

# LA MATEMATICA E I MODELLI BIOLOGICI

Mirella Cappelletti Montano

Orientamento Consapevole A. A. 2021/2022

Dipartimento di MATEMATICA

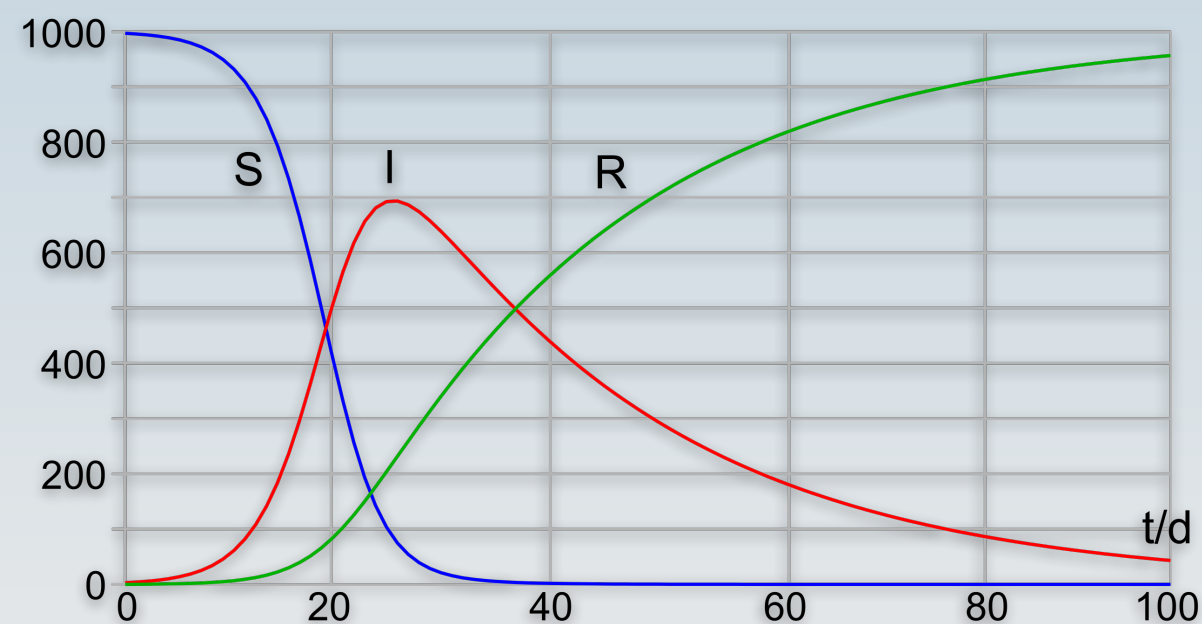
Università degli Studi di Bari "A. Moro"

# COS'È UN MODELLO MATEMATICO?

Un modello matematico è una possibile rappresentazione dell'evoluzione nel tempo di un fenomeno fisico, biologico, economico, tramite l'uso di concetti matematici.

Uno degli scopi principali dei modelli matematici è, quindi, quello di fare previsioni.

Un modo per misurare l'efficacia di un modello è vedere di quanto l'evoluzione reale del fenomeno stesso differisce da quella prevista dal modello, attraverso esperimenti o l'utilizzo di dati già acquisiti.



Molto spesso i modelli matematici sono codificati tramite “il calcolo differenziale”. Ci sono comunque modelli costruiti utilizzando altre teorie matematiche (metodi iterativi, teoria dei giochi, calcolo combinatorio, calcolo stocastico,...)

Un fenomeno può essere rappresentato attraverso più modelli, che ne evidenziano aspetti diversi.

Allo stesso modo, un modello matematico può descrivere più fenomeni distinti. Per esempio, alcuni modelli sullo studio di come varia una popolazione nel tempo possono essere usati in Economia.

# UN PO' DI STORIA

L'idea che si potesse rappresentare la realtà (o aspetti di essa) tramite la Matematica non è venuta naturalmente.

Il fatto stesso che vi siano leggi che governano i fenomeni naturali (in particolare i fenomeni fisici) e che esse possano essere espresse in forma matematica è stato a lungo dibattuto, soprattutto per motivi religiosi, e solo a partire dal 1600 si è pervenuti a un'idea più moderna di Scienza.

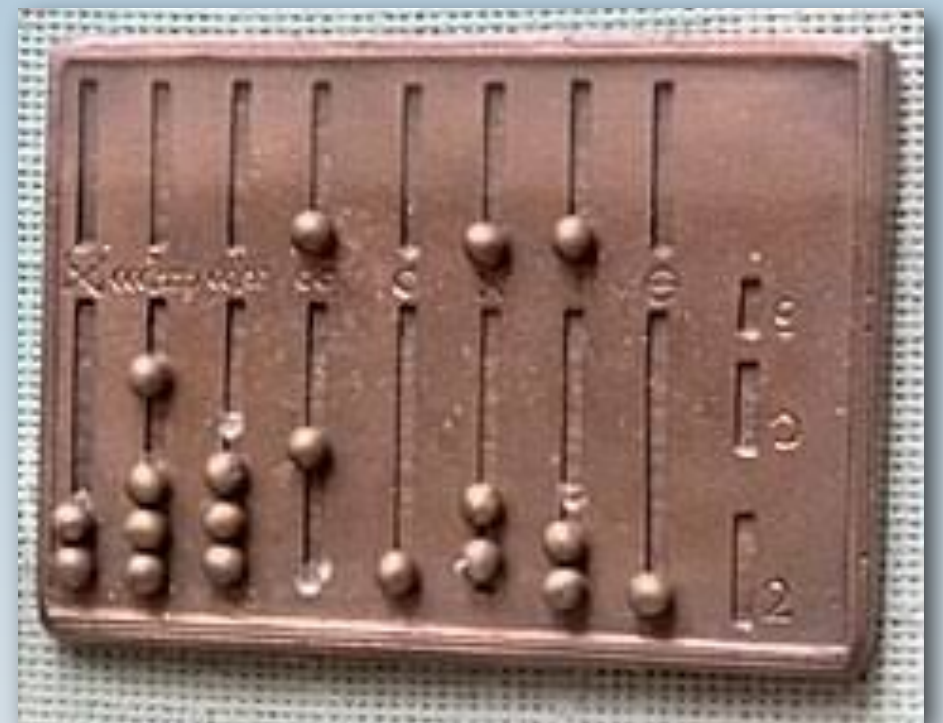


# I NUMERI DI FIBONACCI

Uno dei “primi” e più noti tentativi di utilizzare la matematica per spiegare fenomeni biologici è dovuto a Fibonacci.

**Leonardo da Pisa** (1170-1242), detto **Fibonacci**, è noto soprattutto per aver scritto il *Liber Abbaci* (1202), un trattato di Matematica destinato ai mercanti, per aiutarli a gestire la propria contabilità, ad effettuare cambi di valute e calcolare il prezzo delle merci.

Il libro contiene una delle prime trattazioni presentate nel mondo occidentale della numerazione posizionale indiana (unità, decine, centinaia...) che Fibonacci aveva appreso durante un suo soggiorno nell'attuale Algeria.



Nel XII capitolo del Liber Abbaci, viene presentato un problema su come evolve una certa popolazione ne tempo.

Il problema esposto da Fibonacci è il seguente:

Un allevatore dispone di una coppia di conigli (maschio e femmina) appena nati. Questa coppia diventa fertile al compimento del primo mese di età. Appena fertili, i conigli ogni mese danno vita a un'altra coppia di conigli (maschio e femmina). A loro volta, essi sono fertili al compimento del primo mese di vita e, da quel momento, generano una coppia di conigli (maschio e femmina) al mese.

Quante coppie di conigli ci saranno nell'allevamento dopo un anno?

Si inizia con 1 coppia di conigli.

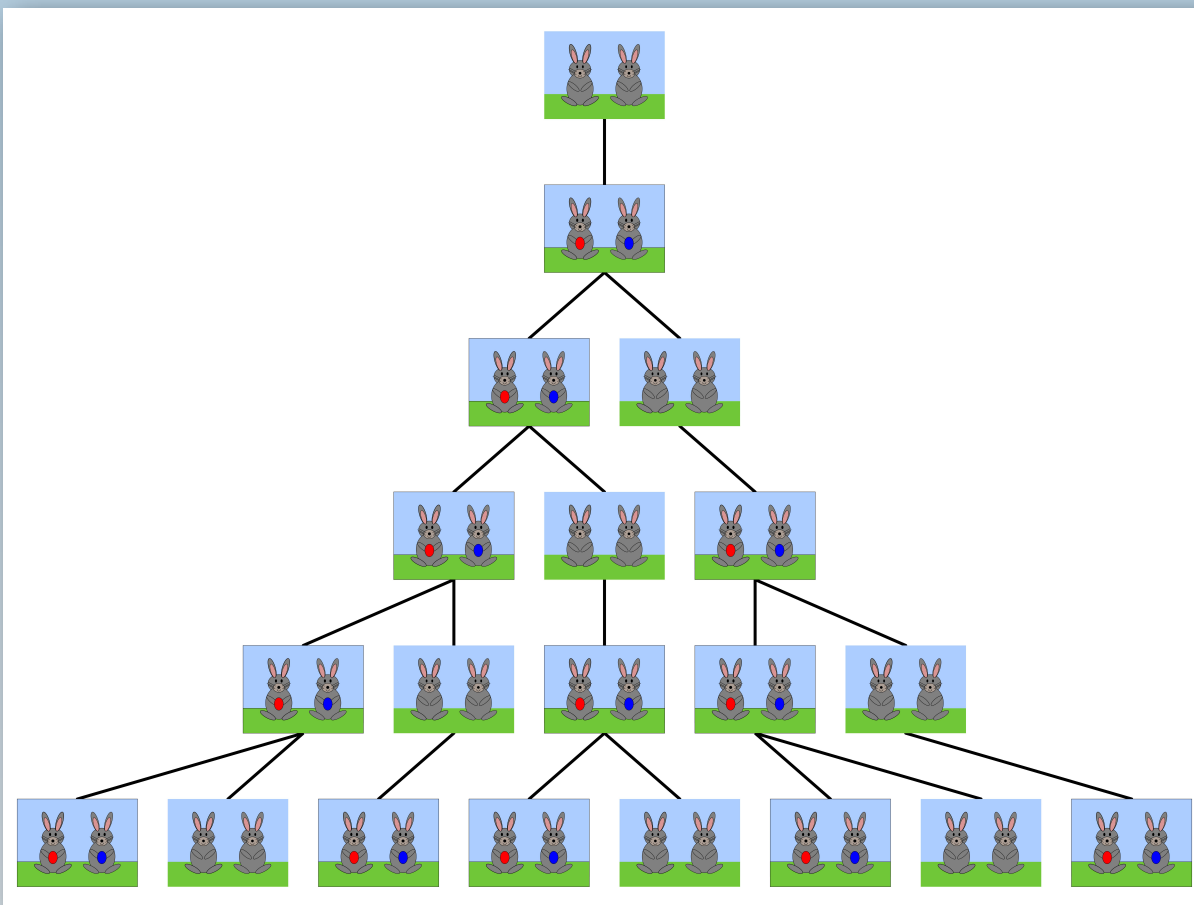
Dopo 1 mese, essa sarà fertile.

Dopo 2 mesi, si hanno a disposizione 2 (1+1) coppie di conigli, di cui, però, solo una fertile.

Dopo 3 mesi, ci saranno 3 (2+1) coppie di conigli, perché solo una di esse ha potuto generare.

Dopo 4 mesi, ci saranno 5 (3+2) coppie di conigli, in quanto solo 2 delle coppie precedenti sono fertili.

....e così via.



<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FibonacciRabbit.svg?uselang=it>

Indichiamo con  $F_n$  il numero delle coppie di conigli dopo  $n$  mesi.

In particolare,  $F_0 = 1$ ,  $F_1 = 1$  e, per ogni  $n \geq 2$ ,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

La risposta alla domanda è  $F_{12} = 233$ , ma possiamo ripetere questo procedimento per ogni numero naturale  $n$ , ottenendo quella che prende il nome di **sequenza (o successione) di Fibonacci**

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610....



I numeri di Fibonacci, hanno la straordinaria proprietà di comparire in Natura in molte situazioni.

Ad esempio, la maggior parte dei fiori hanno un numero di petali (3, 5, 8, 13, 21...) che è uno dei numeri di Fibonacci.

Le inflorescenze che si trovano al centro di girasoli, margherite o nel cavolo romano si dispongono in spirali orarie e antiorarie, il cui numero è generalmente un numero di Fibonacci.



Una branca della Botanica, detta **Filotassi**, studia il modo in cui fiori, foglie o rami sono distribuite nello spazio, al fine di ottimizzare l'utilizzo delle risorse (sole, acqua...) e difendersi dagli agenti esterni.

In genere, le foglie sui rami si dispongono in modo che esse non si coprano l'un l'altra e possano essere ugualmente esposte alla luce del sole. Se si prende come punto di partenza la foglia più esterna di un ramo e si conta quante foglie ci sono finché non se ne trova un'altra allineata a questa, il risultato è spesso un numero di Fibonacci.

# LA NASCITA DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

I numeri di Fibonacci possono essere considerati poco più di un "gioco" matematico. Lo studio dei fenomeni naturali e biologici tramite la Matematica non si diffuse per molti secoli ancora.

In realtà fu solo a partire dal 1500 che si fece strada la curiosità di investigare le cause ultime che generano i fenomeni naturali.

I principali autori di questa "rivoluzione" furono Galileo e Newton.

# IL MONDO È MATEMATICO

Per Galileo, tutto ciò che è intorno a noi è scritto in leggi matematiche, ed è compito dello scienziato individuare queste leggi e comprenderle.

Purtroppo, la Matematica a disposizione all'epoca di Galileo era inadeguata per questo compito. L'espressione in leggi matematiche che governano la realtà fisica attorno a noi necessitò della creazione di una nuova branca della Matematica, detta CALCOLO DIFFERENZIALE.

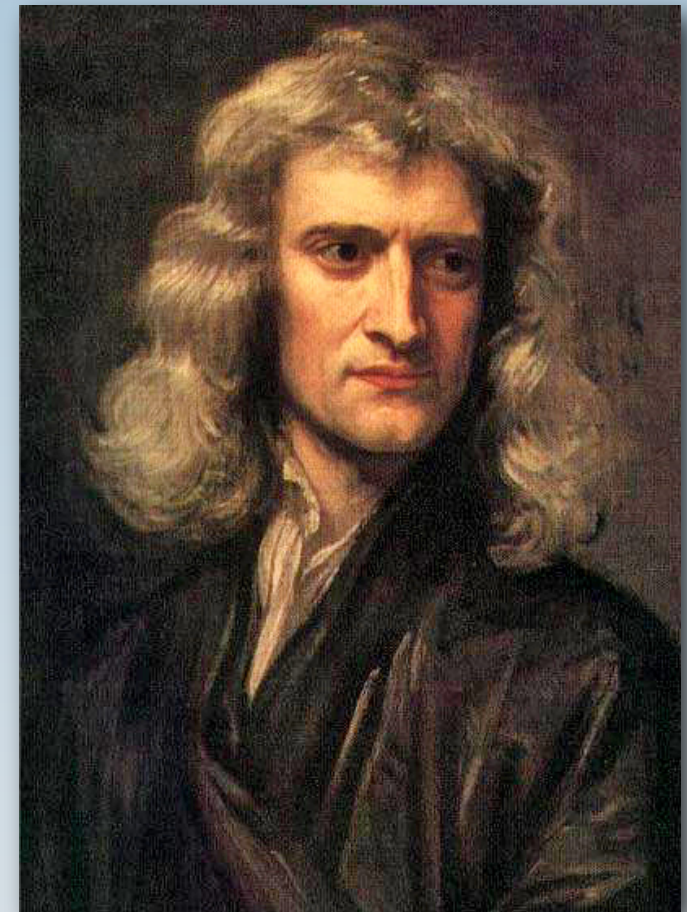


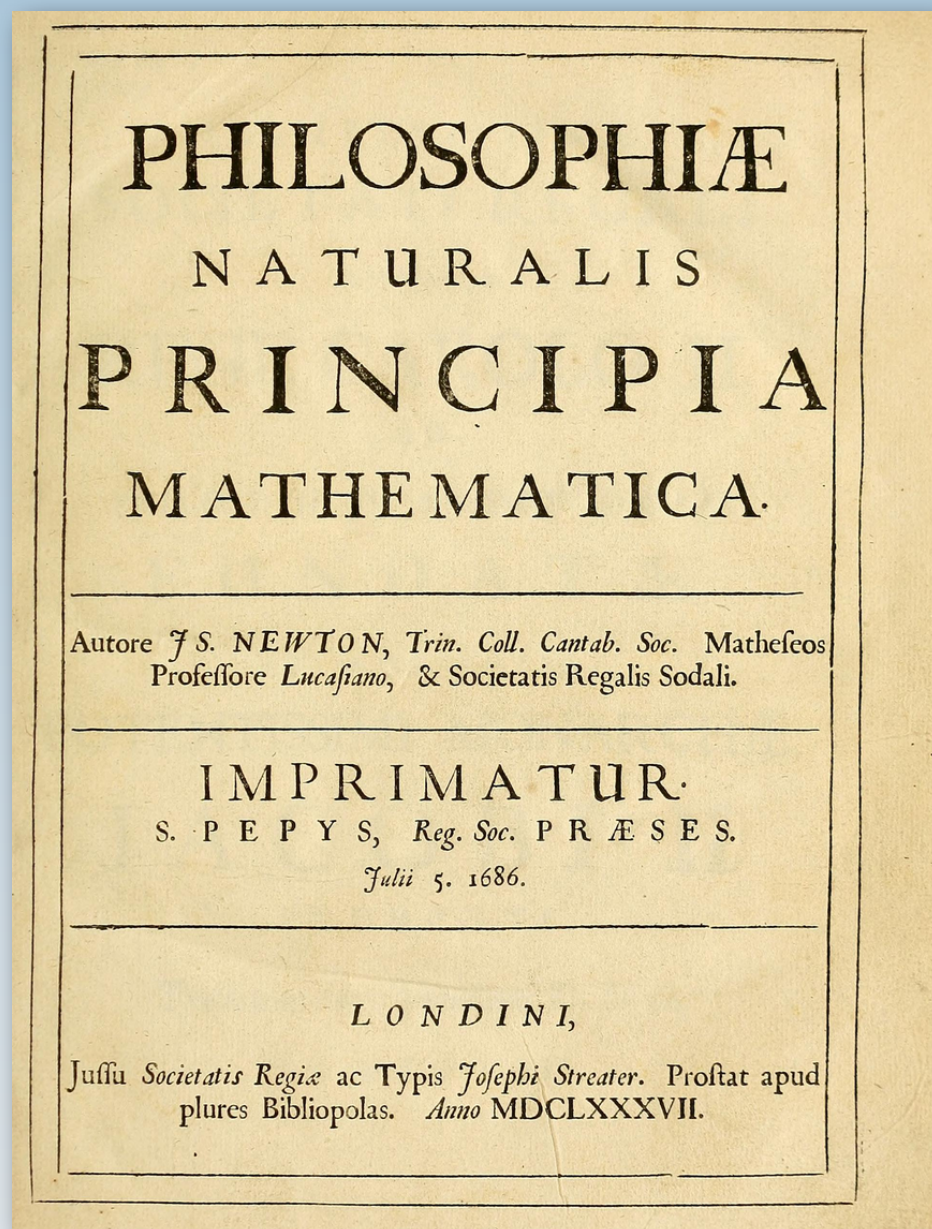
# IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Il Calcolo Differenziale venne introdotto (più o meno indipendentemente) da Isaac Newton (1642-1726) e da Gottfried Leibniz (1646-1716).

Fu Newton, però, che intuì che le leggi che governano il mondo attorno a noi possono essere espresse attraverso di esso.

Per Newton tutti i fenomeni possono essere visti come il "moto" di un qualche ente e studiare come varia un fenomeno nel tempo significa studiare la velocità di questo moto.





Nel suo libro più famoso, *I Principia Mathematica*, pubblicato nel 1687, Newton pose le basi della Fisica Classica (Leggi della Dinamica, Legge della Gravitazione Universale).

La formulazione matematica delle leggi della Fisica classica è il primo esempio moderno di Modello Matematico.

# MODELLI MATEMATICI IN BIOLOGIA

Nel tempo, la Matematica ha aumentato il suo raggio d'azione al di fuori dal campo della Fisica e i modelli matematici sono diventati un metodo di analisi in discipline come la Biologia, l'Economia o le Scienze Sociali.

Presenteremo ora due modelli che descrivono il modo in cui una popolazione si evolve nel tempo, il modello di Malthus e il modello Logistico.

Entrambi i modelli valgono sotto queste ipotesi:

- POPOLAZIONE ISOLATA (ossia non ci sono scambi con l'esterno, né in termini di risorse, né in termini di emigrazioni o immigrazioni);
- POPOLAZIONE INDISTINGUIBILE per sesso ed età.

Il modello di Malthus e il modello logistico sono descritti rigorosamente usando il calcolo differenziale. Noi utilizzeremo un altro approccio, i cosiddetti METODI ITERATIVI.

Cos'è un processo (o metodo) iterativo?

Sia  $T$  una trasformazione che a un dato in entrata  $u_0$  associa un dato in uscita  $u_1 = T(u_0)$ .

Applichiamo nuovamente la trasformazione  $T$  al dato  $u_1$  ottenendo così un valore  $u_2 = T(T(u_0)) = T(u_1)$ .

Iterando il procedimento, al passo  $n$ -simo avremo  $u_{n+1} = T(u_n)$ .

In questo modo, a partire dal dato  $u_n$  possiamo calcolare  $u_{n+1}$ .



# IL MODELLO DI MALTHUS

Il modello di Malthus è dovuto all'economista inglese Thomas Malthus (1766-1834), che lo introdusse nel trattato *"An essay on the principles of population as it effects the future improvement of the society"* del 1798.

Nei suoi studi di natura economica Malthus si riferiva alla popolazione umana, ma il modello si può applicare a molte altre specie, da mammiferi a batteri.



Immaginiamo di voler stimare come varia una popolazione anno dopo anno (o fissiamo un altro intervallo di tempo a nostro piacere).

Denotiamo con  $N_0$  la popolazione al tempo iniziale.

Denotiamo con  $N_1$  la popolazione attesa dopo un anno.

Denotiamo con  $N_n$  la popolazione attesa dopo  $n$  anni.

Siamo interessati a studiare il cosiddetto **tasso di crescita della popolazione**, ossia, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , la quantità

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n}$$

Il tasso di crescita rappresenta la variazione in termini assoluti tra la popolazione in due anni successivi rapportata con la popolazione  $N_n$ .



Il modello di Malthus prevede che il tasso di crescita di una popolazione è **costante** nel tempo.

Detta  $a$  tale costante, che si determina sperimentalmente e varia da specie a specie, abbiamo

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = a \quad \text{ossia} \quad N_{n+1} = (1 + a)N_n$$

La trasformazione che stiamo utilizzando è, quindi,

$$T(x) = (1 + a)x$$

In particolare,  $N_1 = (1 + a)N_0$ ; inoltre

$$N_2 = (1 + a)N_1 = (1 + a)(1 + a)N_0 = (1 + a)^2 N_0.$$

Ripetendo il procedimento  $n$  volte,

$$N_n = (1 + a)N_{n-1} = (1 + a)(1 + a)^{n-1}N_0 = (1 + a)^n N_0.$$

Otteniamo, quindi, una formula "chiusa", che dipende solo da  $N_0$ .

Non sempre una cosa del genere è possibile.

$$N_n = (1 + a)^n N_0$$

Come varia il parametro  $a$ ? Sicuramente  $1 + a > 0$  in quanto le popolazioni sono numeri positivi, quindi  $a > -1$ .

Se  $1 + a > 1$ , ossia  $a > 0$ , allora  $(1 + a)^n$  tende ad essere sempre più grande all'aumentare di  $n$ ; la popolazione, quindi, cresce molto velocemente al variare di  $n$ .

Se  $1 + a = 1$ , ossia  $a = 0$ , allora  $N_{n+1} = N_0$ , ossia la popolazione si mantiene costante nel tempo.

Se  $0 < 1 + a < 1$ , ossia  $-1 < a < 0$ ,  $(1 + a)^n$  tende ad essere sempre più vicino a 0 al variare di  $n$ . La popolazione decresce in maniera molto rapida fino ad estinguersi.

Come si può determinare sperimentalmente il parametro  $a$ ?

Bisogna avere a disposizione dei dati reali, ottenuti, per esempio, tramite un esperimento o un censimento.

Poiché  $N_1 = (1 + a)N_0$ , segue facilmente che  $a = \frac{N_1}{N_0} - 1$ .

Come valore per  $N_0$  e  $N_1$  per calcolare  $a$  scegliamo quelli relativi ai dati sperimentali al passo  $n = 0$  e  $n = 1$ .

# USANDO IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Sia  $N(t)$  il numero di membri di una certa popolazione all'istante  $t$  e denotiamo con  $N'(t)$  la velocità con cui la popolazione varia all'istante  $t$ .

Chiamiamo  $\frac{N'(t)}{N(t)}$  "tasso di aumento della popolazione".

Il modello di Malthus prevede che il tasso di aumento della popolazione è costante, ossia  $\frac{N'(t)}{N(t)} = K$ , con  $K \in \mathbb{R}$ .

Se  $N(0) = N_0$  il modello di Malthus è rappresentato da

$$\begin{cases} N'(t) = KN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

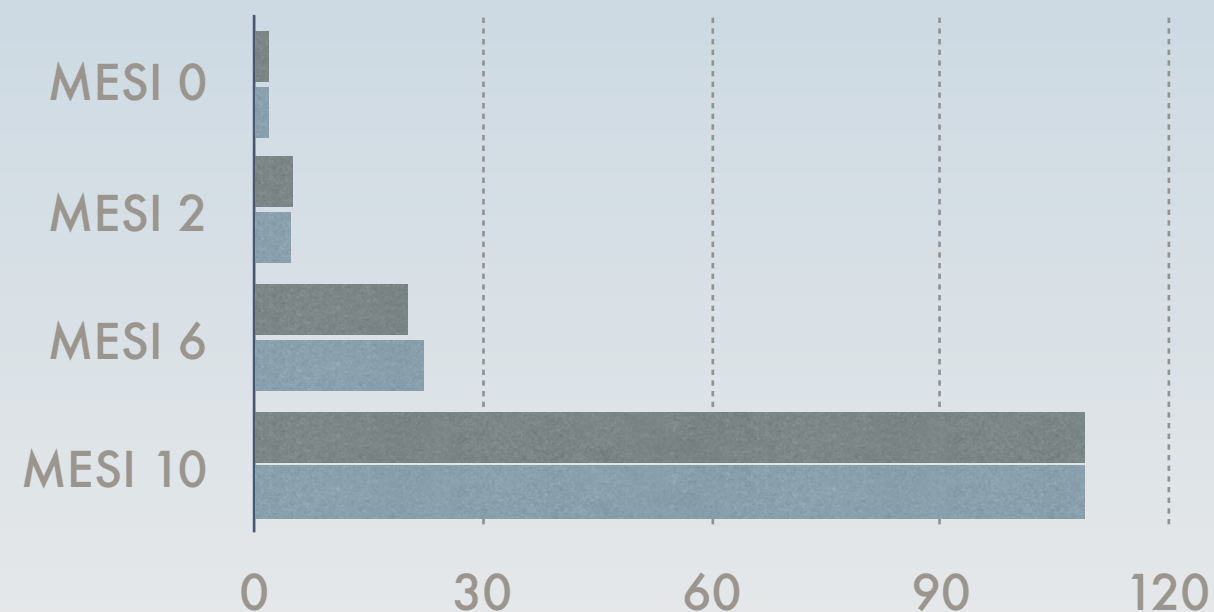
L' unica soluzione è  $N(t) = N_0 e^{Kt}$ .

## DISCUSSIONE SUL MODELLO

Come ogni modello matematico, il modello di Malthus deve essere sottoposto a verifiche sperimentali. Due esperimenti in particolare permettono di capire bene quali sono i suoi punti di forza e di debolezza.

**Esperimento n. 1:** Nel 1975 il biologo Braun studiò dei piccoli roditori IN LABORATORIO. Le condizioni di vita erano quindi ideali e ai roditori venivano forniti cibo, acqua e risorse a volontà.

La popolazione iniziale era composta da 2 individui e si osservò come essa cresceva nell'arco di alcuni mesi. L'accordo tra i dati sperimentali e i valori attesi utilizzando il modello di Malthus era pressoché perfetto.



**Esperimento n. 2:** Negli anno '30 il biologo russo G. F. Gause (1910-1986) effettuò un altro esperimento.

Mise 5 protozoi in una provetta che conteneva del brodo di coltura e contò il numero di protozoi ogni giorno per 6 giorni.

Anche in questo caso, all'inizio c'era accordo tra dati reali e dati estrapolati dal modello di Malthus.

A un certo punto, però, la crescita della popolazione rallentò e il numero dei protozoi si assestò su una popolazione pressoché costante di poche centinaia di individui.

Secondo le stime ottenute attraverso il modello di Malthus, al sesto giorno ci sarebbero dovuti essere migliaia e migliaia di protozoi.



**Conclusioni:** Il modello di Malthus descrive la crescita di una popolazione in condizioni **ottimali** di cibo e risorse. Se ci sono abbastanza risorse la crescita di una popolazione è molto rapida.

Se le risorse cominciano a scarseggiare a seguito dell'aumento della popolazione, nelle fasi iniziali il modello di Malthus descrive bene la situazione, ma a un certo punto la crescita frena e sembrerebbe assestarsi su un valore "costante".

# IL MODELLO LOGISTICO

Il modello logistico fu introdotto dal biologo-matematico P. F. Verhulst (1804-1849) nel 1837.

Esso rappresenta, in un certo senso, un "correttivo" del modello di Malthus.



Sia  $N_0$  la popolazione a  $t = 0$ , denotiamo con  $N_1$  la popolazione attesa dopo un anno e con  $N_n$  la popolazione attesa dopo  $n$  anni.

Nel modello logistico, risulta che esistono  $a, b$  costanti positive tali che

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = a - bN_n.$$

Di qui segue che

$$N_{n+1} = N_n(a - bN_n) + N_n = (1 + a)N_n - bN_n^2$$

Quando  $N_n$  è un numero "piccolo" (quindi nelle prime fasi in cui studiamo il fenomeno), la quantità  $bN_n^2$  è anch'essa "piccola", quindi il modello logistico all'inizio si comporta quasi come quello di Malthus; all'aumentare della popolazione la presenza di  $bN_n^2$  diventa più rilevante.

Anche in questo caso si possono determinare  $a$  e  $b$  in maniera "sperimentale", avendo a disposizione dei dati reali: in particolare, dobbiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} N_1 = (1 + a)N_0 - bN_1^2 \\ N_2 = (1 + a)N_1 - bN_2^2. \end{cases}$$

Come valori di  $N_0$ ,  $N_1$  ed  $N_2$  consideriamo i dati reali ottenuti tramite le rilevazioni demografiche o esperimenti.

# USANDO IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Assumendo che, all'istante  $t = 0$  la popolazione sia  $N_0$ , il modello logistico è

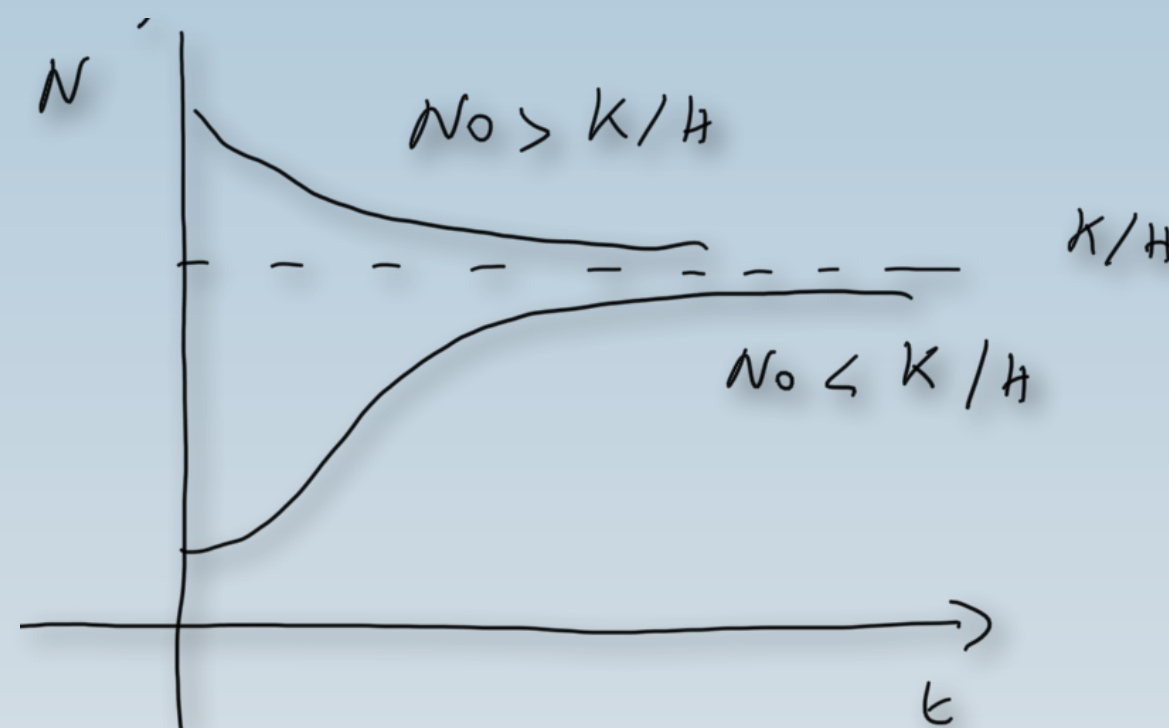
$$\begin{cases} N'(t) = (K - HN(t))N(t) \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

con  $H, K$  costanti opportune.

La soluzione di questo problema è

$$N(t) = N_0 \frac{K/H e^{Kt}}{K/H - N_0 + N_0 e^{Kt}}$$

Il grafico di questa funzione è rappresentato nella figura di fianco;  $K/H$  è detto "valore di equilibrio", nel senso che  $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K/H$ .



## DISCUSSIONE SUL MODELLO

I dati sperimentali mostrano che il modello logistico si accorda meglio del modello di Malthus per rappresentare la crescita di una popolazione (vedasi l'esperimento di Gause).

Sussistono però delle criticità. Per esempio, due economisti, Pearl e Reed, utilizzando il modello logistico, analizzarono la popolazione degli USA dal 1790 al 1910, ottenendo un accordo molto buono con i dati reali. Secondo le loro stime, però, il valore "costante" verso cui si sarebbe assestata la popolazione era di circa 200.000.000 abitanti, mentre la popolazione degli USA al 2018 consta di più di 327.000.000 di abitanti.

Il modello logistico, quindi, è sicuramente più efficace di quello di Malthus nel rappresentare la realtà, ma può esso stesso essere soggetto a correttivi.

**GRAZIE PER  
L'ATTENZIONE!**