CINZIA ELIA

Analisi numerica

MODELLI EPIDEMIOLOGICI

(Modello di crescita esponenziale
di Malthus
Modello logistico) I incontro
(Modello SIR)

R_0? **Def** Numero di riproduzione di base R_0: il numero medio di contagi per individuo infetto.

L'R_0 si utilizza in una popolazione di individui tutti <u>suscettibili</u>.

I_0: numero di individui infetti all'istante iniziale

m: numero di giorni in cui un individuo è infetto

Dopo un periodo di m giorni

$I_1 = R_0 I_0$ dove con I_1 denotiamo i nuovi contagiati

$I_2 = R_0 \underbrace{I_1}_{R_0 I_0}$ dove con I_2 denotiamo i nuovi infetti dopo 2m giorni

$$I_2 = R_0 (R_0 I_0) = R_0^2 I_0$$

$$I_3 = R_0 \underbrace{I_2}_{R_0^2 I_0} = R_0 (R_0^2 I_0) = \underbrace{R_0^3} I_0$$

In generale dopo n periodi (ciascun periodo di m giorni) i nuovi infetti saranno

$$\boxed{I_n = R_0^n I_0}$$

EQUAZIONE ALLE DIFFERENZE

$$\boxed{I_n = R_0 I_{n-1}} \quad (*)$$

Si tratta della più semplice equazione alle differenze.
La chiamiamo "alle differenze" perchè il tempo in questa equazione è discreto

La soluzione di (*) è

$$\boxed{I_n = R_0^n I_0}$$

$\Rightarrow$ Si parla di modello esponenziale.

Vogliamo una funzione del tempo $I = I(t)$ piuttosto che la successione di valori $I_0, I_1, I_2 \ldots$

La funzione I la scegliamo in modo tale che

$$I(0) = I_0$$

$$I(m) = I_1$$

$$I(2m) = I_2$$

$$\vdots$$

$$I(m) = R_0 I_0$$

$$I(2m) = R_0^2 I_0 = R_0^{\overbrace{\frac{2m}{m}}^{=2}} I_0$$

$$\underbrace{I(t) = R_0^{t/m} I_0}_{\shortparallel}$$

Sia $K = \log\left(R_0^{\frac{1}{m}}\right)$

$$e^K = e^{\log\left(R_0^{1/m}\right)} = R_0^{\frac{1}{m}}$$

$$I(t) = \left(R_0^{1/m}\right)^t I_0 = \left(e^K\right)^t I_0 = e^{Kt} I_0$$

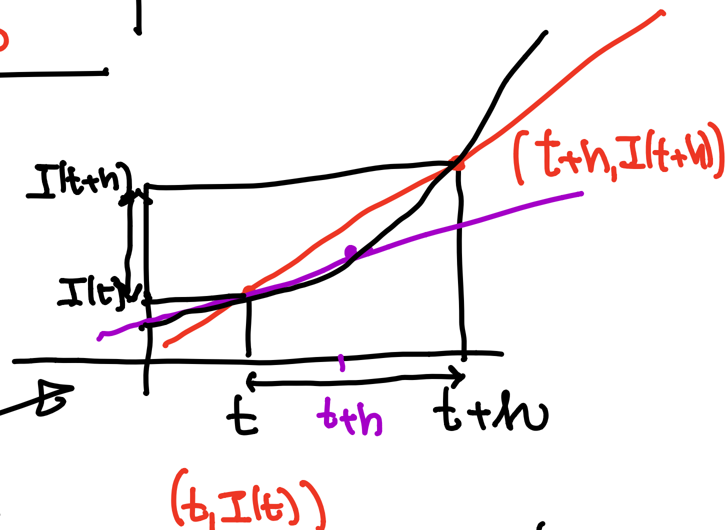
$$\boxed{I(t) = e^{Kt} I_0} \quad \text{con } K = \frac{\log(R_0)}{m}$$

$$\frac{d}{dt} e^{Kt} I_0 = K\left(e^{Kt} I_0\right) = K I(t)$$

MODELLO DI MALTHUS

$$\boxed{\frac{dI}{dt} = K I(t) \quad I(0) = I_0}$$

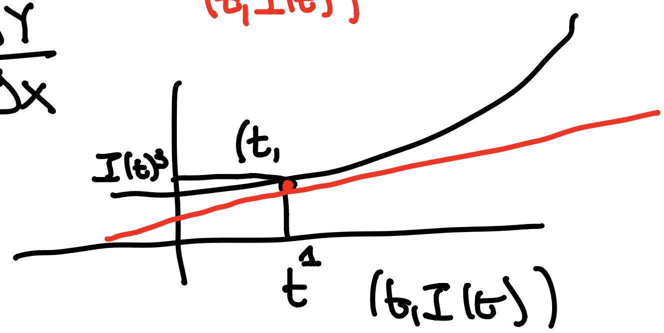
Equazione differenziale



$$I(t) = e^{kt} I_0$$

Pendenza della secante

$$\frac{I(t+h) - I(t)}{(t+h) - t} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$



Qual è la pendenza della retta tg al grafico di I nel punto $(t, I(t))$?

Pendenza di una retta (coefficiente angolare) $m = \frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{I(t+h) - I(t)}{h}$

$\Rightarrow$ Quindi la pendenza della tg è:

$$\lim_{h \to 0} \frac{I(t+h)-I(t)}{h} = \underbrace{I'(t)}_{\text{notazione}} = \frac{dI}{dt}$$

<u>Def</u> $I'(t)$ è la derivata prima di I.

Modello logistico

$x(t)$: i contagi <u>totali</u> al tempo t

$$(**)\; x'(t) = \underline{\beta x(t)} \cdot \frac{s(t)}{N} \leq 1$$

$s(t)$: gli individui suscettibili

N: popolazione totale

$s(t)/N$: frazione degli individui suscettibili rispetto alla popolazione totale!

~~Abbiamo un'equazione diff.le~~
Stiamo esprimendo la derivata di x in funzione di una s(t). Ma chi è s(t)? La vogliamo riscrivere in funzione di x(t).

IPOTESI DI LAVORO : la popolazione totale N resta costante.

$$\Rightarrow s(t) = N - x(t)$$

Allora (**) si riscrive come

$$\boxed{x'(t) = \beta x(t) \left(\frac{N - x(t)}{N} \right)}$$

EQUAZIONE LOGISTICA

Un modello più utilizzato per lo studio delle epidemie è il modello SIR

S: suscettibili

I: nuovi infetti

R: rimossi (guariti/deceduti)

lavora con 3 funzioni e quindi 3 derivate: $s'(t)$

$i'(t)$

$r'(t)$