esprimere le parti; e quella quantità, della quale, in riguardo a qualche misura, non se ne possono esprimere le parti, si chiama irrazionale. La Matematica si divide in quattro generi di Dottrine, cioè Geometria, Aritmetica, Armonica ed Astronomia. La Geometria è scienza, la quale, col mezzo di alcuni notissimi principi, dimostra tutte le passioni o proprietà, che accadono alla quantità continua immobile; onde insegna anche a misurare la grandezza della Terra e di tutte le altre cose materiali. L’Aritmetica è scienza, che riguarda la quantità discreta, cioè la moltitudine assoluta per sé, si rivolge intorno alle passioni numeriche ed esplica l’arte del contare bene. L’Armonica è scienza, che riguarda la quantità discreta, cioè la moltitudine comparativa ad altro, considera ed esplica l’Armonia o concetto sonoro. L’Astronomia è scienza, che considera le passioni della quantità continua mobile, esplica e dimostra le apparenze e i moti dei Corpi Celesti.*

# Numeri come segmenti

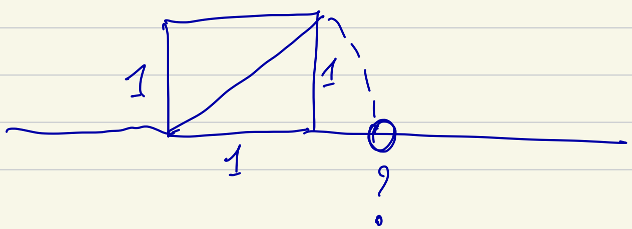
$\boxed{\text{OGGETTO o OGGETTI ?}}$

Viceversa i punti di una retta




corrisponde ad un numero ??

COSA MANCA A $\mathbb{Q}$ ???



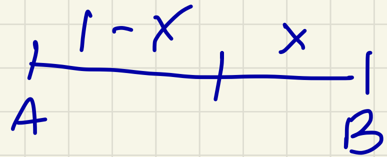
$\mathbb{R} \supsetneq \mathbb{Q} \supsetneq \mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{N}$

I numeri reali contengono tutte le espansioni decimali

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

I numeri reali contengono tutti i segmenti

E le frazioni?




$$1 : x = x : 1-x$$

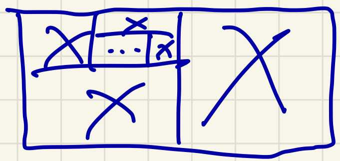
$$x^2 = 1-x \qquad x = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{x}-1} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x}-1}-1} - 1$$

$$= \dots\dots \qquad = \quad \ddots$$

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2/7}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}}$$

Ogni numero è una frazione!

Posso rendere infinite tutte le operazioni? no
ma alcune volte funziona!

2  $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

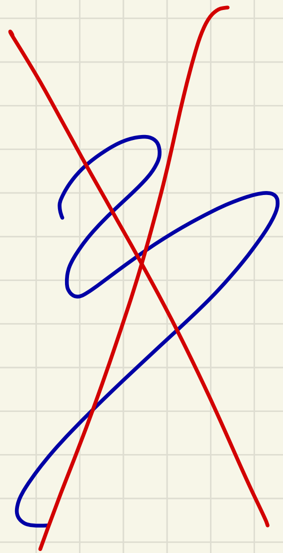
Ogni numero è una serie = somma infinita

(ma ci sono somme infinite che non
sono numeri)

recuperiamo $0,\bar{9} = 1$

Abbiamo scomodato l'infinito del Tempo non del domino !

CANTOR



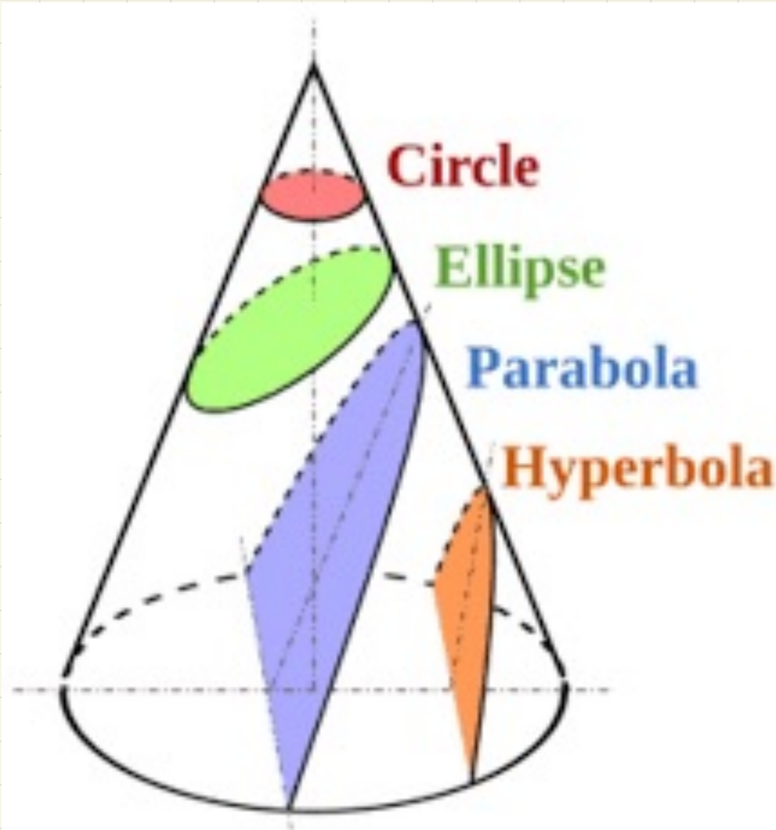
Multimoneri

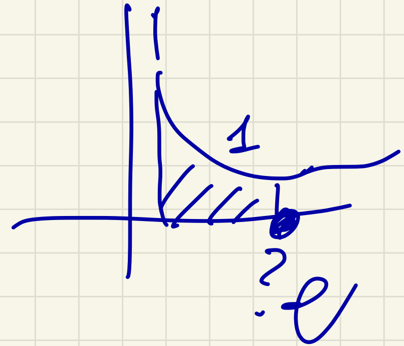
# GIOCO: PENSA UN NUMERO!

Ma se io penso un numero reale
Tu sai pensare un naturale più grande?

A $\mathbb{N}$ non è limitato in $\mathbb{R}$

# I soliti noti e le curve




$xy=1$

$y=mx$

$x^2=0$

$x^2+1=0$

# Gli insiemi numerici $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$A_0)$ $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x+y \in \mathbb{R}$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$A_1)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x+(y+z) = (x+y)+z$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$A_2)$ $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x+y = y+x$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$A_3)$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x+0 = x$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$A_4)$ $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \quad x+y = 0 \qquad y = -x$ — $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$M_0)$ $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y \in$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$M_1)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$M_2)$ $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = y \cdot x$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$M_3)$ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$M_4)$ $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = 1 \qquad y = 1/x$

$D)$ $\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

Insiemi ordinati

$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

ANZI TOTALE ORDINE $\quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \leq y \vee x \geq y$ $\qquad \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

$\mathbb{N}$ ogni insieme ha un minimo (non è vero in $\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}$)

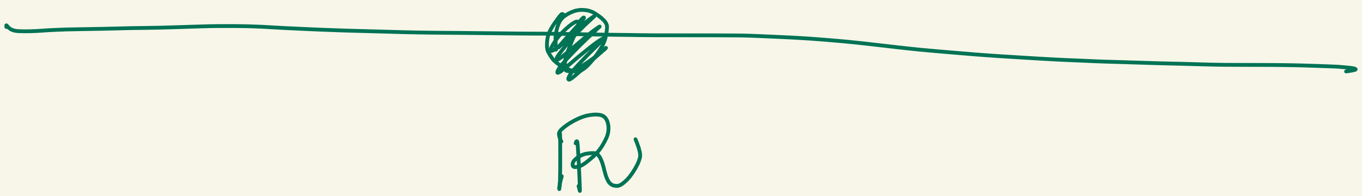
$\mathbb{Q}$ ogni due numeri $x<y$ c'è almeno un altro numero $z \in \mathbb{Q}$ con $x<z<y$

$\mathbb{R}$ corrisponde ai punti di una retta

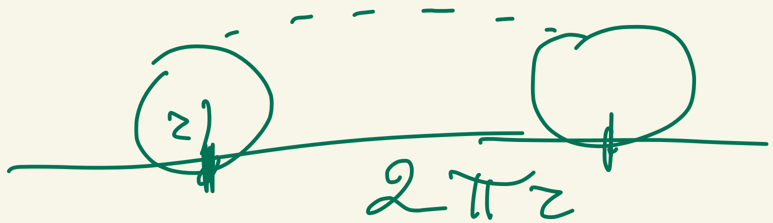
# Assioma di completezza

C-D

"Ogni coppia di insiemi separati
ha elemento separatore"




$x^2 < 2$ $\sqrt{2}$ $x^2 > 2$



# L'assioma di completezza per i segmenti

"Ogni intervallo è connesso" C-I

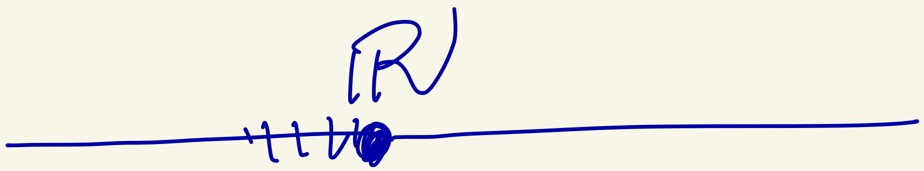
Cos'è $A \subseteq \mathbb{R}$ $\quad x, y \in A \quad z \in \mathbb{R}$

$$x < z < y \Rightarrow z \in A$$

# L'assioma di completezza per frazioni

"Ogni insieme limitato superiormente ha estremo superiore"

C-S



# L'assioma di completezza per le serie

"Ogni successione monotona è regolare"

C-M

$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$

infiniti e positivi

o va a $+\infty$ o è un numero

NUMERO REALE

- ELEMENTO DI UN UNIVERSO
- SEGMENTO
- FRAZIONI CONTINUE
- SERIE

$CD \Leftrightarrow CI \Leftrightarrow CS \Leftrightarrow A + CM$

Universi diversi


HEY STRANGE!
YOU KNOW WHAT COOLER THAN MAGIC? MATH'S
– SPIDERMAN

# Bibliografia


Nuova lettera Matematica Vol 2 2021

S. Lucente L'architettura della matematica completezza e continuità la ombra della luce

ITHACA XVIII 2021

S Lucente Le città invisibili, guidati da Italo Calvino nell'impero della matematica con la voce del docente

AGL personal communication on Spiderman !