

LA MATEMATICA E I MODELLI BIOLOGICI

Mirella Cappelletti Montano

Orientamento Consapevole A. A. 2020/2021

Dipartimento di MATEMATICA

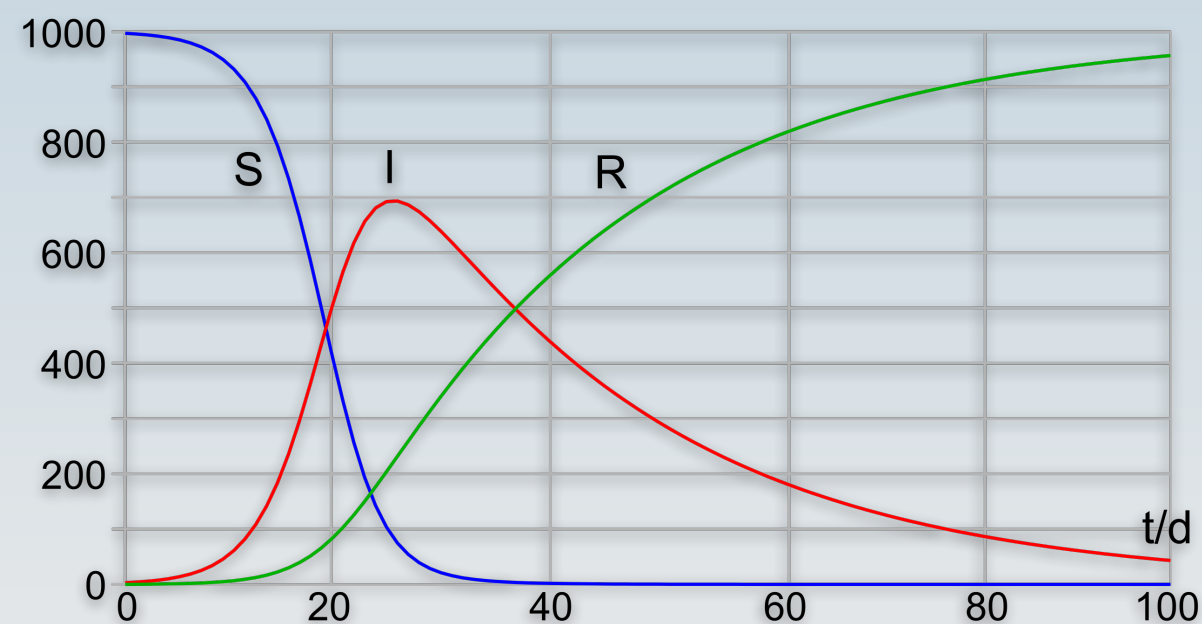
Università degli Studi di Bari "A. Moro"

COS'È UN MODELLO MATEMATICO?

Un modello matematico è una possibile rappresentazione dell'evoluzione nel tempo di un fenomeno fisico, biologico, economico, tramite l'uso di concetti matematici.

Uno degli scopi principali dei modelli matematici è, quindi, quello di fare previsioni.

Un modo per misurare l'efficacia di un modello è vedere di quanto l'evoluzione reale del fenomeno stesso differisce da quella prevista dal modello, attraverso esperimenti o l'utilizzo di dati già acquisiti.



Molto spesso i modelli matematici sono codificati tramite “il calcolo differenziale”. Ci sono comunque modelli costruiti utilizzando altre teorie matematiche (metodi iterativi, teoria dei giochi, calcolo combinatorio, calcolo stocastico,...)

Sono spesso necessarie ipotesi semplificative.

Un fenomeno può essere rappresentato attraverso più modelli, che ne evidenziano aspetti diversi.

Allo stesso modo, un modello matematico può descrivere più fenomeni distinti. Per esempio, alcuni modelli sullo studio di come varia una popolazione nel tempo possono essere usati in Economia.

UN PO' DI STORIA

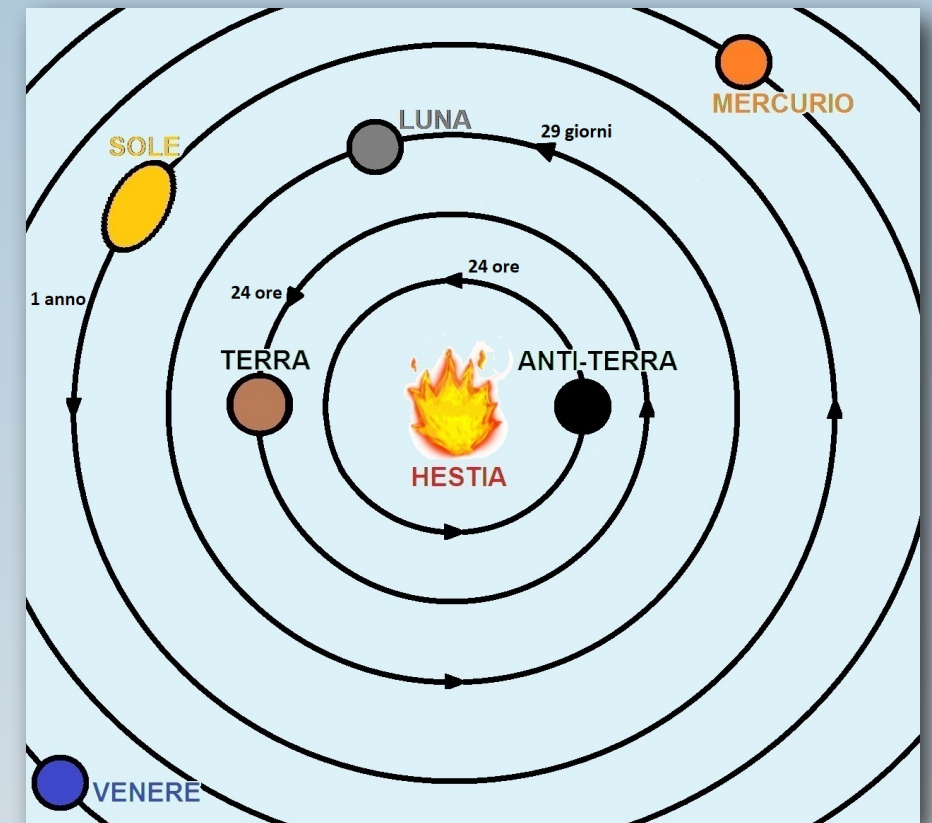
L'idea che si potesse rappresentare la realtà (o aspetti di essa) tramite la Matematica non è venuta naturalmente.

Il fatto stesso che vi siano leggi che governano i fenomeni naturali (in particolare i fenomeni fisici) e che esse possano essere espresse in forma matematica è stato a lungo dibattuto, soprattutto per motivi religiosi, e solo a partire dal 1600 si è pervenuti a un'idea più moderna di Scienza.

Pitagora (580/570 a. C.-495 a. C.) e la sua scuola furono tra i primi a intuire il ruolo della Matematica nella descrizione della realtà. La Cosmologia Pitagorica metteva al centro dell'Universo Hestia, un enorme fuoco che plasmava il mondo. Tutti i pianeti allora conosciuti (8) e il Sole le ruotavano attorno in orbite circolari e compiendo movimenti armonici rappresentati da precisi rapporti matematici, gli stessi che regolano gli accordi musicali.

I Pitagorici ritenevano che il movimento delle orbite producesse un suono meraviglioso, detto "armonia delle sfere", che l'orecchio umano non poteva percepire.

La Cosmologia Pitagorica prevedeva un ulteriore pianeta, detto Antiterra. Era necessario per arrivare al numero sacro 10; posto in opposizione tra la Terra ed Hestia, era invisibile all'uomo.



La visione della Matematica che prevalse nel mondo greco fu, però, quella di Aristotele (384/383 a. C. - 322 a. C.).

Per Aristotele, la Matematica aveva un ruolo importante nella creazione di un rigoroso sistema di ragionamento logico, che riguardava enti astratti.



Negli Elementi di Euclide (quasi contemporaneo di Aristotele), gli enti matematici sono astrazioni di concetti in cui ci imbattiamo nella realtà, ma il viceversa non è vero; la realtà non si può esprimere tramite leggi matematiche.

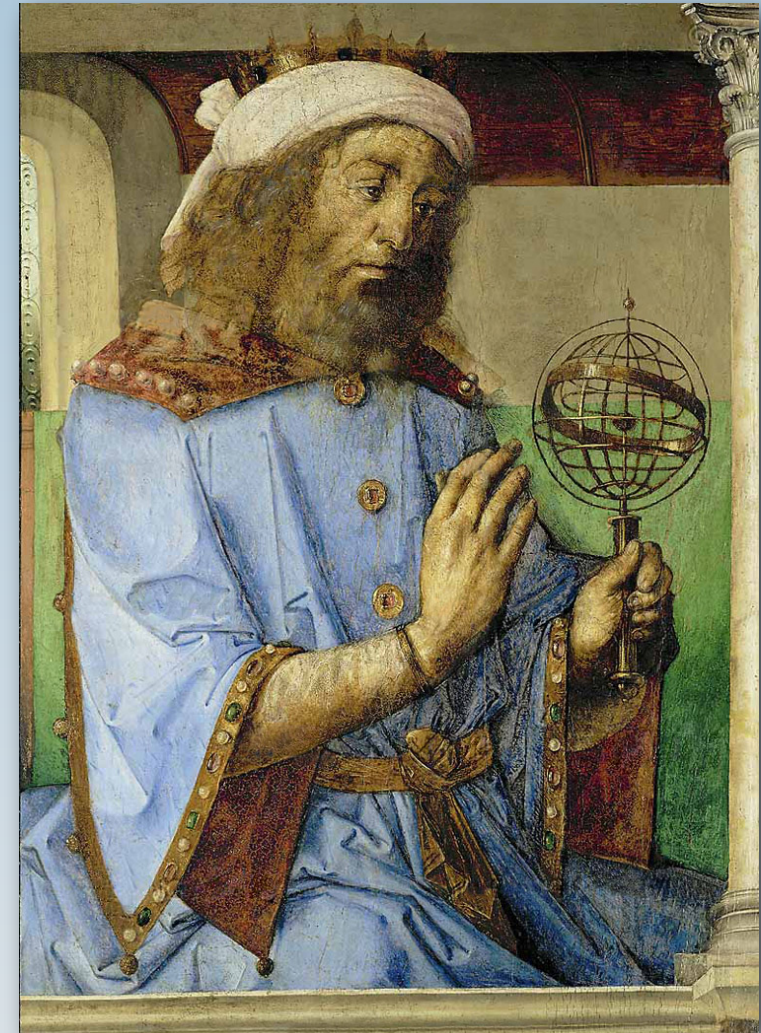
Quasi tutti i matematici greci successivi a Euclide (tranne pochissime eccezioni) si attennero a questa visione. Non vi fu il tentativo di comprendere le leggi che governano la natura, né di esprimerle in forma matematica.

Ciò si evince anche dal fatto che il sistema cosmologico più diffuso nell'antica Grecia fu il Sistema Tolemaico o Geocentrico.

IL SISTEMA TOLEMAICO

Il Sistema Geocentrico fu proposto dall'astronomo Eudosso di Cnido nel V secolo a.C. e poi perfezionato da Aristotele e Tolomeo.

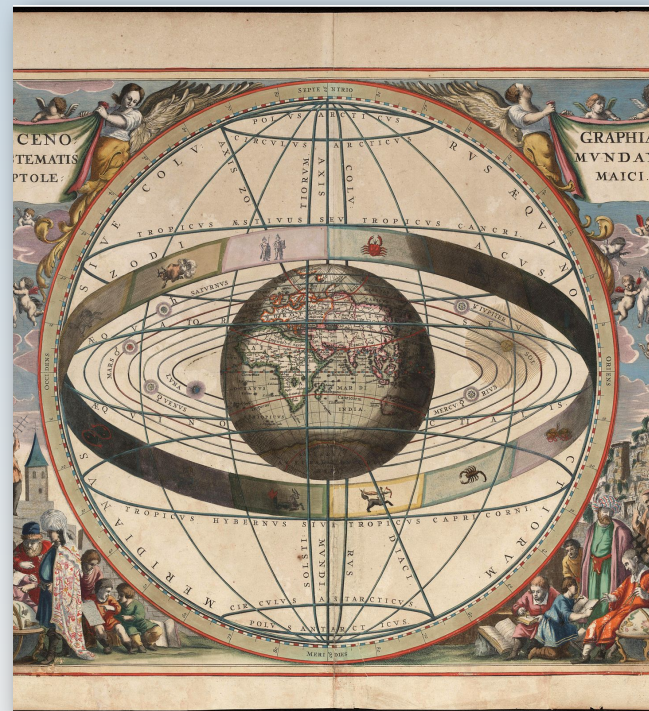
Ebbe ampia diffusione anche dopo l'avvento del Cristianesimo perché porre la Terra al centro dell'Universo enfatizzava il ruolo dell'Uomo come suprema creatura di Dio.



Secondo il sistema Tolemaico le orbite dei pianeti attorno alla Terra erano circolari e il cosmo era diviso in sfere concentriche.

Vi era una rigida distinzione tra il mondo dei corpi celesti, simbolo della perfezione divina, e il mondo terrestre, imperfetto e corruttibile.

Era possibile una trattazione quantitativa (e quindi tramite la Matematica) dello studio dei corpi celesti, ma essa riguardava solo il calcolo del loro moto, non lo studio delle cause di tale moto.



La concezione che non ci fossero leggi comprensibili all'uomo (e tantomeno esprimibili matematicamente) che regolassero la Natura intorno a noi perdurò fino al XVI secolo.

In generale, lo sviluppo della Matematica si interruppe per lungo tempo (fino a tutto l'Alto Medioevo) ed essa fu relegata solo alle mere necessità pratiche del far di conto.

A partire dal 1200, le cose cominciarono lentamente a cambiare. Nacquero nuove invenzioni tecniche, che contribuirono a creare benessere economico e venne introdotto in Europa il sistema numerico decimale.

Un primo tentativo di utilizzare la Matematica per descrivere un fenomeno biologico risale a quest'epoca.

I NUMERI DI FIBONACCI

Leonardo da Pisa (1170-1242), detto Fibonacci, è noto soprattutto per aver scritto il *Liber Abbaci* (1202).

Il Liber Abbaci era un trattato di Matematica destinato soprattutto ai mercanti, per aiutarli a gestire la propria contabilità, ad effettuare cambi di valute e calcolare il prezzo delle merci.

Il libro contiene una delle prime trattazioni presentate nel mondo occidentale della numerazione posizionale indiana (unità, decine, centinaia...) che Fibonacci aveva appreso durante un suo soggiorno nell'attuale Algeria.

Il sistema numerico decimale, benché molto più pratico di quello fino ad allora in uso (in cui le cifre scritte usando i numeri romani e i calcoli erano svolti attraverso il cosiddetto **abaco**) stentò molto ad essere accettato in Europa. Addirittura nel 1280 la città di Firenze proibì l'uso delle cifre indo-arabe, soprattutto dello 0. Si riteneva, infatti, che esso potesse essere utilizzato per inviare messaggi segreti e, infatti, il termine "cifra" deriva proprio da questo.



Nel Liber Abbaci, oltre all'introduzione del sistema numerico decimale, sono presentate altre importanti nozioni, come alcuni criteri di divisibilità, gli algoritmi per il calcolo di radici quadrate e cubiche, la definizione di numeri primi e numeri perfetti.

Queste questioni sono affrontate anche attraverso una serie di esempi esplicativi e interessanti problemi.

Nel XII capitolo del Liber Abbaci, viene presentato un problema su come evolve una certa popolazione ne tempo.

Il problema esposto da Fibonacci è il seguente:

Un allevatore dispone di una coppia di conigli (maschio e femmina) appena nati. Questa coppia diventa fertile al compimento del primo mese di età. Appena fertili, i conigli ogni mese danno vita a un'altra coppia di conigli (maschio e femmina). A loro volta, essi sono fertili al compimento del primo mese di vita e, da quel momento, generano una coppia di conigli (maschio e femmina) al mese.

Quante coppie di conigli ci saranno nell'allevamento dopo un anno?

Si inizia con 1 coppia di conigli.

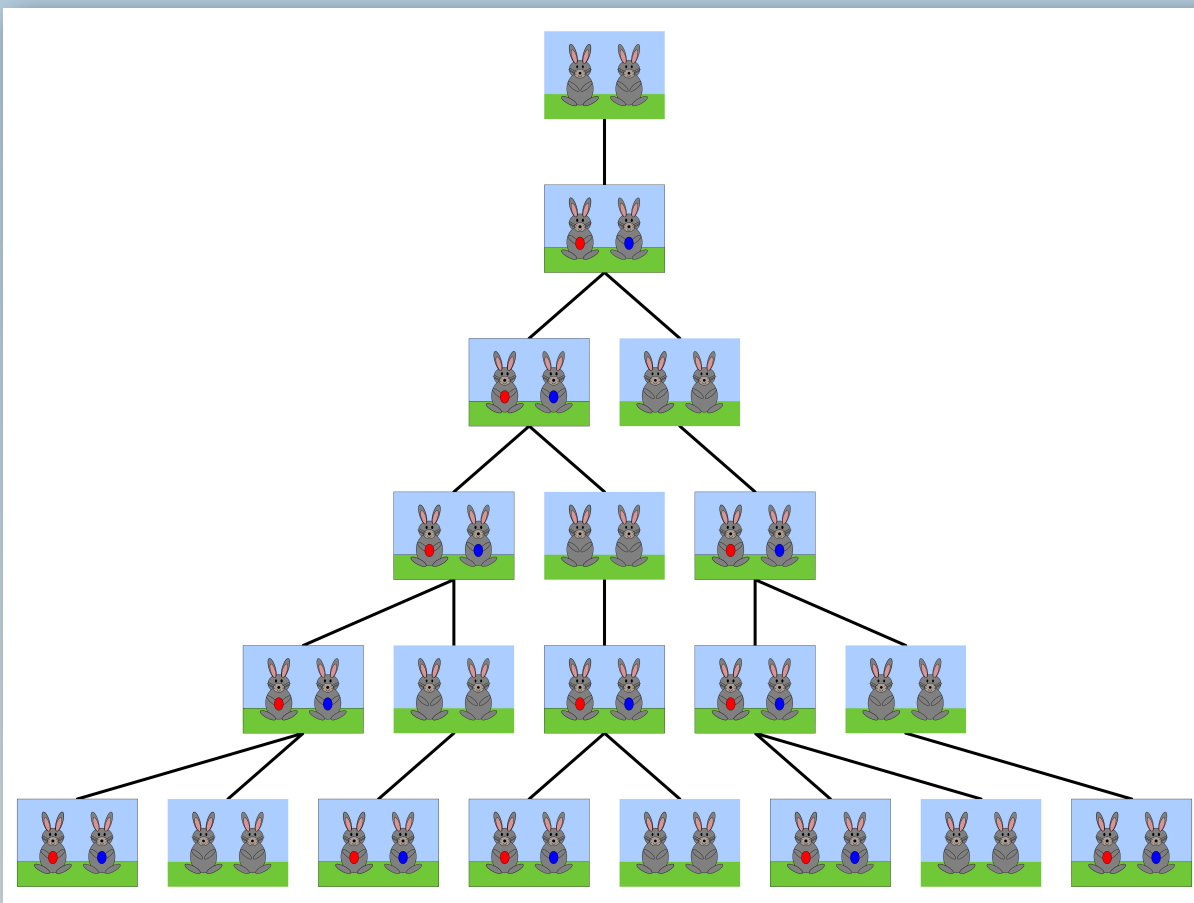
Dopo 1 mese, essa sarà fertile.

Dopo 2 mesi, si hanno a disposizione 2 (1+1) coppie di conigli, di cui, però, solo una fertile.

Dopo 3 mesi, ci saranno 3 (2+1) coppie di conigli, perché solo una di esse ha potuto generare.

Dopo 4 mesi, ci saranno 5 (3+2) coppie di conigli, in quanto solo 2 delle coppie precedenti sono fertili.

....e così via.



<https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FibonacciRabbit.svg?uselang=it>

In questo modo, sono definiti infiniti numeri F_n , ove ogni F_n indica quante coppie di conigli ci sono dopo n mesi.

In particolare, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ e, per ogni $n \geq 2$,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

La risposta alla domanda è $F_{12} = 233$, ma certamente possiamo iterare il procedimento per ogni numero naturale n , ottenendo quella che prende il nome di sequenza (o successione) di Fibonacci.

Esplicitamente, i numeri che compongono la sequenza di Fibonacci sono 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610....

I numeri di Fibonacci, hanno la straordinaria proprietà di comparire in Natura in molte situazioni inaspettate.

Ad esempio, la maggior parte dei fiori hanno un numero di petali (3, 5, 8, 13, 21...) che è uno dei numeri di Fibonacci.

Le inflorescenze che si trovano al centro di girasoli, margherite o nel cavolo romano si dispongono in spirali orarie e antiorarie, il cui numero è generalmente un numero di Fibonacci.



Una branca della Botanica, detta Filotassi, studia il modo in cui fiori, foglie o rami sono distribuite nello spazio, al fine di ottimizzare l'utilizzo delle risorse (sole, acqua...) e difendersi dagli agenti esterni.

In genere, le foglie sui rami si dispongono in modo che esse non si coprano l'un l'altra e possano essere ugualmente esposte alla luce del sole. Se si prende come punto di partenza la foglia più esterna di un ramo e si conta quante foglie ci sono finché non se ne trova un'altra allineata a questa, il risultato è spesso un numero di Fibonacci.

LA NASCITA DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

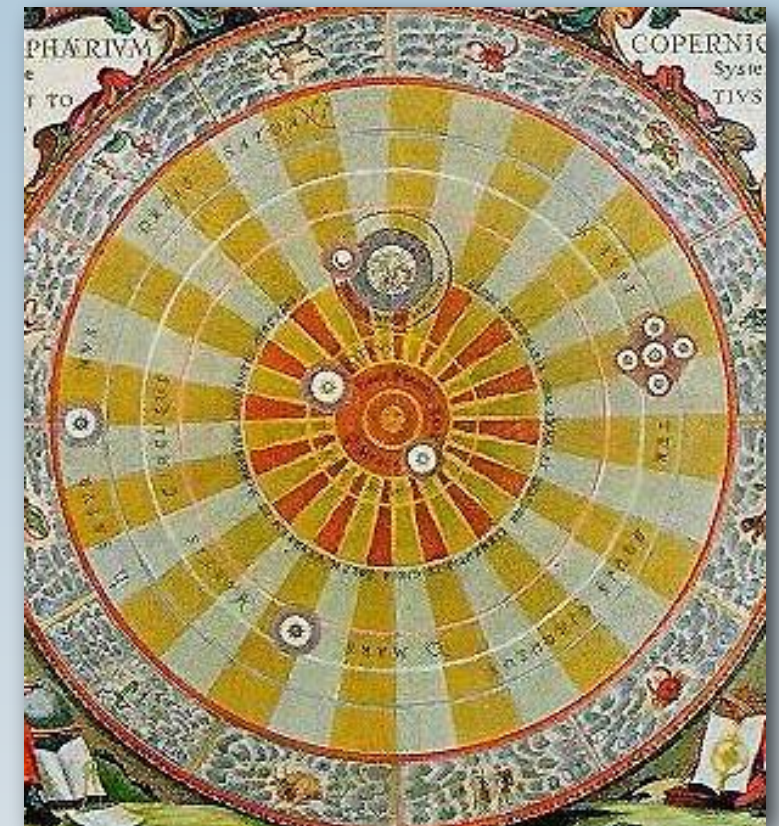
I numeri di Fibonacci possono essere considerati poco più di un "gioco" matematico. Lo studio dei fenomeni naturali e biologici tramite la Matematica non si diffuse per molti anni ancora.

A partire dal 1500, si fece strada la curiosità di investigare le cause ultime che generano i fenomeni naturali. La dualità Cielo/Terra venne meno, si cominciò a voler investigare sulla Natura in modo unificato.

Il legame indissolubile tra Matematica e fenomeni naturali fu stabilito da Galileo Galilei (1564-1642).

Galileo, fermo sostenitore del sistema eliocentrico, ne "Dialogo sui massimi sistemi", si propose di "nobilitare la Terra", considerandola alla stregua di tutti gli altri corpi celesti.

Questo fu il vero motivo del conflitto tra Galileo e la Chiesa. Il mondo ecclesiastico sosteneva che Cielo e Terra fossero separati. Le cause ultime del moto dei corpi celesti erano espressione di leggi divine incomprensibili all'uomo. Galileo, invece, poneva Cielo e Terra sullo stesso piano, soggetti alle stesse leggi.



IL MONDO È MATEMATICO

Per Galileo, tutto ciò che è intorno a noi è scritto in leggi matematiche, ed è compito dello scienziato individuare queste leggi e comprenderle.

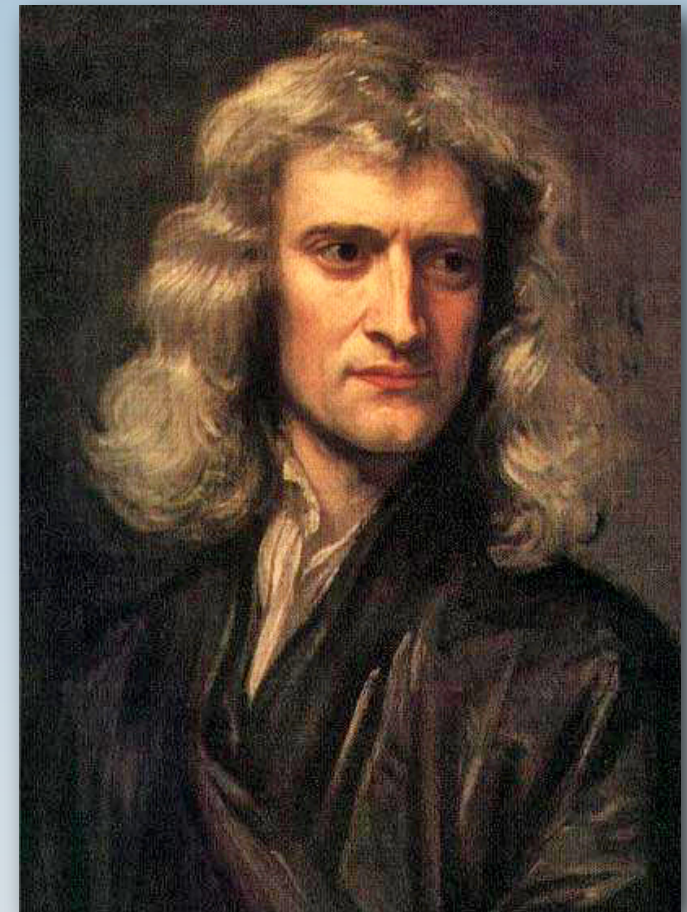
Purtroppo, la Matematica a disposizione all'epoca di Galileo era inadeguata per questo compito. L'espressione in leggi matematiche che governano la realtà fisica attorno a noi necessitò della creazione di una nuova branca della Matematica, detta CALCOLO DIFFERENZIALE.

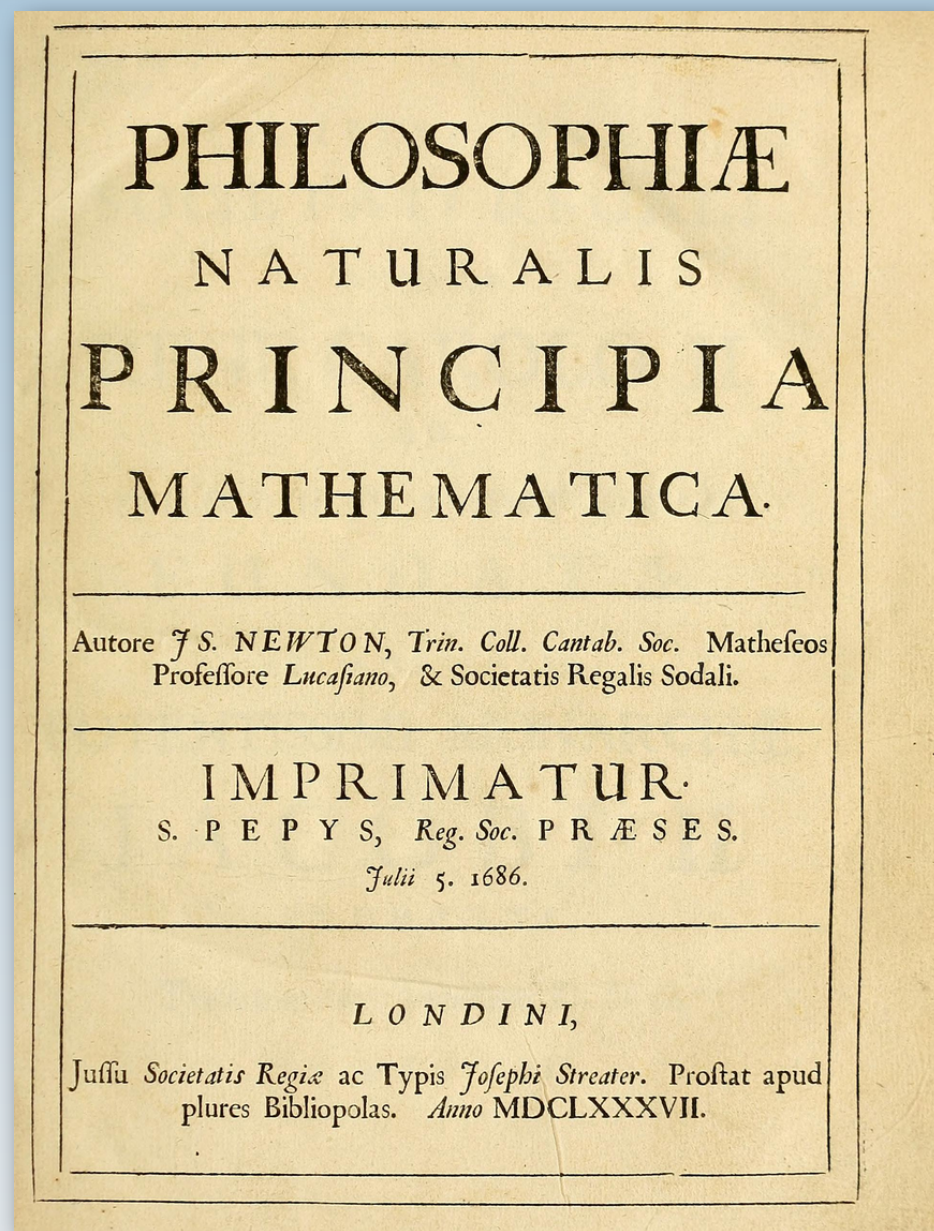
IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Il Calcolo Differenziale venne introdotto indipendentemente (anche se c'è un grosso dibattito sulla paternità della teoria) da Isaac Newton (1642-1726) e da Gottfried Leibniz (1646-1716).

Fu Newton, però, che intuì che le leggi che governano il mondo attorno a noi possono essere espresse attraverso il Calcolo Differenziale.

Per Newton tutti i fenomeni possono essere visti come il "moto" di un qualche ente e studiare come varia un fenomeno nel tempo significa studiare la velocità di questo moto.





Nel suo libro più famoso, *I Principia Mathematica*, pubblicato nel 1687, Newton pose le basi della Fisica Classica (Leggi della Dinamica, Legge della Gravitazione Universale).

In particolare, Newton riconobbe che la gravità che agisce sulla Terra è la stessa forza responsabile delle maree, del moto e dell'orbita dei pianeti. Il progetto di Galileo trovò quindi pieno compimento con Newton.

La formulazione matematica delle leggi della Fisica classica è il primo esempio moderno di Modello Matematico.

MODELLI MATEMATICI IN BIOLOGIA

Nel tempo, la Matematica ha aumentato il suo raggio d'azione al di fuori dal campo della Fisica e i modelli matematici sono diventati un metodo di analisi in discipline come la Biologia, l'Economia o le Scienze sociali.

Il problema fondamentale nel trasferimento dei metodi matematici in questi ambiti è proprio l'assenza di leggi "certe" come la Legge di Gravitazione Universale. La rappresentazione di un fenomeno biologico tramite modelli matematici vale solo da un punto di vista "formale".

Per questo, in taluni casi, i modelli matematici in queste scienze consentono di fare previsioni meno accurate. Nonostante ciò, l'approccio "matematico" sostanzialmente funziona.

Presenteremo ora due modelli che descrivono il modo in cui una popolazione si evolve nel tempo, il modello di Malthus e il modello Logistico.

Benché questi modelli possono essere descritti usando il calcolo differenziale, utilizzeremo un altro approccio, che è poi spesso usato come via per approssimare le soluzioni di problemi differenziali che possono essere difficili da studiare, i cosiddetti METODI ITERATIVI.

Cos'è un processo (o metodo) iterativo?

Sia T una trasformazione che a un dato in entrata u_0 associa un dato in uscita $u_1 = T(u_0)$.

Applichiamo nuovamente la trasformazione T al dato u_1 ottenendo così un valore $u_2 = T(T(u_0)) = T(u_1)$.

Iterando il procedimento, al passo n -simo avremo $u_{n+1} = T(u_n)$.

In questo modo, a partire dal dato u_n possiamo calcolare u_{n+1} .

IL MODELLO DI MALTHUS

Il modello di Malthus è dovuto all'economista inglese Thomas Malthus (1766-1834), che lo introdusse nel trattato "*An essay on the principles of population as it effects the future improvement of the society*" del 1798.



Nei suoi studi di natura economica Malthus si riferiva alla popolazione umana, ma il modello si può applicare a molte altre specie, da mammiferi a batteri.

Le ipotesi su modello sono

- POPOLAZIONE ISOLATA (ossia non ci sono scambi con l'esterno, né in termini di risorse, né in termini di emigrazioni o immigrazioni);
- POPOLAZIONE INDISTINGUIBILE per sesso ed età.

Immaginiamo di voler stimare come varia una popolazione anno dopo anno (o fissiamo un altro intervallo di tempo a nostro piacere).

Denotiamo con N_0 la popolazione al tempo iniziale.

Denotiamo con N_1 la popolazione attesa dopo un anno.

Denotiamo con N_n la popolazione attesa dopo n anni.

Siamo interessati a studiare il cosiddetto **tasso di crescita della popolazione**, ossia, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la quantità

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n}$$

Il tasso di crescita rappresenta la variazione in termini assoluti tra la popolazione in due anni successivi rapportata con la popolazione N_n .

Il modello di Malthus prevede che il tasso di crescita di una popolazione è costante nel tempo.

Detta a tale costante, che si determina sperimentalmente e varia da specie a specie, abbiamo

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = a \quad \text{ossia} \quad N_{n+1} = (1 + a)N_n$$

La trasformazione che stiamo utilizzando è, quindi,

$$T(x) = (1 + a)x$$

In particolare, $N_1 = (1 + a)N_0$; inoltre

$$N_2 = (1 + a)N_1 = (1 + a)(1 + a)N_0 = (1 + a)^2 N_0.$$

Iterando il procedimento

$$N_{n+1} = (1 + a)N_n = (1 + a)(1 + a)^n N_0 = (1 + a)^{n+1} N_0.$$

Otteniamo, quindi, una formula “chiusa”, che dipende solo da N_0 .

Non sempre una cosa del genere è possibile.

Come varia il parametro a ? Sicuramente $1 + a > 0$ in quanto le popolazioni sono numeri positivi, quindi $a > -1$.

Se $1 + a > 1$, ossia $a > 0$, allora $(1 + a)^n$ tende ad essere sempre più grande all'aumentare di n ; la popolazione, quindi, cresce molto velocemente al variare di n .

Se $1 + a = 1$, ossia $a = 0$, allora $N_{n+1} = N_n$, ossia la popolazione si mantiene costante nel tempo.

Se $0 < 1 + a < 1$, ossia $-1 < a < 0$, $(1 + a)^n$ tende ad essere sempre più vicino a 0 al variare di n . La popolazione decresce in maniera molto rapida fino ad estinguersi.

Come si può determinare sperimentalmente il parametro a ?

Bisogna avere a disposizione dei dati reali, ottenuti, per esempio, tramite un esperimento o un censimento.

Poiché $N_1 = (1 + a)N_0$, segue facilmente che $a = \frac{N_1}{N_0} - 1$.

Come valore per N_0 e N_1 per calcolare a scegliamo quelli relativi ai dati sperimentali al passo $n = 0$ e $n = 1$.

Sia $N(t)$ il numero di membri di una certa popolazione all'istante t e denotiamo con $N'(t)$ la velocità con cui la popolazione varia all'istante t .

Chiamiamo $\frac{N'(t)}{N(t)}$ "tasso di aumento della popolazione".

Il modello di Malthus prevede che il tasso di aumento della popolazione è costante, ossia $\frac{N'(t)}{N(t)} = K$, con $K \in \mathbb{R}$.

Se $N(0) = N_0$ il modello di Malthus è rappresentato da

$$\begin{cases} N'(t) = KN(t) \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

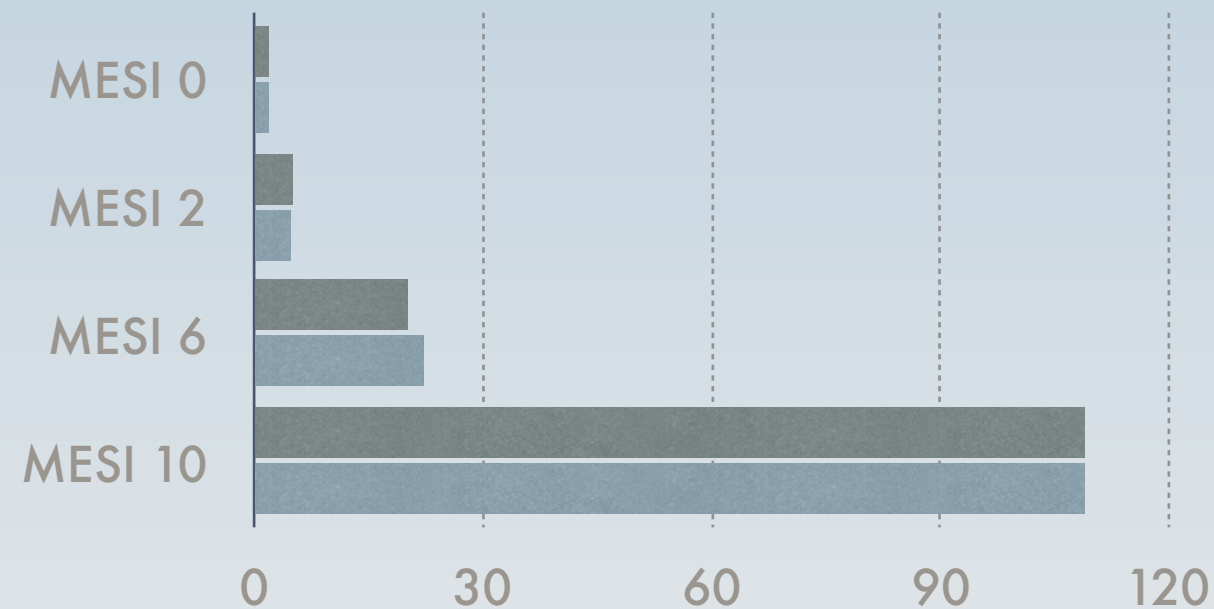
L' unica soluzione è $N(t) = N_0 e^{Kt}$.

DISCUSSIONE SUL MODELLO

Come ogni modello matematico, il modello di Malthus deve essere sottoposto a verifiche sperimentali. Due esperimenti in particolare permettono di capire bene quali sono i punti di forza e di debolezza del Modello di Malthus.

Nel 1975 il biologo Braun studiò dei piccoli roditori IN LABORATORIO. Le condizioni di vita erano quindi ideali e ai roditori venivano forniti cibo, acqua e risorse a volontà.

La popolazione iniziale era composta da 2 individui e si osservò come essa cresceva nell'arco di alcuni mesi. L'accordo tra i dati sperimentali e i valori attesi utilizzando il modello di Malthus era pressoché perfetto.



Negli anno '30 il biologo russo G. F. Gause (1910-1986) effettuò un altro esperimento.

Mise 5 protozoi in una provetta che conteneva del brodo di coltura e contò il numero di protozoi ogni giorno per 6 giorni.

Anche in questo caso, all'inizio c'era accordo tra dati reali e dati estrapolati dal modello di Malthus.

A un certo punto, però, la crescita della popolazione rallentò e il numero dei protozoi si assestò su una popolazione pressoché costante di poche centinaia di individui.

Secondo le stime ottenute attraverso il modello di Malthus, al sesto giorno ci sarebbero dovuti essere migliaia e migliaia di protozoi.

Il modello di Malthus, quindi, descrive la crescita di una popolazione in condizioni ottimali di cibo e risorse. Se ci sono abbastanza risorse la crescita di una popolazione è molto rapida.

Se le risorse cominciano a scarseggiare a seguito dell'aumento della popolazione, nelle fasi iniziali il modello di Malthus descrive bene la situazione, ma a un certo punto la crescita frena e sembrerebbe assestarsi su un valore "costante".

IL MODELLO LOGISTICO

Il modello logistico fu introdotto dal biologo-matematico P. F. Verhulst (1804-1849) nel 1837.

Esso rappresenta, in un certo senso, un "correttivo" del modello di Malthus.



Sia N_0 la popolazione a $t = 0$, denotiamo con N_1 la popolazione attesa dopo un anno e, ricorsivamente, con N_n la popolazione attesa dopo n anni.

Nel modello logistico, risulta che esistono a, b costanti positive tali che

$$\frac{N_{n+1} - N_n}{N_n} = a - bN_n.$$

Di qui segue che

$$N_{n+1} = N_n(a - bN_n) + N_n = (1 + a)N_n - bN_n^2$$

Quando N_n è un numero "piccolo" (quindi nelle prime fasi in cui studiamo il fenomeno), la quantità bN_n^2 è anch'essa "piccola", quindi il modello logistico all'inizio si comporta quasi come quello di Malthus; all'aumentare della popolazione la presenza di bN_n^2 diventa più rilevante.

Anche in questo caso si possono determinare a e b in maniera "sperimentale", avendo a disposizione dei dati reali: in particolare, dobbiamo considerare il sistema

$$\begin{cases} N_1 = (1 + a)N_0 - bN_1^2 \\ N_2 = (1 + a)N_1 - bN_2^2. \end{cases}$$

Come valori di N_0 , N_1 ed N_2 consideriamo i dati reali ottenuti tramite le rilevazioni demografiche o esperimenti.

USANDO IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Assumendo che, all'istante $t = 0$ la popolazione sia N_0 , il modello logistico è

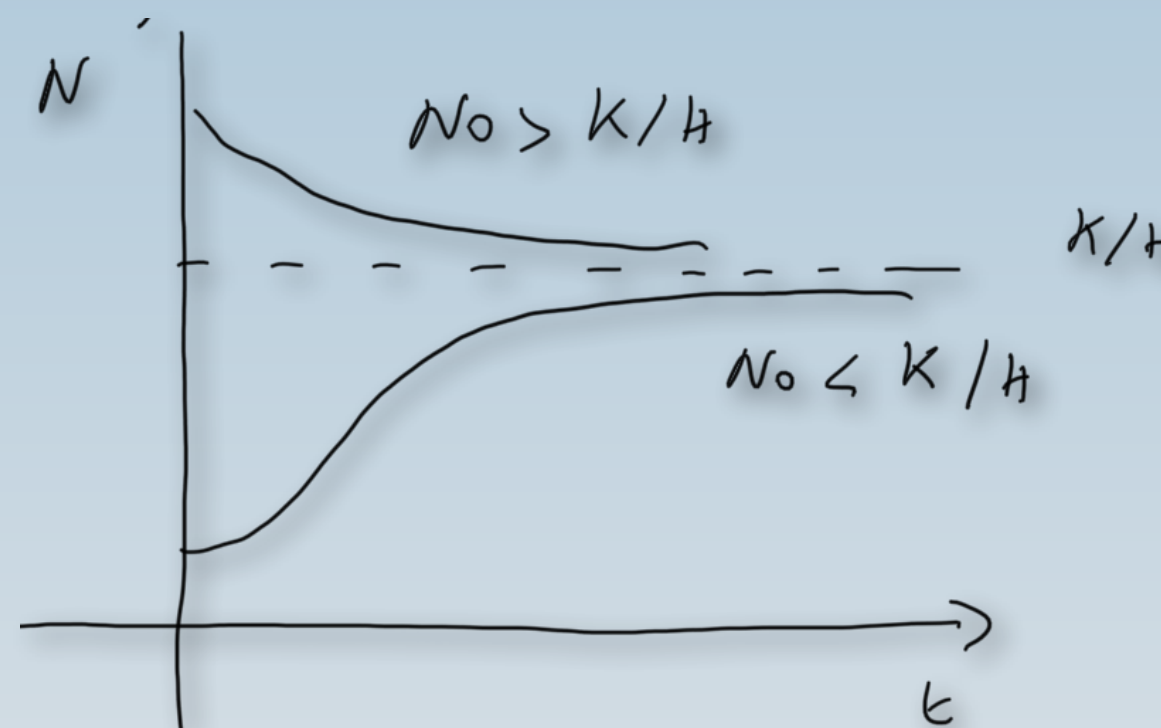
$$\begin{cases} N'(t) = (K - HN(t))N(t) \\ N(0) = N_0, \end{cases}$$

con H, K costanti opportune.

La soluzione di questo problema è

$$N(t) = N_0 \frac{K/H e^{Kt}}{K/H - N_0 + N_0 e^{Kt}}$$

Il grafico di questa funzione è rappresentato di fianco; in particolare, $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = K/H$.



DISCUSSIONE SUL MODELLO

I dati sperimentali mostrano che il modello logistico si accorda molto meglio del modello di Malthus per rappresentare la crescita di una popolazione (vedasi l'esperimento di Gause).

Sussistono però delle criticità. Per esempio, due economisti, Pearl e Reed, utilizzando il modello logistico, analizzarono la popolazione degli USA dal 1790 al 1910, ottenendo un accordo molto buono con i dati reali. Secondo le loro stime, però, il valore "costante" verso cui si sarebbe assestata la popolazione era di circa 200.000.000 abitanti, mentre la popolazione degli USA al 2018 consta di più di 327.000.000 di abitanti.

Il modello logistico, quindi, è sicuramente più efficace di quello malthusiano nel rappresentare la realtà, ma può esso stesso essere soggetto a correttivi.

**GRAZIE PER
L'ATTENZIONE!**