Geometria oltre Euclide

dall'*Ottica* di Euclide alla geometria proiettiva

Francesco Bastianelli

Nella prima parte di questo seminario, abbiamo visto come, con l'avvento della prospettiva, si siano consolidate le seguenti idee, in parte presenti già nell'"Ottica" di Euclide:

A. la rappresentazione sul piano della realtà "euclidea" 3-dimensionale avviene per proiezione da un punto (l'occhio) e i punti dello spazio appartenenti allo stesso raggio visuale vengono proiettati sullo stesso punto del piano;

B. Introdurre una linea all'orizzonte (all'"infinito") sulla quale si incontrano le rette che nella realtà "euclidea" 3-dimensionale appaiono parallele

C. Punti di osservazione differenti "deformano" l'oggetto osservato (si pensi all'anamorfosi).

Lo scopo di questa seconda parte del seminario è introdurre il "piano proiettivo reale" evidenziandone alcune proprietà e, nel farlo, noteremo come queste idee siano in qualche modo presenti. Chiaramente, visto il poco tempo a disposizione e vista la mancanza di alcune nozioni preliminari che servirebbero per una trattazione rigorosa, saremo forzatamente poco formali nell'introdurre il piano proiettivo reale e le sue proprietà.

Questa seconda parte del seminario è strutturata come segue:

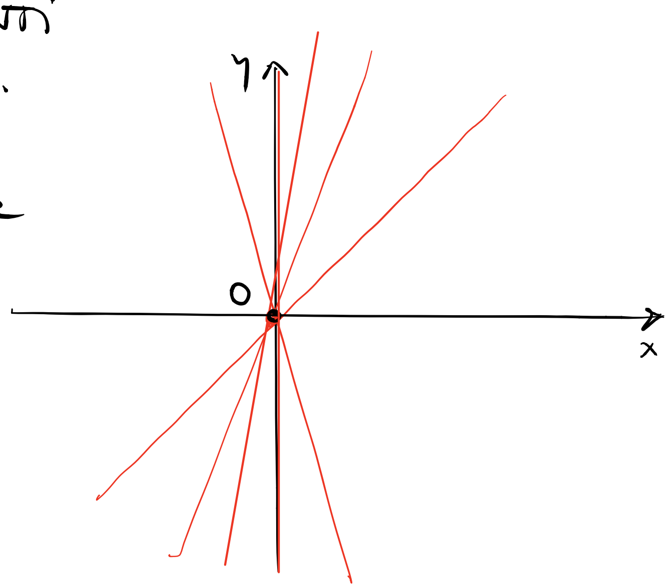
1. Inizialmente, introdurremo la "retta proiettiva reale"
2. Poi passeremo a definire il piano proiettivo reale e ne discuteremo alcune proprietà, come il fatto che tutte le rette hanno un punto in comune (cioè non esistono rette parallele).
3. Infine studieremo le coniche sul piano proiettivo reale e mostreremo con un esempio che non è possibile distinguere parabole, ellissi ed iperboli.

1. LA RETTA PROIETTIVA REALE $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Prima di introdurre il piano proiettivo reale, concentriamoci sul caso (più semplice) della retta proiettiva reale.

Nel seguito, indichiamo con $\mathbb{R}^2$ il piano cartesiano in cui abbiamo fissato un sistema di riferimento ortogonale

DEFINIZIONE. Chiamiamo RETTA PROIETTIVA REALE l'insieme i cui elementi sono le rette del piano cartesiano che passano per l'origine. Tali elementi sono detti PUNTI della retta proiettiva reale.



La retta proiettiva reale viene anche detta SPAZIO PROIETTIVO REALE DI DIMENSIONE 1 e viene indicato con $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

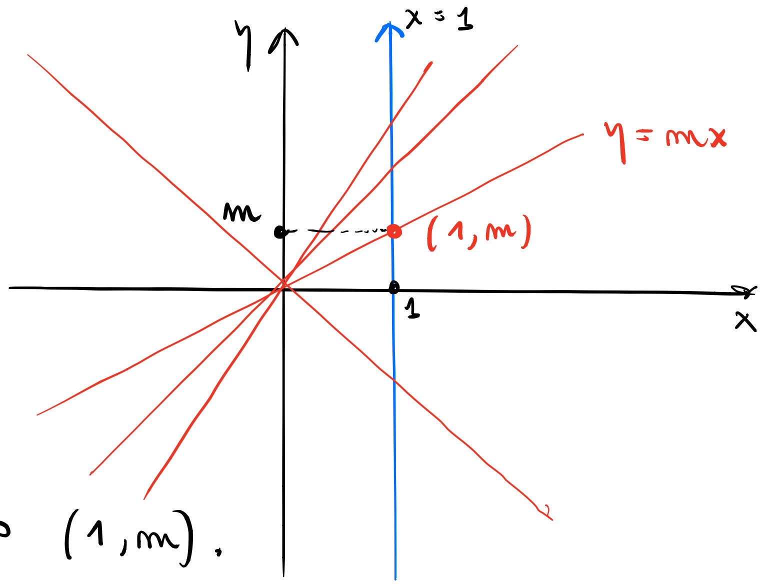
$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ → REALE

→ DI DIMENSIONE 1.

SPAZIO PROIETTIVO

Cerchiamo di descrivere meglio questo insieme. A questo scopo, consideriamo la retta di equazione $x = 1$.

Tutte le rette "oblique" passanti per l'origine hanno equazione $y = mx$ e incontrano la retta $x = 1$ nel punto $(1, m)$.



Quindi, se consideriamo la retta $x = 1$ come se fosse un asse reale, ogni retta obliqua passante per l'origine di equazione $y = mx$, corrisponde ad un valore m sulla retta $x = 1$

↳ il suo COEFFICIENTE ANGOLARE.

Questa descrizione, però, non tiene conto della retta verticale di equazione $x = 0$.

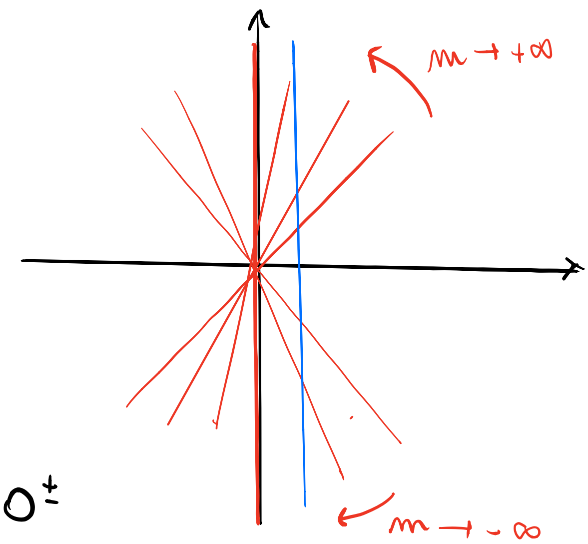
Perciò $\quad \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \left\{ \begin{matrix} \text{retta verticale} \\ x=0 \end{matrix} \right\} \cong \mathbb{R}$

↳ RETTA $x = 1$

Come possiamo includere anche la retta $x = 0$?

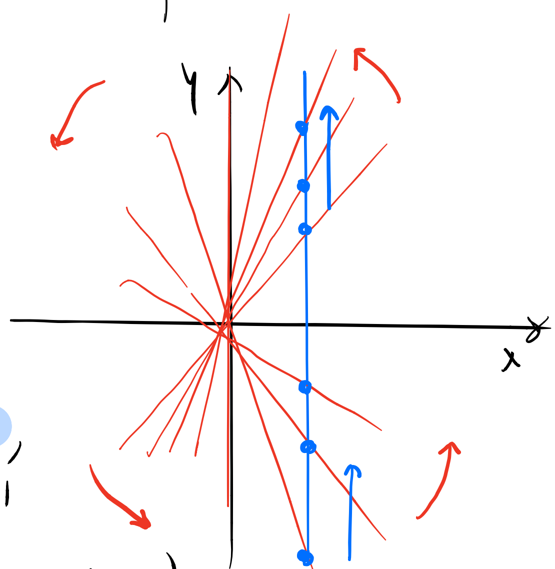
Osserviamo che se $m \longrightarrow +\infty$, le rette $y = mx$ tendono alla retta $x = 0$.

Analogamente, se $m \longrightarrow -\infty$, le rette $y = mx$ tendono alla stessa retta $x = 0$



Passando alla scrittura in forma implicita, abbiamo che, considerata una retta generica passante per O
$$r:\ ax + by = 0,$$
si ha che il limite per $b \to 0^\pm$ di r è proprio la retta $x = 0$.

Ricollegandoci alla scrittura in forma esplicita si ha che $m = -\frac{a}{b}$ e $\lim\limits_{b \to 0^\pm} m = \mp\infty$



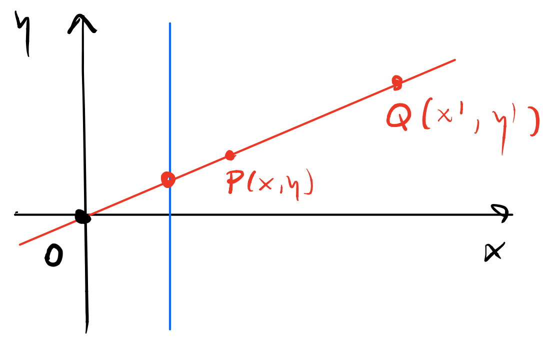
Quindi, se ruotiamo in senso antiorario una retta tenendo fissa l'origine e seguiamo il punto corrispondente sulla retta $x = 1$, andiamo a finire in un punto all'infinito (che corrisponde alla retta $x = 0$) e ricominciamo a percorrere la retta $x = 1$ da $-\infty$.

In un certo senso, è come se i punti $+\infty$ e $-\infty$ della retta $x = 1$ si congiungessero.

Perciò possiamo pensare la retta proiettiva reale come unione dell'asse reale (la retta $x=1$) con un "punto all'infinito" (corrispondente a $x=0$):

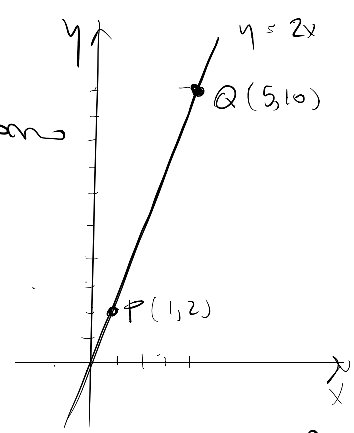
$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} .$$

Infine, vogliamo introdurre un sistema di coordinate su $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Per farlo, osserviamo che per ogni punto $P(x,y)$ sul piano cartesiano, con $P \neq O$, esiste una sola retta passante per O e per P (e questa retta è un elemento di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$).



Inoltre, se $Q(x',y')$ appartiene alla stessa retta, allora P e Q identificano lo stesso punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. In questo caso, le coordinate di P e Q sono proporzionali, cioè esiste un numero $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che $x' = ax$ e $y' = ay$.

<u>Esempio</u>. $P(1,2)$ e $Q(5,10)$ appartengono entrambi alla retta $y=2x$. In questo caso si ha che $x' = 5x$ e $y' = 5y$ (cioè $a=5$).



Poiché P e Q devono indicare lo stesso punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, indichiamo i punti di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ con le coordinate $[x,y]$, con la proprietà che

1) Se $\exists\, a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, tale che $x' = ax$ e $y' = ay$, allora $[x,y] = [x',y']$

(cioè due punti proporzionali P e Q individuano la stessa retta).

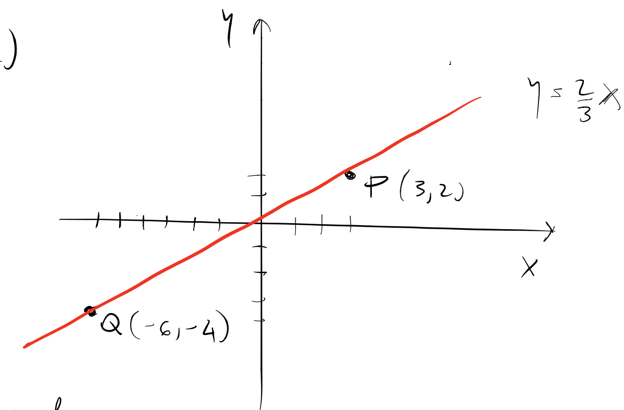
2) $[x,y] \neq [0,0]$, perché se $P(x,y) = O(0,0)$ non è vero che esiste una sola retta che passa per P e O.

(il punto $[0,0]$ non appartiene a $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$!)

Queste coordinate si chiamano COORDINATE OMOGENEE (e sono state introdotte da MÖBIUS (1827) e PLÜCKER (1830)).

<u>Esempio</u> Il punto $[3,2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ corrisponde alla retta di equazione $2x - 3y = 0$, cioè

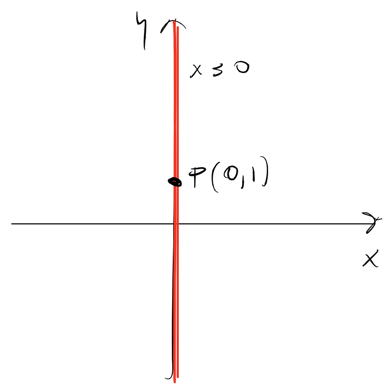
$$y = \frac{2}{3}x$$



Il punto $[-6,-4] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ corrisponde alla stessa retta, cioè $[3,2] = [-6,-4]$

(infatti $-6 = (-2)\cdot 3$ e $-4 = (-2)(-2)$

Il punto $[0,1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ corrisponde alla retta $x = 0$, cioè al punto all'infinito di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

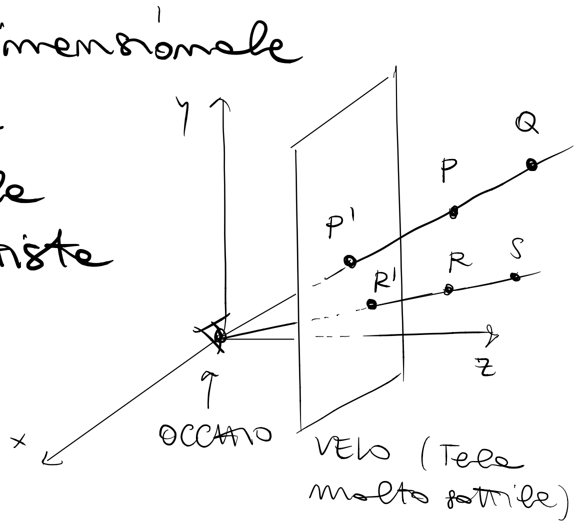


In realtà, tutti i punti nella forma $[0,a] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ coincidono con $[0,1]$ perché

$$0 = a \cdot 0 \quad e \quad a = a \cdot 1.$$

2. IL PIANO PROIETTIVO REALE $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Torniamo alla situazione 3-dimensionale che era oggetto della prospettiva ed alla rappresentazione su tela mediante il "Velo" di Leon Battista Alberti



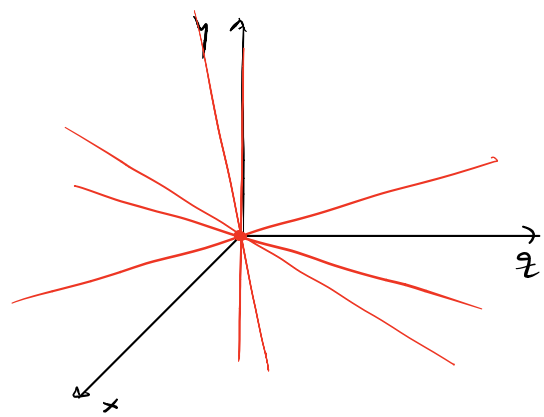
Nel seguito, indichiamo con $\mathbb{R}^3$ lo spazio euclideo 3-dimensionale in cui abbiamo fissato un sistema di riferimento ortogonale.

Analogamente al caso della retta $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, definiamo il piano proiettivo reale come segue.

<u>DEFINIZIONE</u>. Il PIANO PROIETTIVO REALE è l'insieme i cui elementi sono le rette dello spazio $\mathbb{R}^3$ che passano per l'origine.

Tali elementi sono detti PUNTI del piano proiettivo reale.

Il piano proiettivo reale è detto anche SPAZIO PROIETTIVO REALE DI DIMENSIONE 2 e viene indicato con $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.



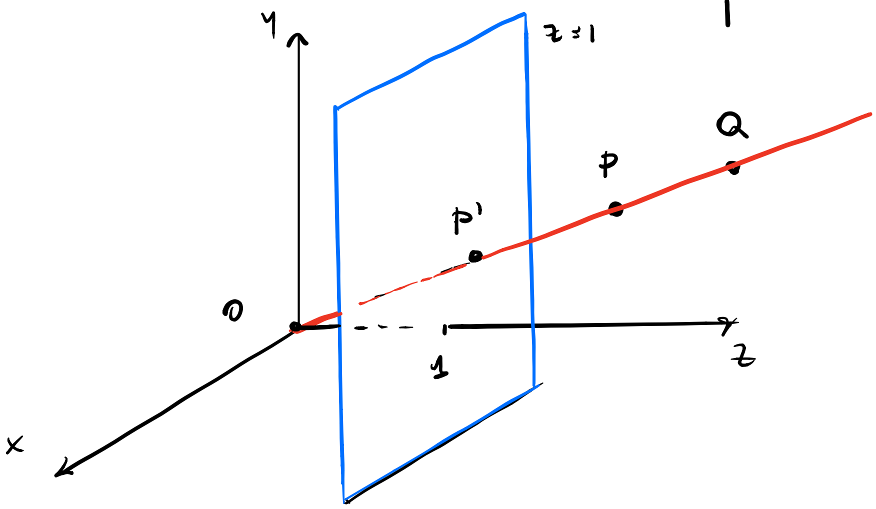
DI DIMENSIONE 2

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

REALE

SPAZIO PROIETTIVO

Al fine di descrivere meglio i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, ragioniamo come nel caso della retta proiettiva reale e consideriamo il piano di equazione $z = 1$.



Anche in questo caso, dato un punto $P(x,y,z)$ esiste un'unica retta passante per l'origine O e per P, cioè esiste un unico punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ associato a P.

Inoltre, due punti dello spazio $P(x,y,z)$ e $Q(x',y',z')$ individuano la stessa retta se e solo se le loro coordinate sono proporzionali, cioè se esiste un numero $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

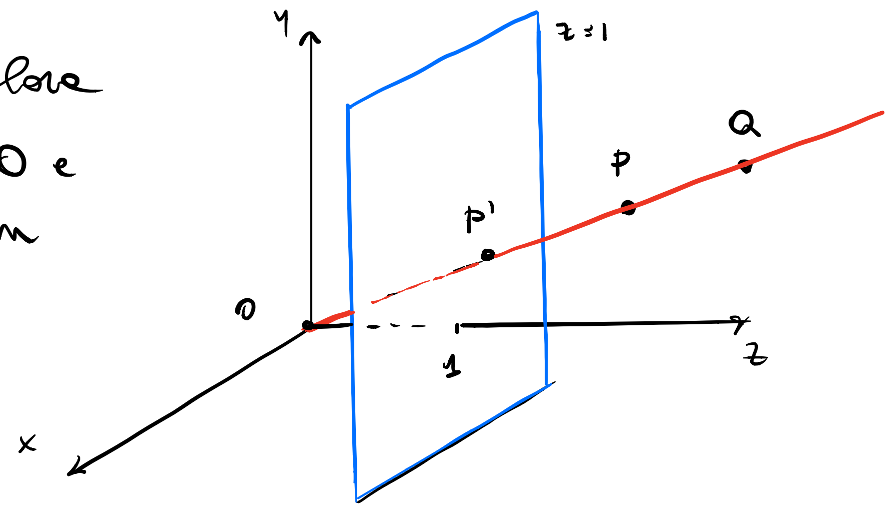
$$x' = ax \quad , \quad y' = ay \quad e \quad z' = az .$$

Allora, introduciamo delle coordinate su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, dette ancora COORDINATE OMOGENEE, mediante cui ogni punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sarà individuato da una terna $[x,y,z]$ avente le seguenti proprietà:

1) Due terne $[x,y,z]$ e $[x',y',z']$ indicano lo stesso punto se e solo se $\exists\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che
$$x' = ax \quad , \quad y' = ay \quad e \quad z' = az .$$

2) $[x,y,z] \neq [0,0,0]$ perché se $P(0,0,0) = O(0,0,0)$ non è vero che esiste una sola retta passante per P e O.
(Il punto $[0,0,0]$ non è un punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$!)

Quindi, se $P(x_P, y_P, z_P)$ è un punto dello spazio, allora la retta passante per O e P è il punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di coordinate omogenee $[x_P, y_P, z_P]$.



Inoltre, se $z_P \neq 0$, allora la retta passante per O e per P corrisponde ad un unico punto P' sul piano $z=1$ (cioè al punto di intersezione tra la retta e il piano)

Invece, le rette che giacciono sul piano $z=0$ (cioè il piano generato dagli assi x e y) sono parallele al piano $z=1$ e non lo incontrano mai.

Ciascuna di queste rette corrisponde ad un punto di coordinate $[x_P, y_P, 0]$ (perché tutti i punti sul piano xy hanno coordinate $P(x_P, y_P, 0)$).

Questi punti corrispondono ai punti di una retta proiettiva reale, che chiamiamo RETTA ALL'INFINITO e indichiamo con r_∞.

Riepilogando, il piano proiettivo reale può essere pensato come l'unione del piano $z=1$ (che è naturalmente identificato con il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$) con la retta all'infinito r_∞, cioè

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \{r_\infty\}.$$

Prima di procedere oltre, diamo la seguente

<u>DEFINIZIONE</u>. Sia $d \in \mathbb{N}$ un numero naturale.
Un polinomio $f(x,y,z)$ si dice OMOGENEO di grado d se tutti i monomi che lo compongono hanno grado d.

<u>Esempi</u>. • $f(x,y,z) = 5x^3 + 3xy^2 + 4xyz + 3z^2$ è un polinomio omogeneo di grado 3.

• $f(x,y,z) = x^2 + 2xy + 3xz + y^2$ è un polinomio omogeneo di grado 2

• $f(x,y,z) = 3x + 2y + z$ è un polinomio omogeneo di grado 1.

• $f(x,y,z) = 3x^2 + 2x + 1 + y^2$ NON è omogeneo, perché è costituito da monomi di grado 2, di grado 1 e di grado 0 (il termine noto).

Come nel caso del piano euclideo $\mathbb{R}^2$, le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si rappresentano mediante equazioni di primo grado, ma in questo caso, esse sarà date da un polinomio omogeneo.

Quindi, una qualunque retta di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha equazione

$$\bar{r} : ax + by + cz = 0 \qquad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Pensando $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup r_\infty$ come unione del piano cartesiano e di una retta all'infinito, si ha che la retta all'infinito ha equazione

$$r_\infty : \quad z = 0$$

(perché tutti i suoi punti sono nella forma $[x, y, 0]$)

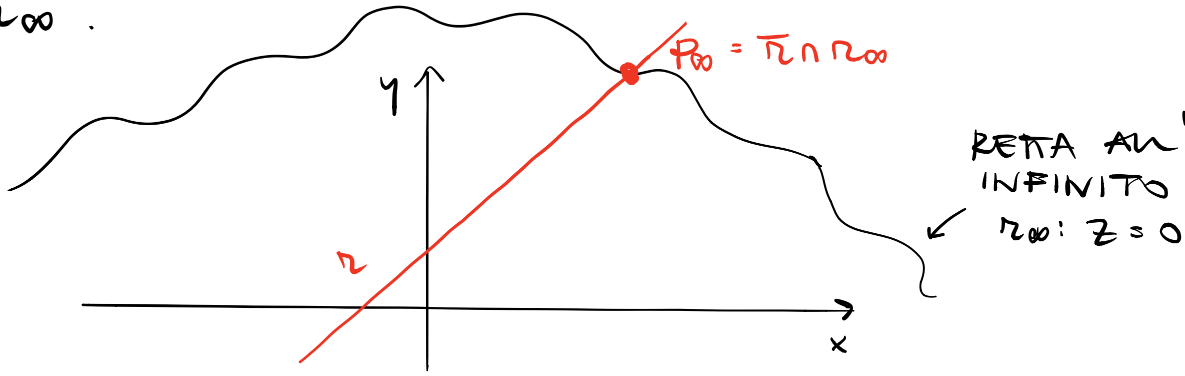
mentre ogni altra retta $\bar{r}: ax + by + cz = 0$

corrisponde alla retta di $\mathbb{R}^2$ di equazione

$$r: ax + by + c = 0$$

a cui viene "unito" un punto all'infinito

$P_\infty = \bar{r} \cap r_\infty$.



Il seguente teorema ci assicura che tutte le rette di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ hanno un punto in comune, cioè in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non esistono rette parallele.

<u>TEOREMA</u>. Siano $\bar{r}$ e $\bar{l}$ due rette nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Allora

$$\bar{r} \cap \bar{l} \neq \emptyset,$$

cioè due rette hanno sempre un punto in comune.

<u>Dimostrazione</u>. Questo teorema può essere dimostrato in vari modi. Noi ne diamo una dimostrazione algebrica.

Siano $\bar{r}: ax + by + cz = 0$ e $\bar{l}: a'x + b'y + c'z = 0$ le equazioni di $\bar{r}$ e $\bar{l}$.

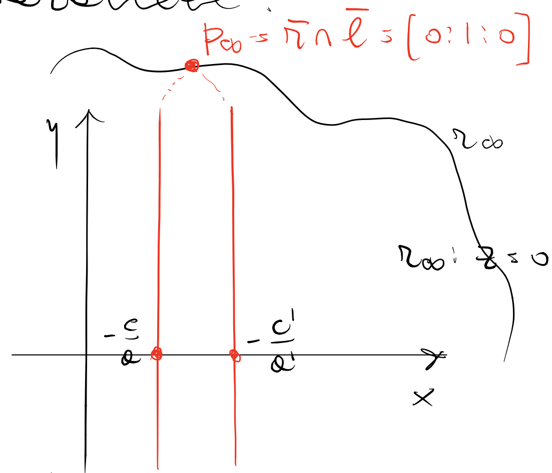
Siano $r: ax + by + c = 0$ e $l: a'x + b'y + c' = 0$ le corrispondenti rette nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Distinguiamo alcuni casi:

a) Se r e l non sono parallele in $\mathbb{R}^2$, allora

esse hanno un punto in comune, così che $r \cap l \neq \emptyset$.
Quindi: $\bar{r} \cap \bar{l} \neq \emptyset$ e il teorema è dimostrato.

b) Supponiamo che r e l siano parallele.



b1) Se r e l sono rette verticali, esse saranno nella forma

$r: ax + c = 0$ e $l: a'x + c' = 0$

cioè $r: x = -\frac{c}{a}$ e $l: x = -\frac{c'}{a'}$

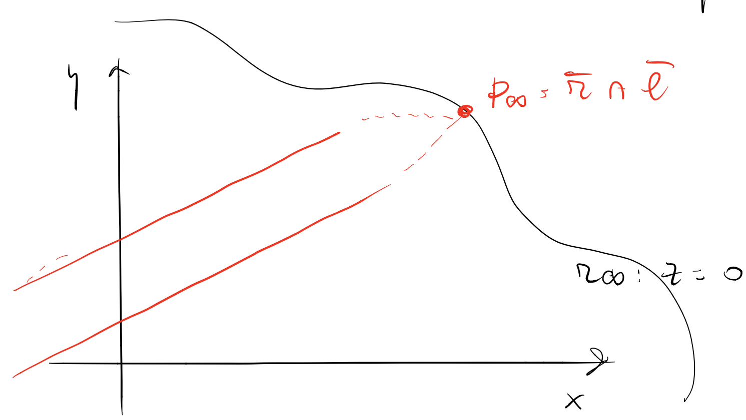
Perciò $\bar{r}: x = -\frac{c}{a}z$ e $\bar{l} = x = -\frac{c'}{a'}z$, quindi la loro intersezione si otterrà risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x = -\frac{c}{a}z \\ x = -\frac{c'}{a'}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z \\ -\frac{c}{a}z = -\frac{c'}{a'}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z \\ z\left(\frac{c'}{a'} - \frac{c}{a}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{c}{a}z = -\frac{c}{a} \cdot 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il punto $[x, y, z] = [0, 1, 0]$ soddisfa il sistema, cioè $\bar{r} \cap \bar{l}$ è un punto $P_\infty[0, 1, 0]$ sulla retta all'infinito $r_\infty : z = 0$.

b2) Infine, supponiamo che r e l siano rette oblique e parallele.



Perciò

$r: y = mx + q$

e

$l: y = mx + q'$

con $m = -\frac{a}{b} = -\frac{a'}{b'}$

$q = -\frac{c}{b}$ e $q' = -\frac{c'}{b'}$.

Quindi $\overline{r}: y = mx + qz$ e $\overline{l}: y = mx + q'z$.

Mettendo a sistema le equazioni di $\overline{r}$ e $\overline{l}$ otteniamo
$$\begin{cases} y = mx + qz \\ y = mx + q'z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + qz \\ qz = q'z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx + qz \\ (q - q')z = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} y = mx \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Il punto $[x, y, z] = [1, m, 0]$ soddisfa il sistema (e tutte le altre soluzioni sono ad esso proporzionali), quindi $\overline{r} \cap \overline{l}$ è dato da un punto $P_\infty [1, m, 0]$ che giace sulla retta all'infinito. $\square$

OSSERVAZIONE. La dimostrazione precedente mostra che "rette parallele in $\mathbb{R}^2$ si incontrano nella retta all'infinito di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$" come nell'idea B a pagina 1.

OSSERVAZIONE. Poiché in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non esistono rette parallele, non è soddisfatto il V POSTULATO DI EUCLIDE. Quindi il piano proiettivo reale è un esempio di geometria non euclidea.

OSSERVAZIONE. Nella descrizione di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e delle sue coordinate omogenee emerge l'idea di proiezione da un punto dello spazio 3-dimensionale su un piano, come nell'idea A a pagina 1.

Infine, nella prossima ed ultima sezione, vedremo alcune analogie con l'idea C a pagina 1.

3. "ANAMORFOSI" DELLE CONICHE IN $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Abbiamo visto che una retta $\bar{r}$ nel piano proiettivo reale è rappresentata da un polinomio omogeneo di grado 2 ed è ottenuta come unione di una retta r nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ e di un punto all'infinito $P_\infty = r \cap r_\infty$.

Vogliamo ora cercare di capire cosa accade alle coniche (irriducibili), cioè a PARABOLE, IPERBOLI ed ELLISSI (e, in particolare, alle CIRCONFERENZE).

Nel piano cartesiano, questi luoghi geometrici sono rappresentati da equazioni di secondo grado. Analogamente, le coniche in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono descritte da equazioni date da un polinomio omogeneo di secondo grado.

Quindi, ogni conica in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è nella forma

$$\bar{C} : ax^2 + by^2 + cxy + dxz + eyz + fz^2 = 0$$

con $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$.

Pensando $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ come $\mathbb{R}^2 \cup r_\infty$, possiamo pensare $\bar{C}$ come l'unione di una conica nel piano cartesiano

$$C : ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$$

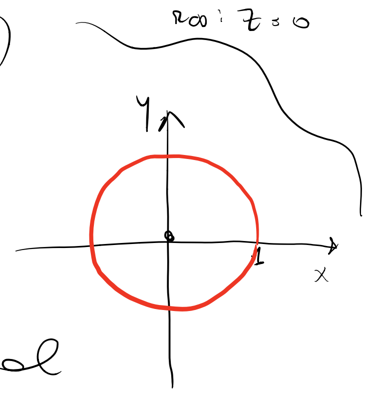
e dei suoi eventuali punti all'infinito, ottenuti dall'intersezione $\overline{C} \cap r_\infty$.

<u>OSSERVAZIONE</u>. Per passare dall'equazione di $\overline{C}$ a quella di C, abbiamo posto $z = 1$.
Questo processo si chiama DEOMOGENEIZZAZIONE rispetto a z (e viene fatto così perché la retta all'infinito r_∞ ha equazione $z = 0$).

Ora, studiamo quanti sono i punti all'infinito delle varie coniche di $\mathbb{R}^2$.

1) Se C è un'ELLISSE o, in particolare, una CIRCONFERENZA, $\overline{C}$ non ha punti all'infinito, cioè $\overline{C} \cap r_\infty = \emptyset$.

Mostriamolo in un esempio, anche se questo fatto è vero per ogni ellisse (o circonferenza).
Consideriamo la circonferenza $C: x^2+y^2-1=0$.
Essa è la curva in $\mathbb{R}^2$ corrispondente alla conica $\overline{C}: x^2+y^2-z^2=0$.



Allora l'intersezione $\overline{C} \cap r_\infty$ è data dal sistema
$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Quindi l'unica soluzione del sistema è data dal punto $[x,y,z]=[0,0,0]$, che (come abbiamo visto) non appartiene a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

2) Una PARABOLA ha un solo punto all'infinito.
(anche se l'intuizione potrebbe farci pensare che

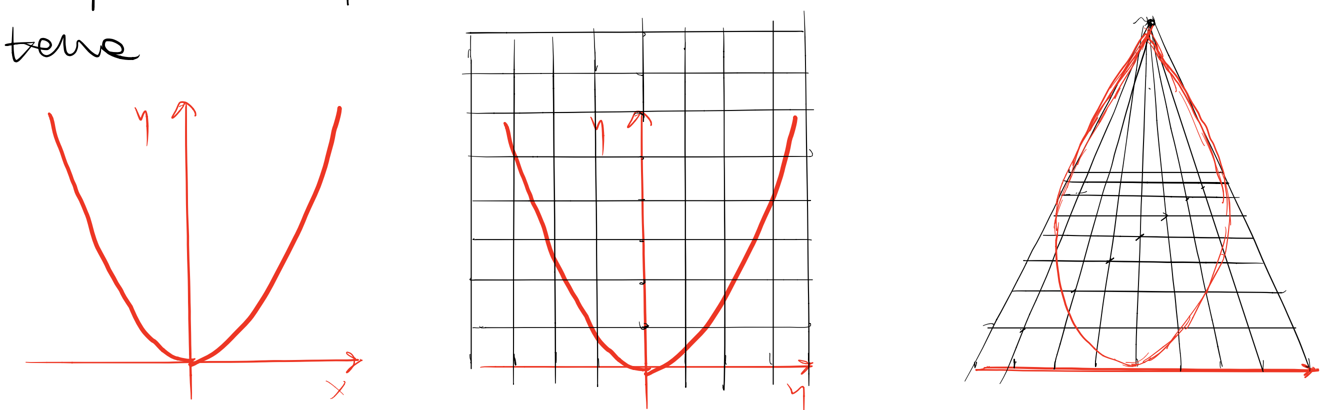
essa ne abbia 2, uno per ciascun ramo della parabola).

Il fatto è che i 2 rami della parabola si incontrano sulla retta all'infinito.

Anche questa volta, verifichiamolo solo in un esempio.

Sia $C: y-x^2=0$, così che $\bar{C}: yz-x^2=0$

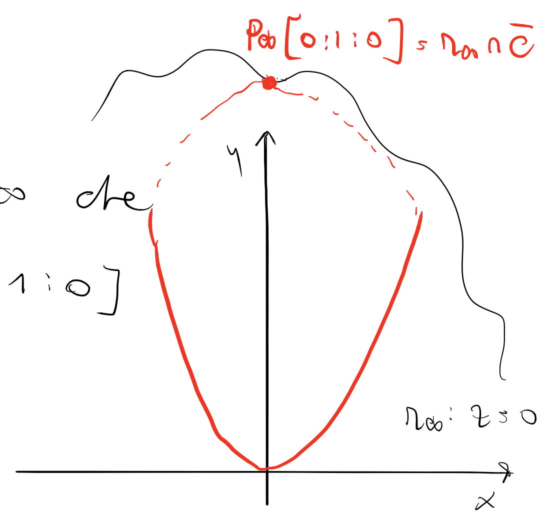
Prima di fare i conti, cerchiamo di convincerne "mediante la prospettiva". A tal fine, rappresentiamo la parabola sul piano cartesiano, mettiamo una quadrettatura sul piano e, infine, mettiamo il piano "in prospettiva" come se lo appoggiassimo a terra



Da un punto di vista algebrico, i punti all'infinito di $\bar{C}: yz-x^2=0$ si ottengono dal sistema

$$\begin{cases} yz-x^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ vi è un solo punto all'infinito che ha coordinate $[x,y,z]=[0:1:0]$

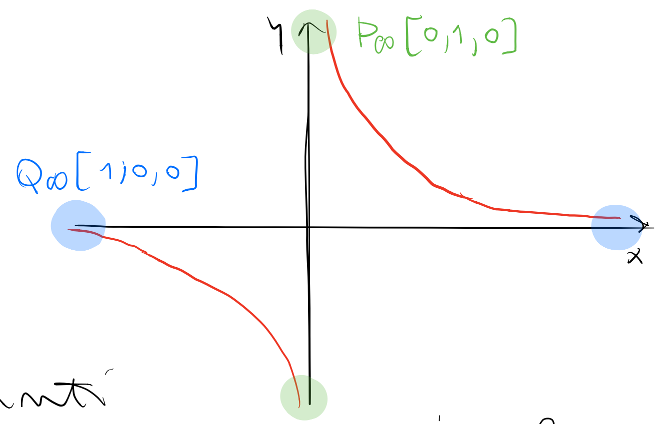


3) Infine, l'IPERBOLE ha 2 punti all'infinito, uno per ciascun asintoto.

Anche per l'iperbole, vediamolo in un caso particolare.

Sia $C: xy - 1 = 0$, che corrisponde alla conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ avente equazione

$$\overline{C}: xy - z^2 = 0$$



le coordinate dei suoi punti all'infinito si ottengono come soluzioni del sistema

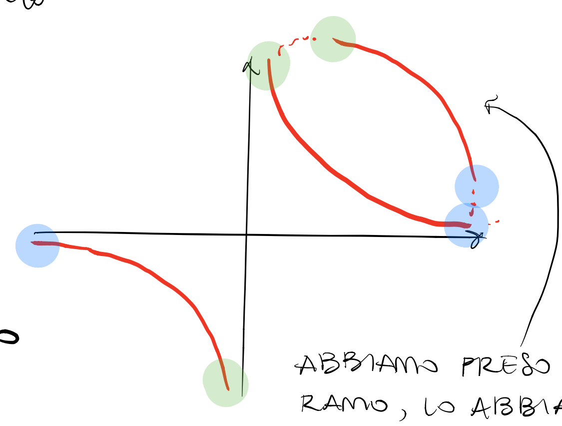
$$\begin{cases} xy - z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \nearrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \searrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Otteniamo 2 punti all'infinito:

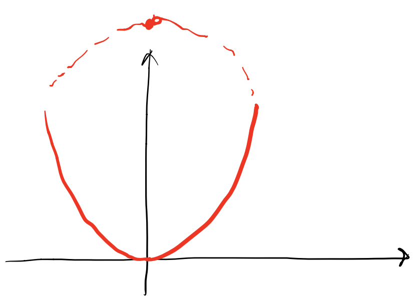
$$P_\infty[0,1,0] \quad \text{e} \quad Q_\infty[1,0,0]$$

<u>OSSERVAZIONE</u>. Dalla descrizione appena vista si ha che in un certo senso, l'iperbole si chiude all'infinito come se fosse un'ellisse tagliata in 2 dalla retta r_∞

Inoltre, anche per la parabola, abbiamo visto che i suoi rami si "chiudono" all'infinito



ABBIAMO PRESO L'ALTRO RAMO, LO ABBIAMO RIBALTATO IN MODO DA FAR COINCIDERE I PUNTI ALL'INFINITO E, INFINE, INCOLLIAMO I DUE RAMI.



A breve, vedremo infatti che in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non è possibile stabilire se una data conica $\overline{C}$ sia un'ellisse, una parabola o un'iperbole.

In particolare, vedremo che "a seconda del punto da cui osserviamo la conica, essa apparirà di volta in volta un ellisse (o una circonferenza), una parabola o un'iperbole), ossia vedremo una sorta di "anamorfosi delle coniche irriducibili in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$" (in linea con l'idea C di pagina 1).

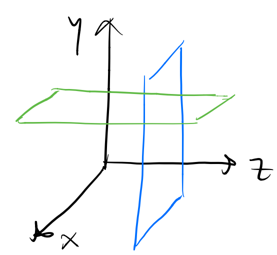
In particolare, osserveremo questo fenomeno mediante la seguente conica di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$\overline{C}: \ x^2 - 2yz + z^2 = 0 .$$

Prima di cominciare la nostra analisi, osserviamo che finora abbiamo posto che la retta all'infinito fosse la retta r_∞ di equazione $z=0$.

Tuttavia, questa è una scelta che corrisponde allo scegliere un particolare sistema di riferimento o punto di osservazione.

Di fatto, ciò dipende dal fatto che per rappresentare le rette di $\mathbb{R}^3$ abbiamo usato il piano $z=1$



Se, ad esempio, avessimo usato il piano $y=1$, la retta all'infinito sarebbe stata quella di equazione $y=0$ (cioè l'asse delle ascisse).

Quello che faremo ora sarà scegliere di volta in volta una retta all'infinito diversa, ottenendo una conica diversa.

- Inizialmente, poniamo $r_\infty : z = 0$, perciò deomogeneizziamo l'equazione di $\overline{C} : x^2 - 2yz + z^2 = 0$ ponendo $z = 1$.

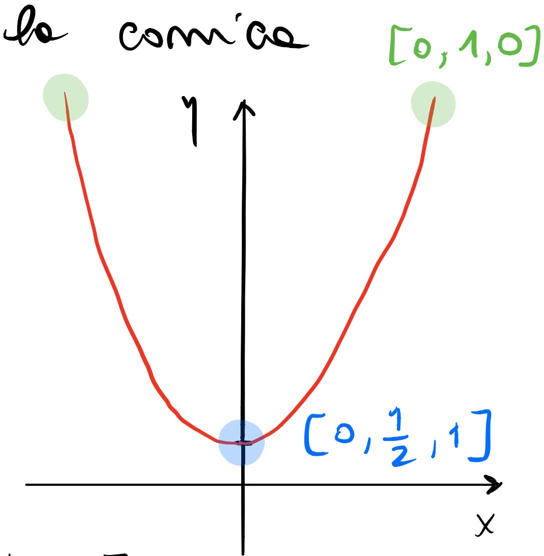
In questo modo, otteniamo la conica

$$C_z : x^2 - 2y + 1 = 0,$$

ossia

$$C_z : y = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}$$

è una PARABOLA.



Il vertice della parabola è nel punto $(0, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^2$, che come punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è $[0, \frac{1}{2}, 1]$.

Il punto all'infinito di C_z è la soluzione del sistema $\begin{cases} x^2 - 2yz + z^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, cioè $[x,y,z] = [0,1,0]$.

- Poniamo ora che la retta all'infinito sia la retta $r_\infty : y = 0$.

Quindi, deomogeneizziamo l'equazione della conica $\overline{C} : x^2 - 2yz + z^2 = 0$ rispetto a y, ossia poniamo $y = 1$.

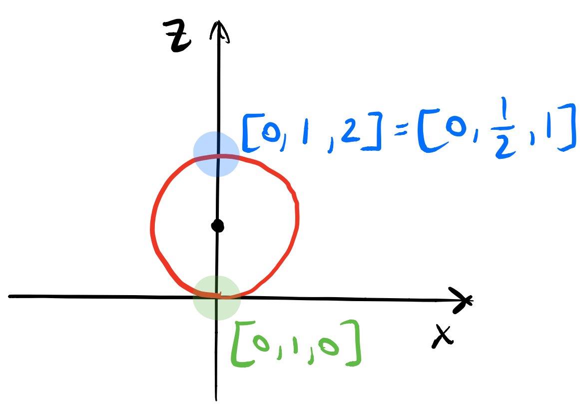
In questo modo otteniamo

$$C_y : x^2 - 2z + z^2 = 0$$

cioè

$$C_y : x^2 + (z-1)^2 = 1$$

che è l'equazione di una CIRCONFERENZA di centro $(x,z) = (0,1)$ e raggio 1.



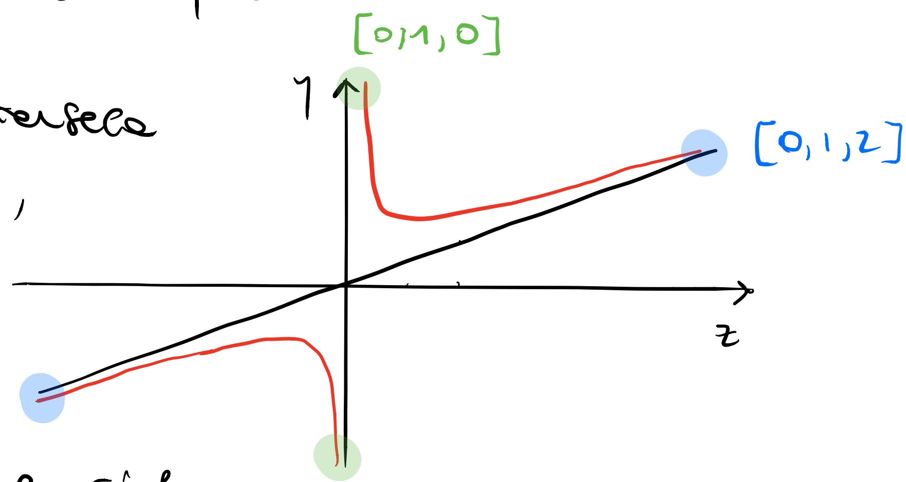
In particolare, la circonferenza C_y interseca gli assi cartesiani nei punti $(\overset{x}{0},\overset{z}{0})\in\mathbb{R}^2$ e $(\overset{x}{0},\overset{z}{2})\in\mathbb{R}^2$ che corrispondono ai punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di coordinate $[0,1,0]$ e $[0,1,2]=[0,\frac{1}{2},1]$

↳ i due punti sono proporzionali.

- Infine, assumiamo che la retta all'infinito abbia equazione $r_\infty : x=0$ e deomogeneizziamo rispetto a x ponendo $x=1$ nell'equazione $\overline{C} : x^2-2yz+z^2=0$.

Otteniamo quindi la conica $C_x : 1-2yz+z^2=0$, cioè $C_x : z(2y-z)=1$ è un'IPERBOLE con asintoti $z=0$ e $2y-z=0$.

Quindi C_x non interseca gli assi cartesiani, ma ha 2 punti all'infinito, che si ottengono come soluzioni del sistema



$$\begin{cases} x^2-2yz+z^2=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z(2y-z)=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z=0 \\ z=2y \end{array}$$

ossia $[0,1,0]$ e $[0,1,2]$.

In conclusione, abbiamo visto come deomogeneizzando la conica proiettiva $\overline{C}\subseteq\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rispetto a variabili diverse, si ottengono coniche euclidee C_z, C_y e C_x diverse.