

# Architetture della Matematica: del domino e del tempo

Sandra Luente  
disegni di Alessandro Rocco



Programma Orientamento Consapevole  
Dipartimento di Matematica Università degli Studi di Bari  
online ore 15.00 del 19 Marzo 2021

## BIBLIOGRAFIA (DI SANDRA LUCENTE)

\* **COMPLETEZZA E CONTINUITÀ, LE OMBRE DELLA LUCE** p97-99

[https://www.unipapress.it/it/book/nuova-lettera-matematica-2\\_280/](https://www.unipapress.it/it/book/nuova-lettera-matematica-2_280/)

\* **IL CONCETTO MATEMATICO DI CUI NON POTREMMO FARE A  
MENO: INFINITO**

<http://maddmaths.simai.eu/rubriche/matematica-oltre/matematica-indispensabile/il-concetto-matematico-di-cui-non-potremmo-fare-a-meno-infinito-di-sandra-lucente/>

\* **IL MATEMATICO NELL'IRRAZIONALE REGNO DEI CRISTALLI**

<http://www.saperescienza.it/il-matematico-nell-irrazionale-regno-dei-cristalli>

\* **DUE DOMANDE SUL PIGRECO**

<http://www.saperescienza.it/rubriche/matematica-e-astronomia/pi-day-due-domande-su-pi-greco/2820-pi-day-due-domande-su-pi-greco>



domande iniziali

Cosa si costruisce?

La città ha una logica?

Se la matematica fosse una  
costruzione sarebbe?

# gli elementi architettonici



# **PARTE PRIMA**

## **cosa è un numero?**

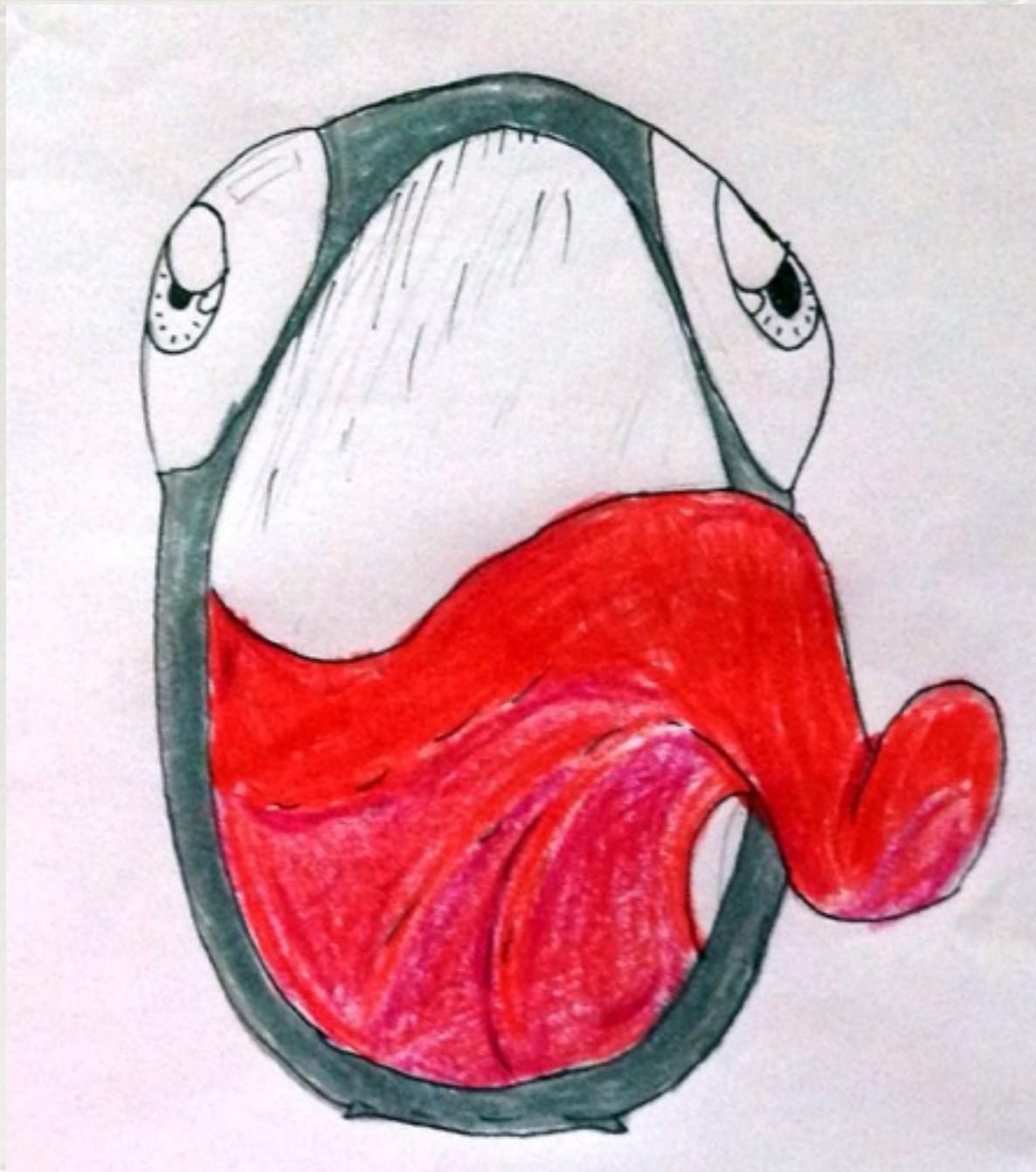
# INTERI NATURALI (30.000 a.C)

1



*Dio ha creato gli interi, il resto è opera dell'uomo (L.K.)*

# INTERI



*300 a.C Babilonesi  
628 Brahmagupta  
1200 Fibonacci*

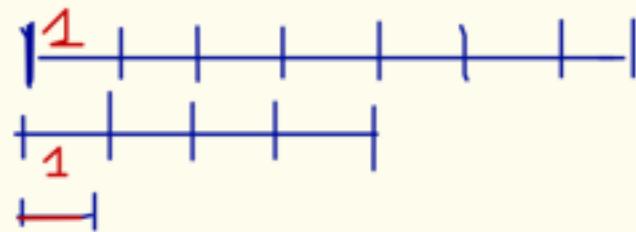
*Dio ha creato gli interi, il resto è opera dell'uomo(???)*

# RAZIONALI

*Le frazioni egiziane (2000 a.C)*

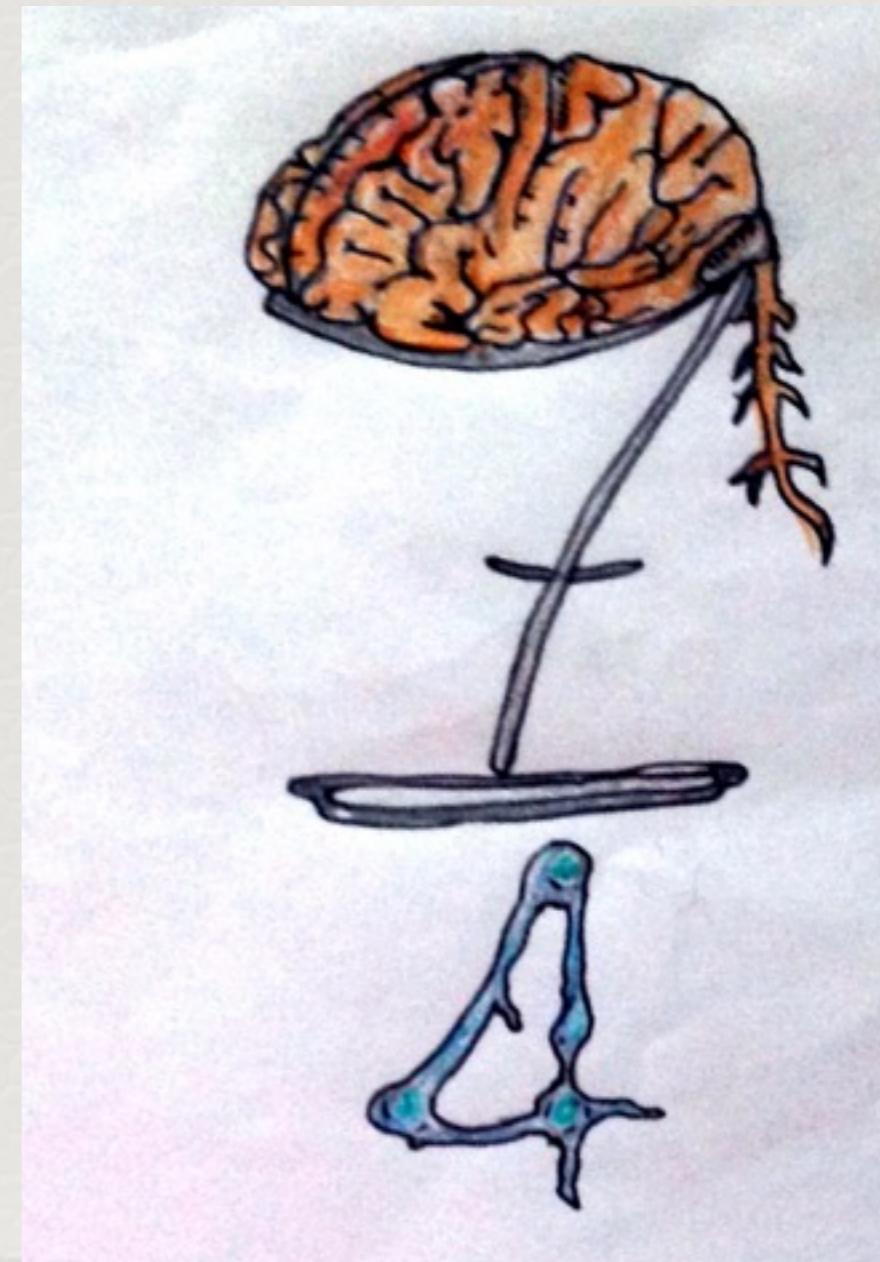
$$\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1 + \frac{1}{\frac{4}{3}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}$$

*Esseri in rapporto (300 a.C)*



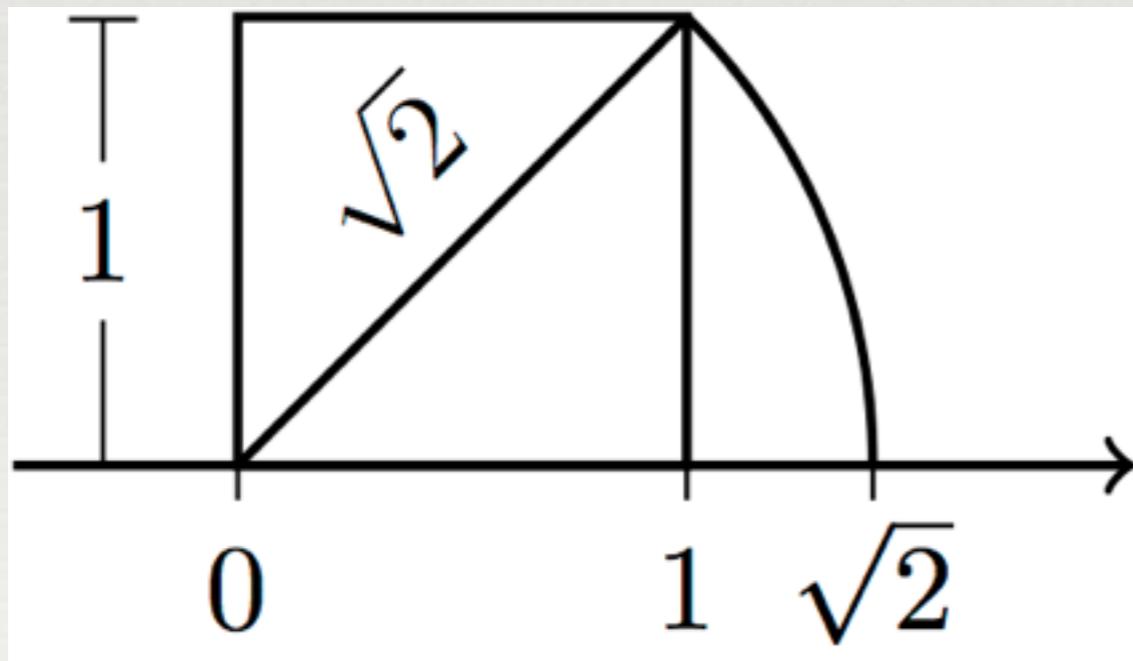
*Notazione decimale (1500)*

$$\frac{7}{4} = 1,75$$



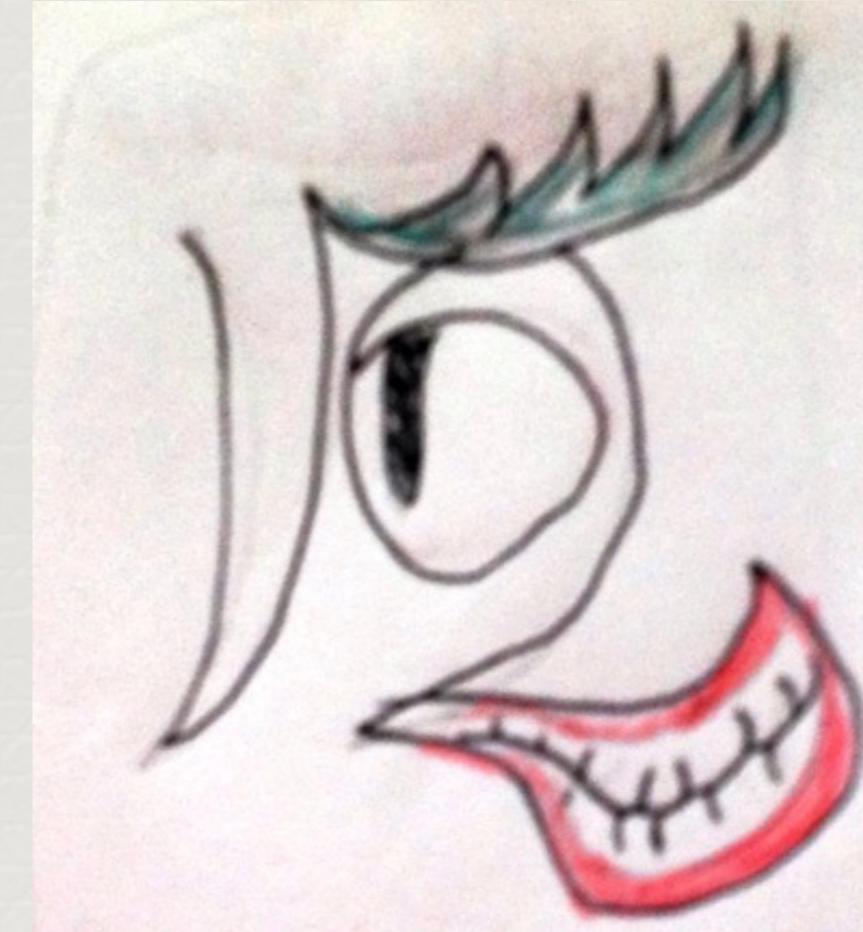
# IRRAZIONALI (500 a.C)

*Ippaso da Metaponto*

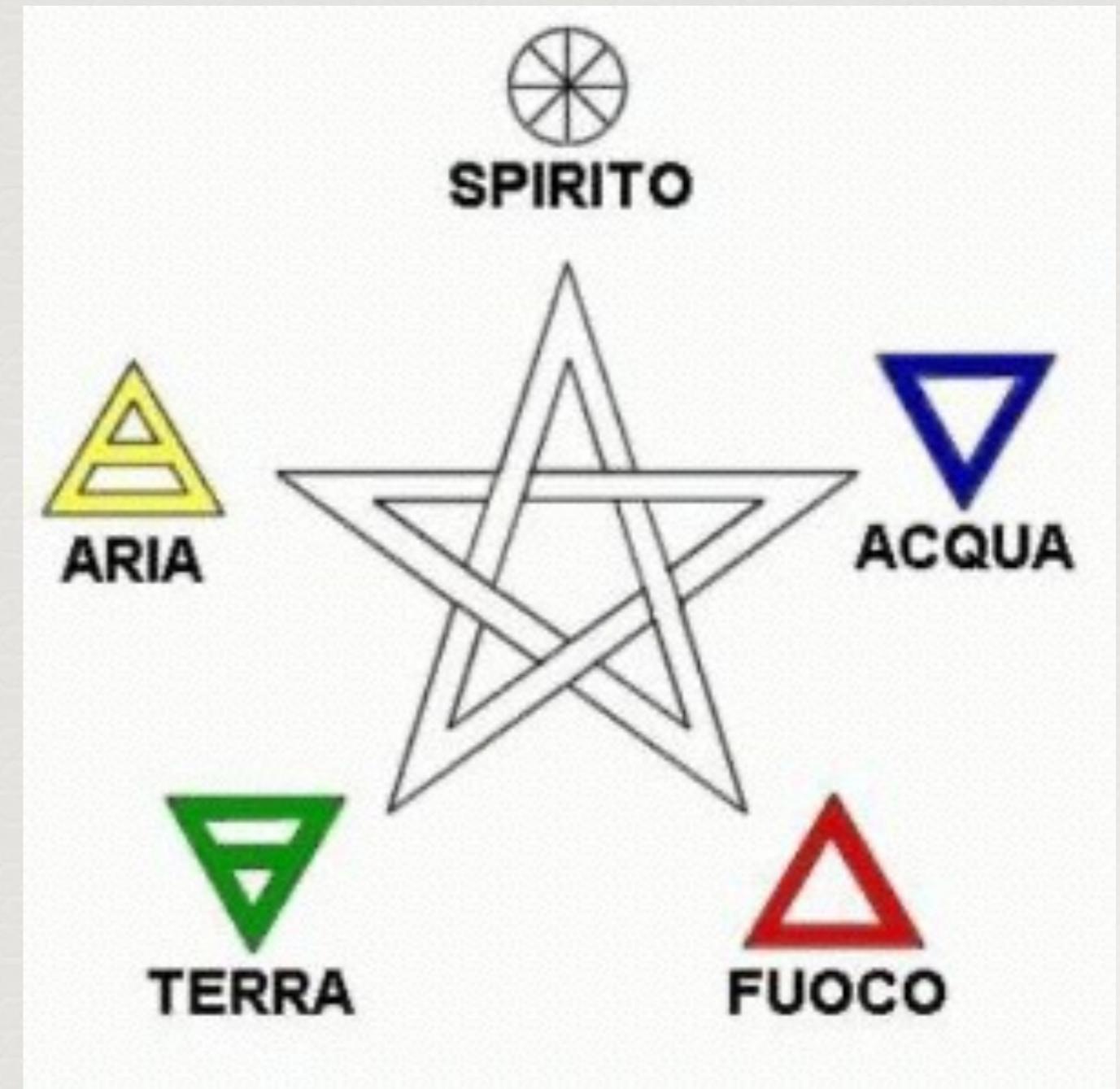
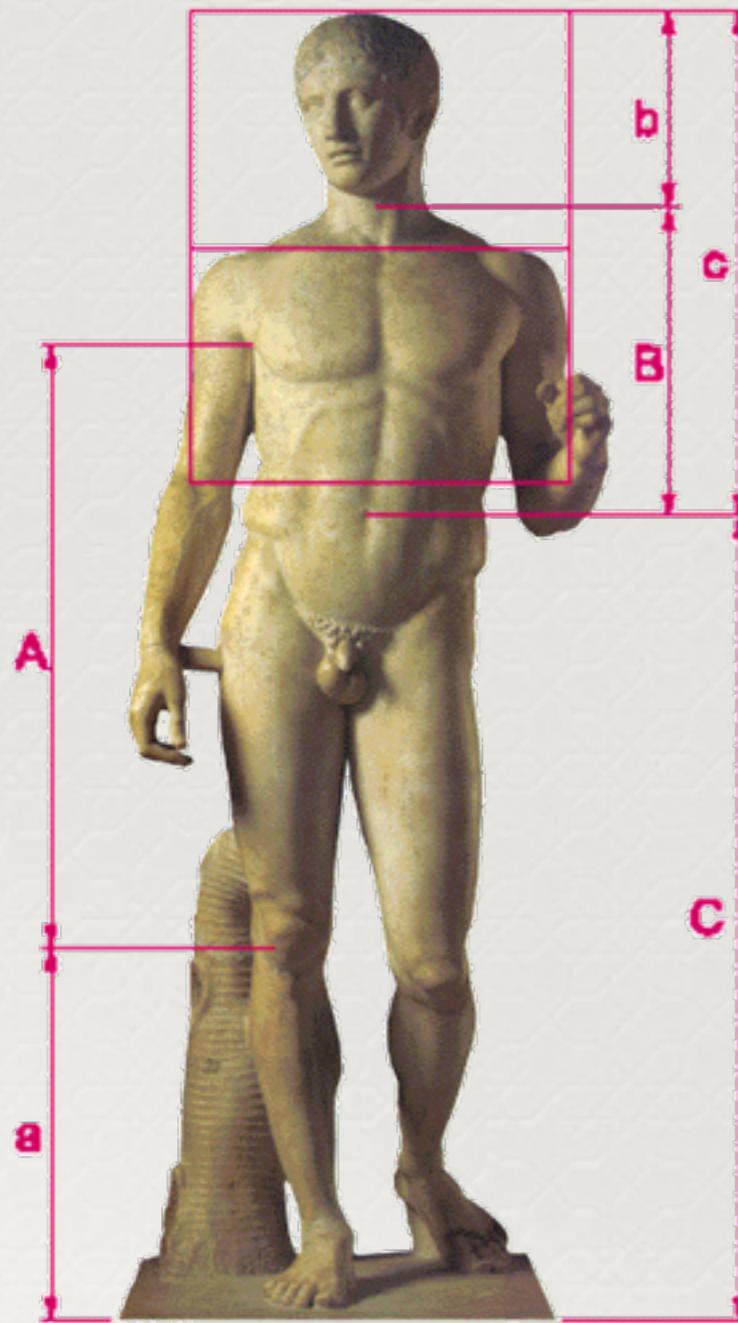


1.4142135623730950488016887242096080785606718753769480731766797379907324784621070388503875343276415727350138462309122970240248360558507372126441214070990358  
 31413223665927505592755799950501152782060571470109550971605970274634596862014728517418640889198609552329230484308714321450839762609627995251407989687253396  
 546331808829640620615258352395054745750287759461729835752203375318570113543046034084084716038680997069900481503054402779031645424780306840293691862158057  
 846311150666871301301561856808723723528850026486124040771542183342042856860**60146824720771435854074155657069677653720226485447015858901620758474923657226002**  
 085584466521458398893044370902659180031138824646815708263010059485870400318644034219480727829064104507263688131373985525611732204024509122770022694112757362  
 728049573810896750401836986836845072579936472906076299694138047565482372809**71803268024744206292691248590521810044508421505911202404413417285314781058036033**  
 710773091828603147101711168391658172688041975871658215212822951848847208**0614633862891562882765952635140542267653239694617511291602406715510135150455381287**  
 5600526314680171274026539694700403005174953188629056313851881634780015603**67176881852378684052287837629388021430065586056868596459515550164472450983689603688**  
 732311438041557665104088391429233811320605243362048531704991577175622854074143899**71803217624309652065642118273167262575305947172550346372386322614827426222**  
 0867115583059902652117625269891754098815934864008345708518147223181420407**042650205653233308461645786579679651926729239987536617215982578960263363617827495**  
 9942194037775368142621773879919455139723127406680832998989538672882285**37869774966251996598352577619893932284534473568479496295216889148549253890475582883**  
 452609652409654288939453864662574490275563819644103160798330618520193793**84040057156337205480685405758679996701213722394758214263055851322174088323829472876**  
 17393647467837431960001592188807347857617252211867490424**077366029207311096360721608033709861156734585334833295254675851644710757848602463600634449114818587**  
 655554286465123142190263113325170706084365507043521**95410870165007603610091594656705768836055717400767589050613671940132493560524018599910506210816359772**  
 6431380605467010293560971042425105781749531057255934084451**1260227803440735066375687477602631628296055324224260575346290288387684454291732827708883180670253**  
 3985233812274990081237189254072647536785030482150180188616710**0972869229201197599880703918543332536460211082299279293072871780799888090176741774108983060800**  
 32631181642798823117154363860661702999034161614878688018046509553398601311518801039**6275329004588188044804075024119518430567453368361367459737442398855328517**  
 930806037380891517319587413442881784212502191695187559934443873761843**14540099900610750704909261835176362247497578588583680374579311573398020999866221869499**  
 225059132764236194105921003280261406745665996888740679561673918**50572808642473463585886164406822386006983352642799056283165613913942557649062055186021647263**  
 03336297507560787060660685640816009271870929215313236828135698803**700741650447459096053747279652447709409024123871061447054398674364733847745481910067288622**  
 214058952059118789214917983398108378827815306556231581036054867587303601450227320882935134138722684176678436052942869840063845574457940959862607424095491  
 6802853077398938296036213353987532050919080360751390644449576845890347127636450716327915470159773354863803942325727540038260274785674172580051416307159597  
 849818009443560379390085590168272154034581581521004936662953448802710729239660232163823826661262683050257278116945103537937156882336593229782319299605467978

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}}$$

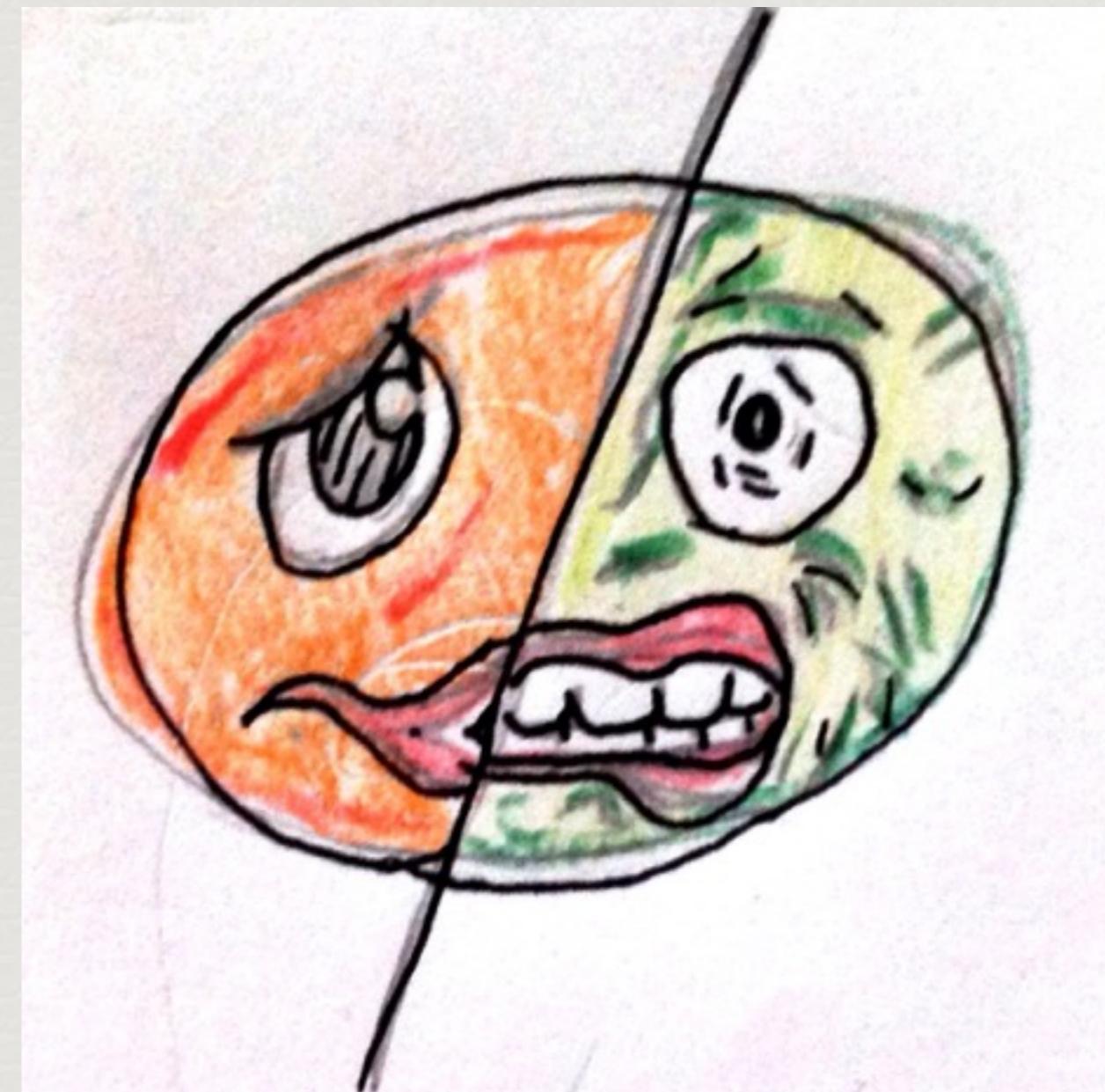
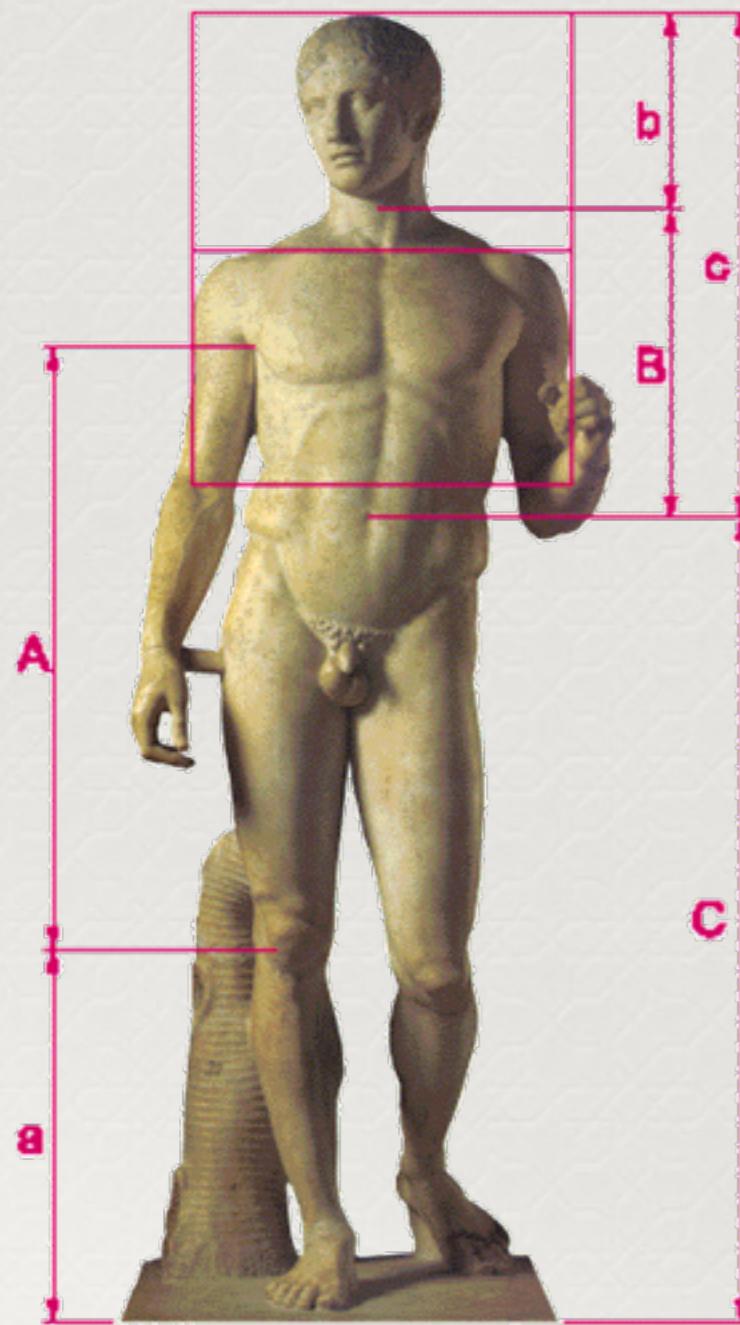


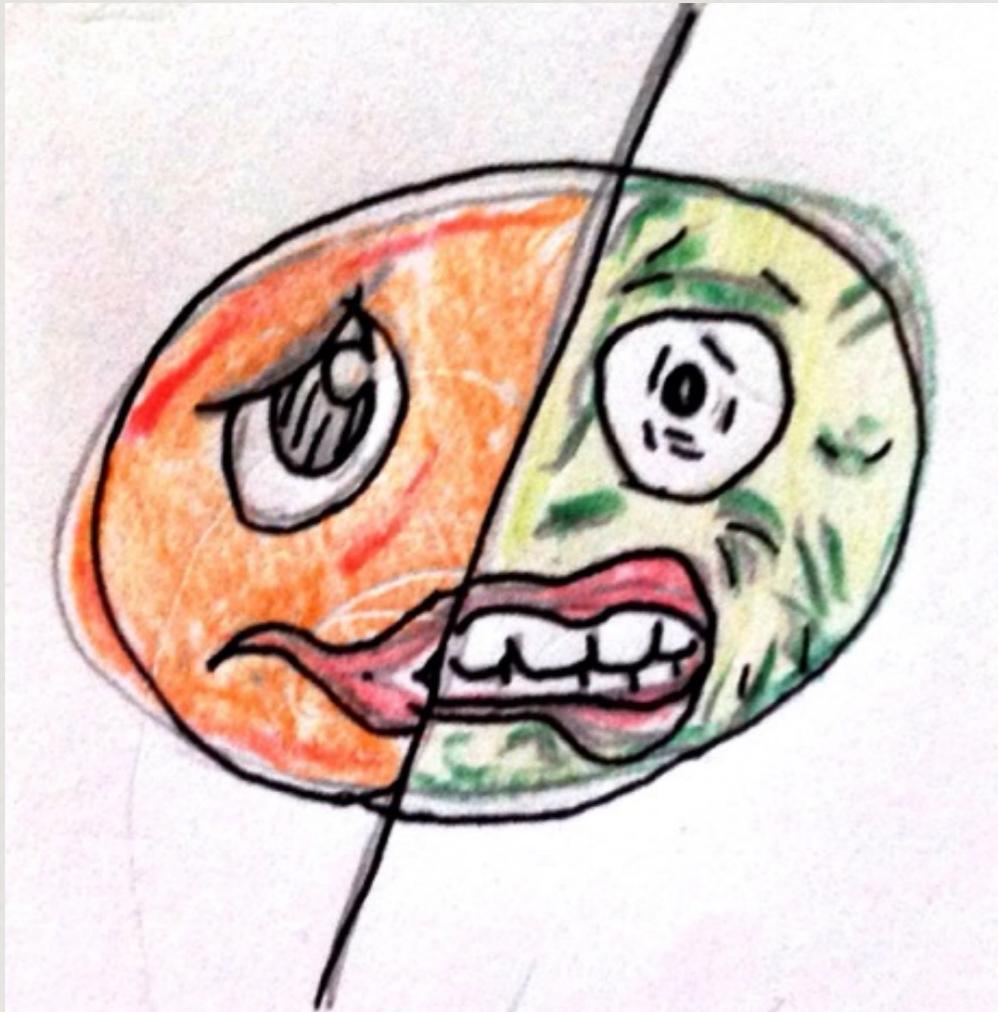
# Numero d'oro



1,6180339887498948482045868343656...

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$





$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

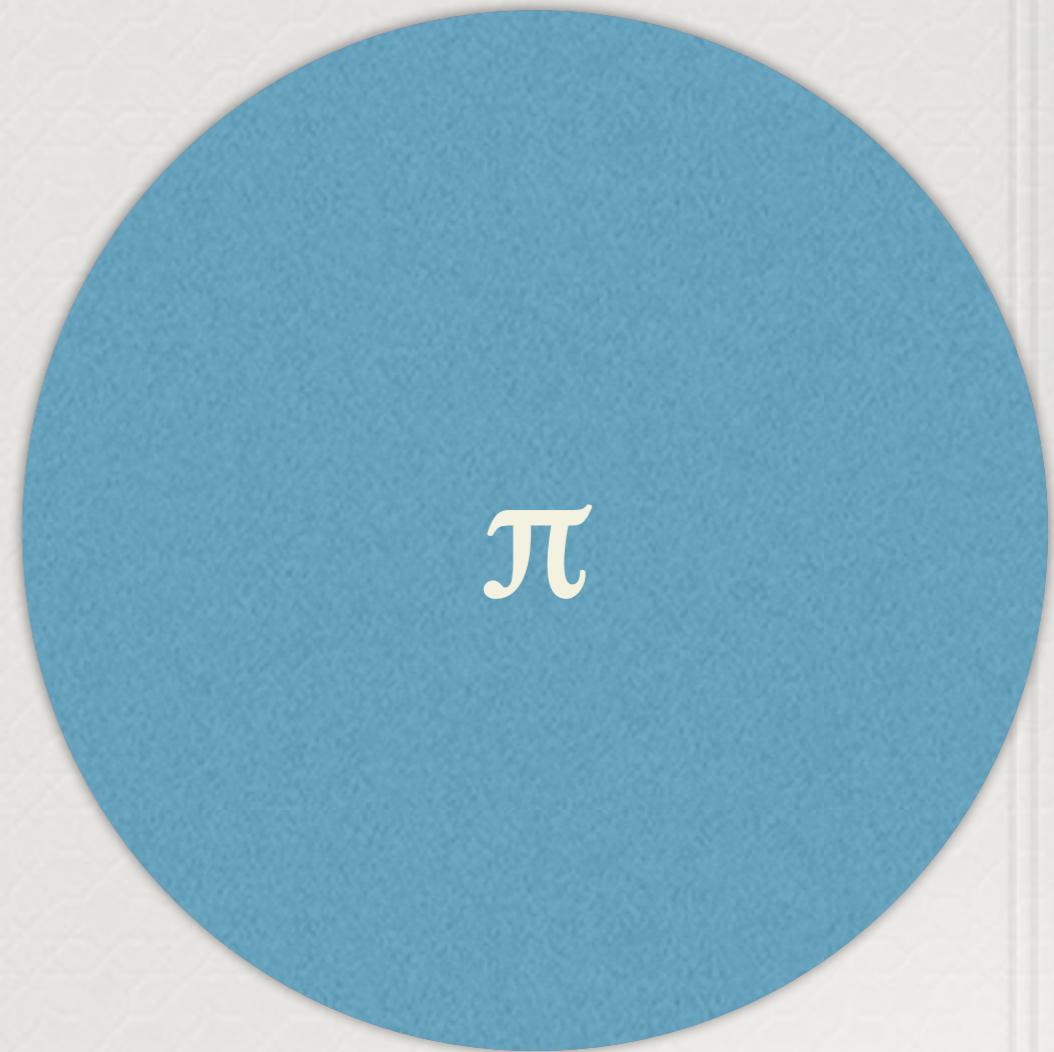
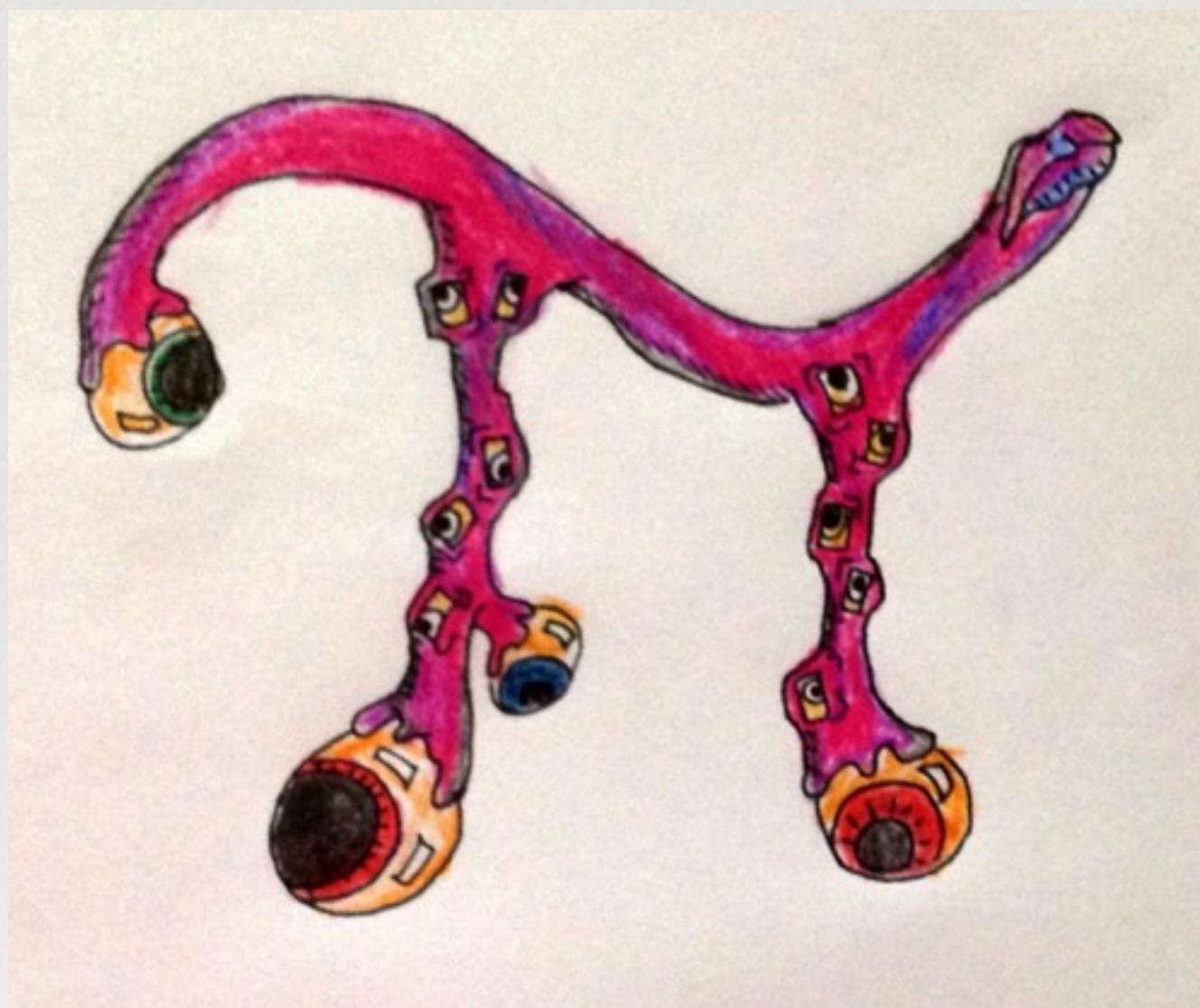
*Il più irrazionale di tutti!*

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

GAAK!

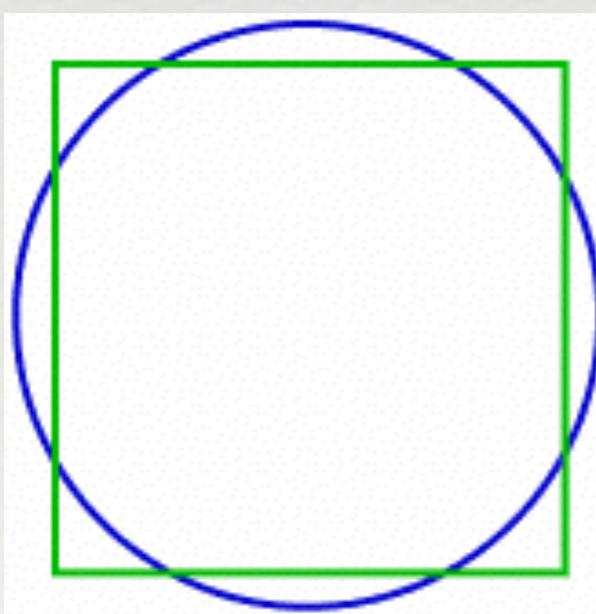
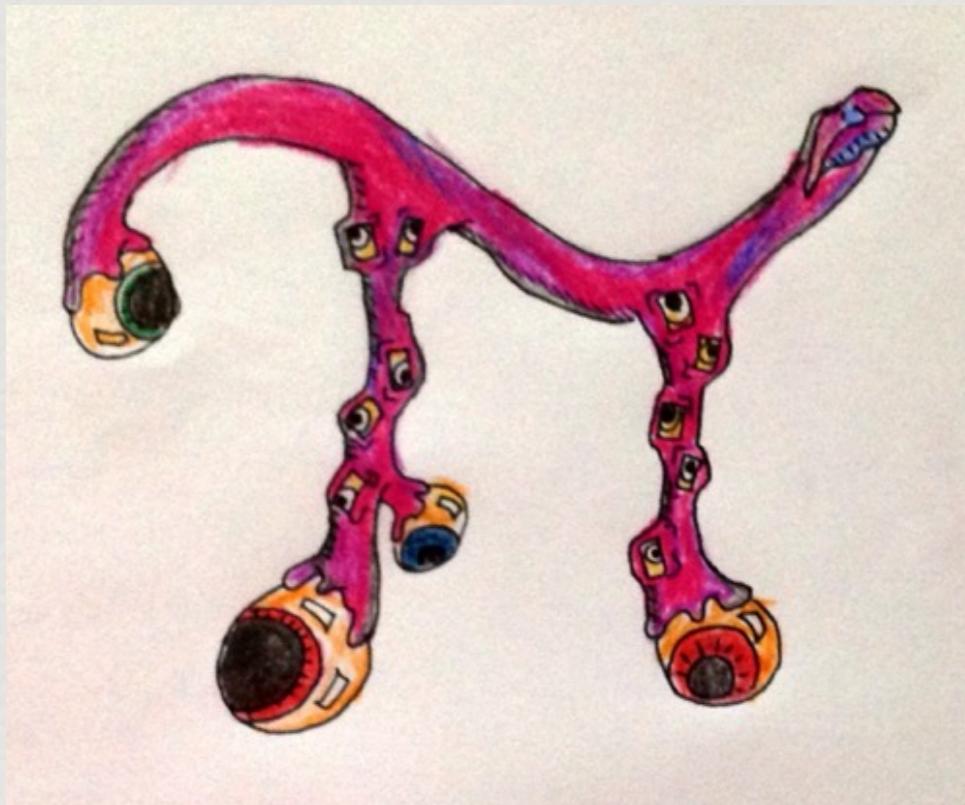
# IRRAZIONALE

*Domanda 300 a.C.  
Risposta 1794*



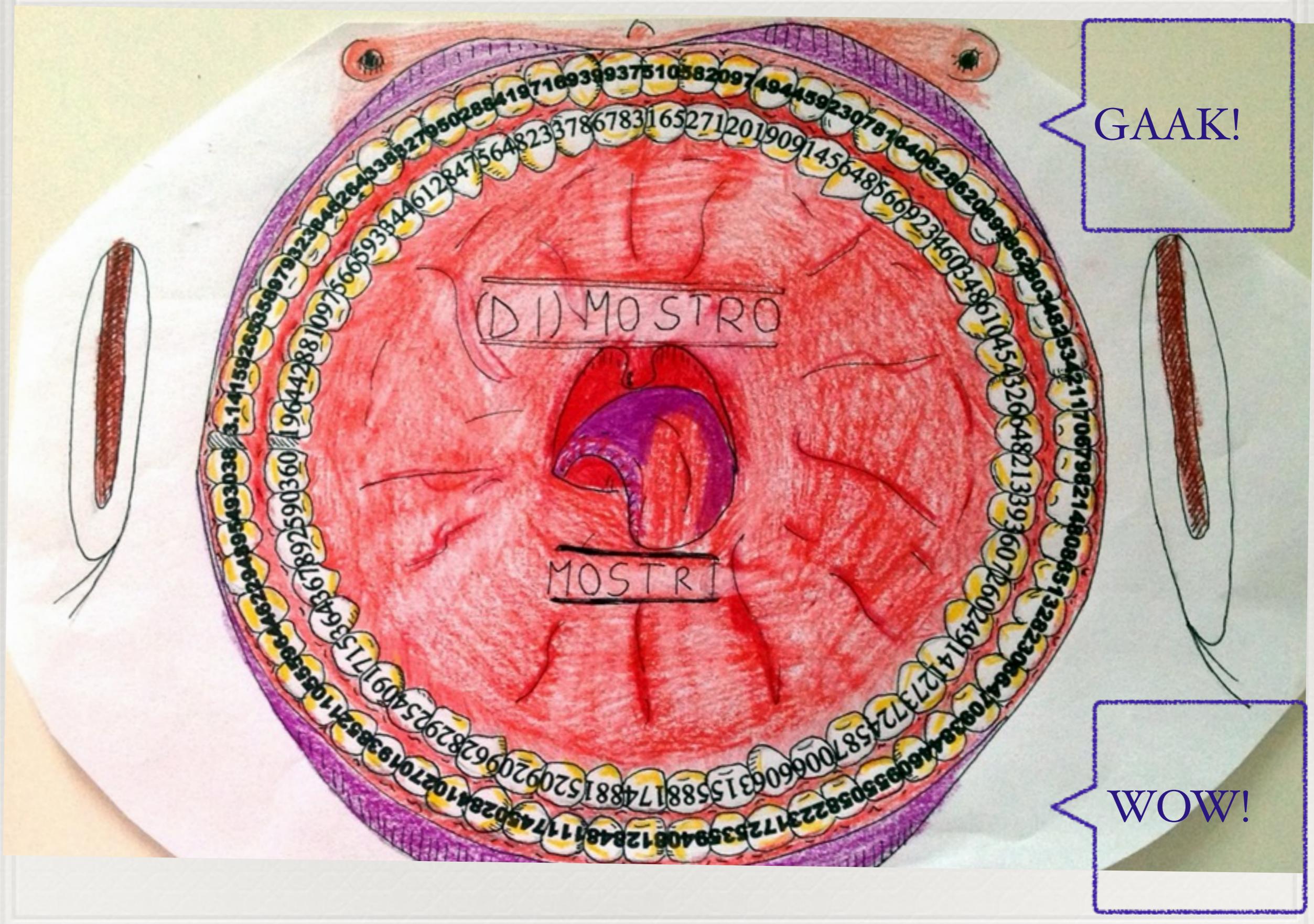
# TRASCENDENTE

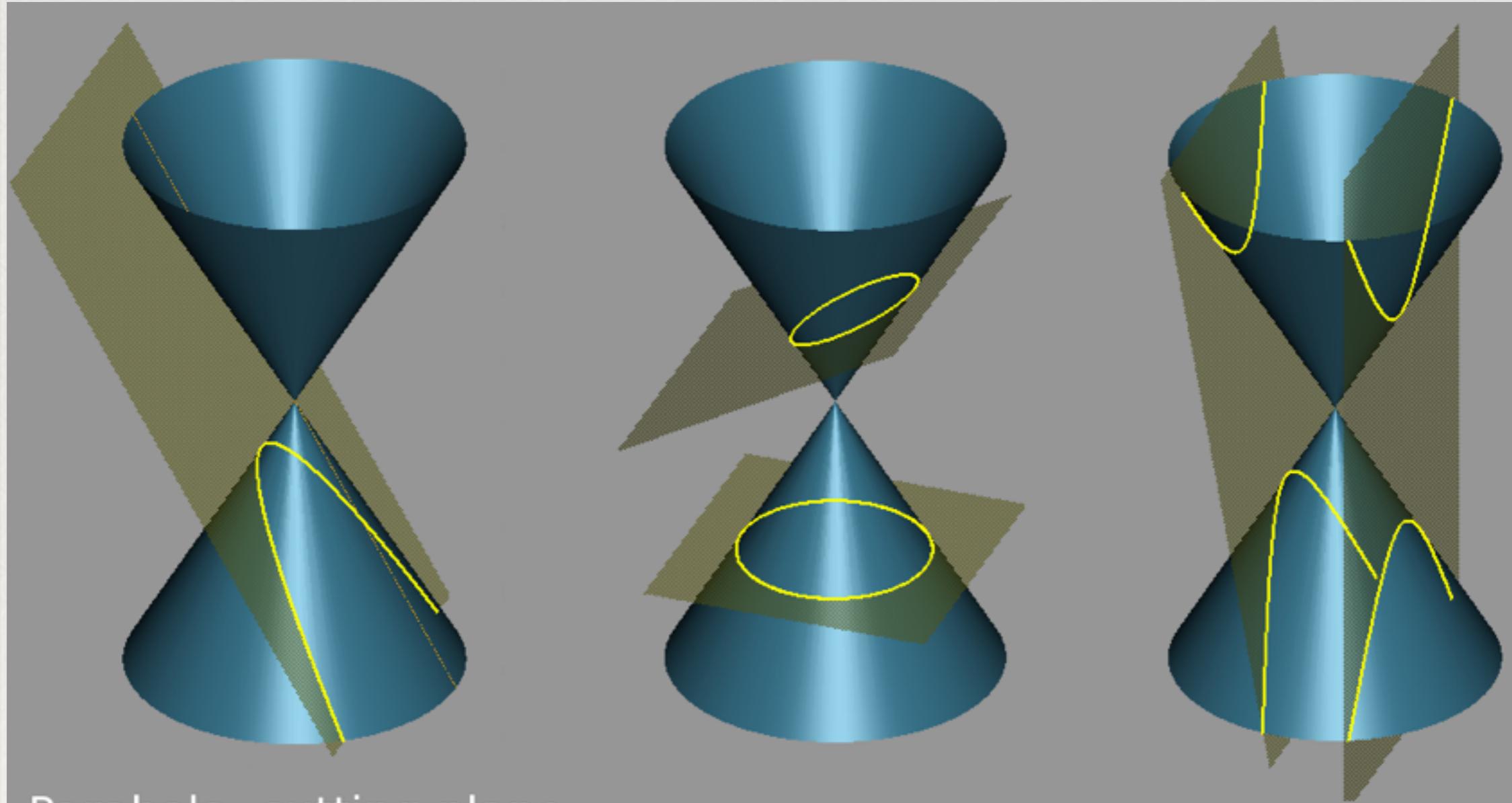
*Domanda 300 a.C.  
Risposta 1882*



$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cfrac{9^2}{2 + \ddots}}}}}$$

$$2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \dots = \pi$$

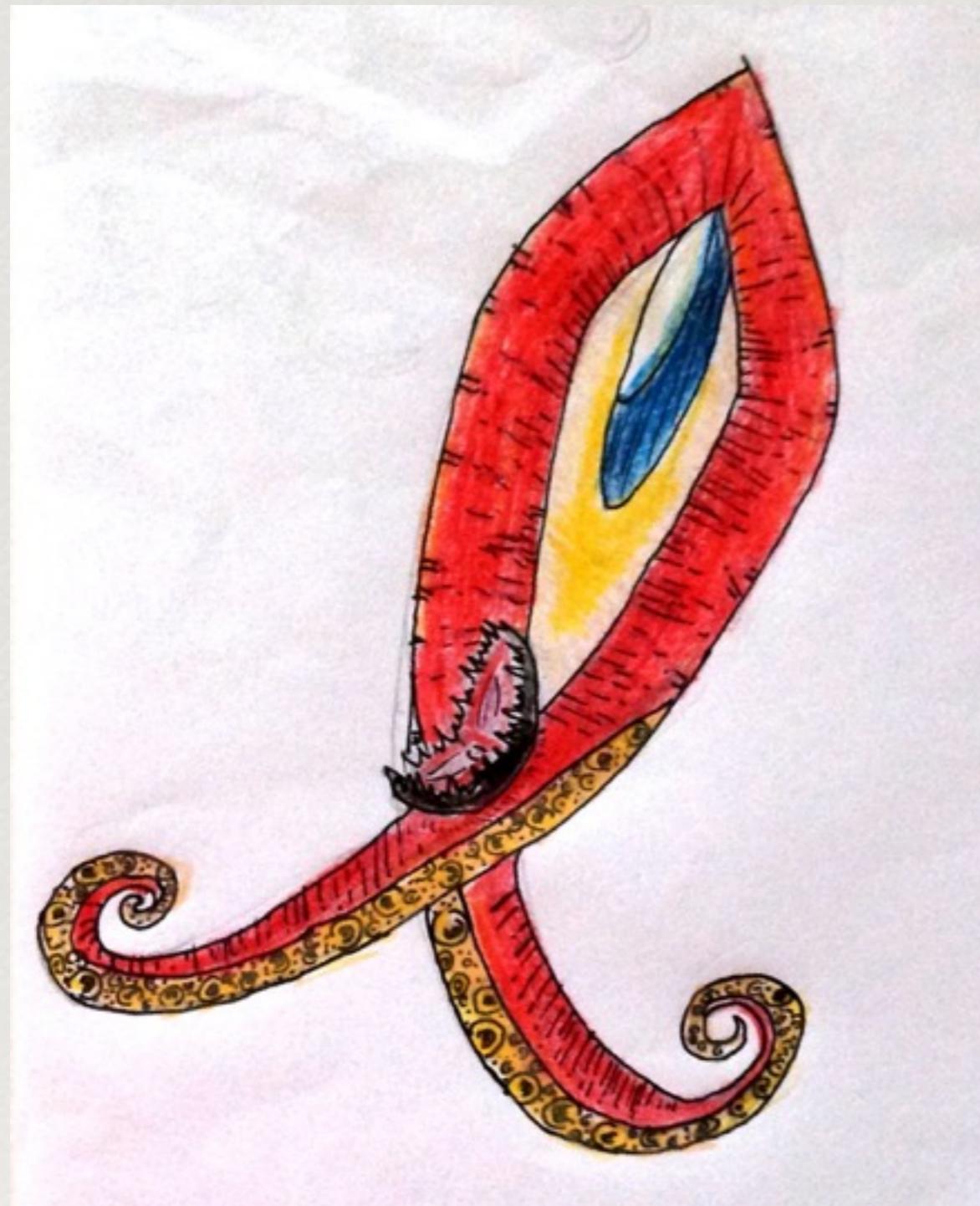




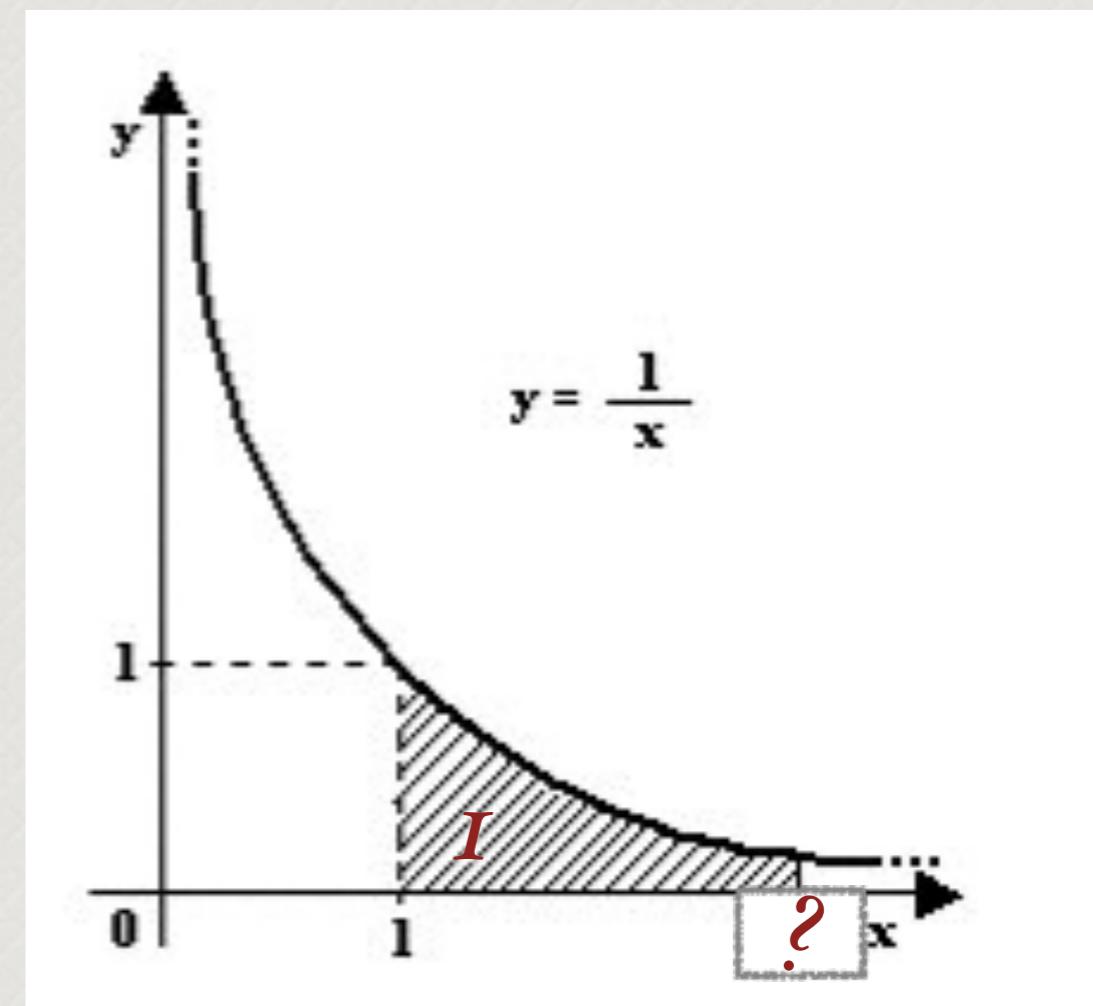
Parabola- cutting plane  
parallel to side of cone.

Circle and Ellipse

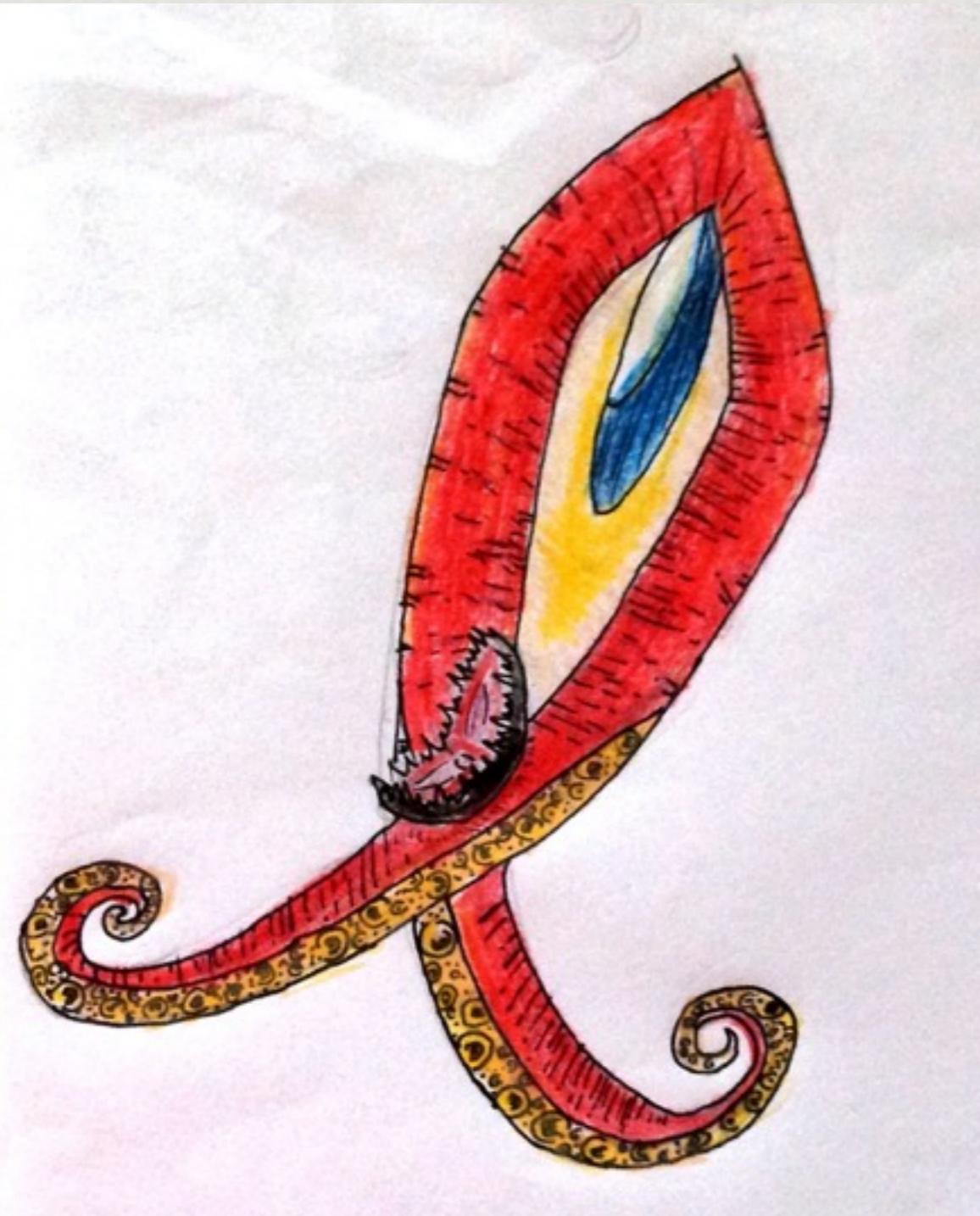
Hyperbolas



E???



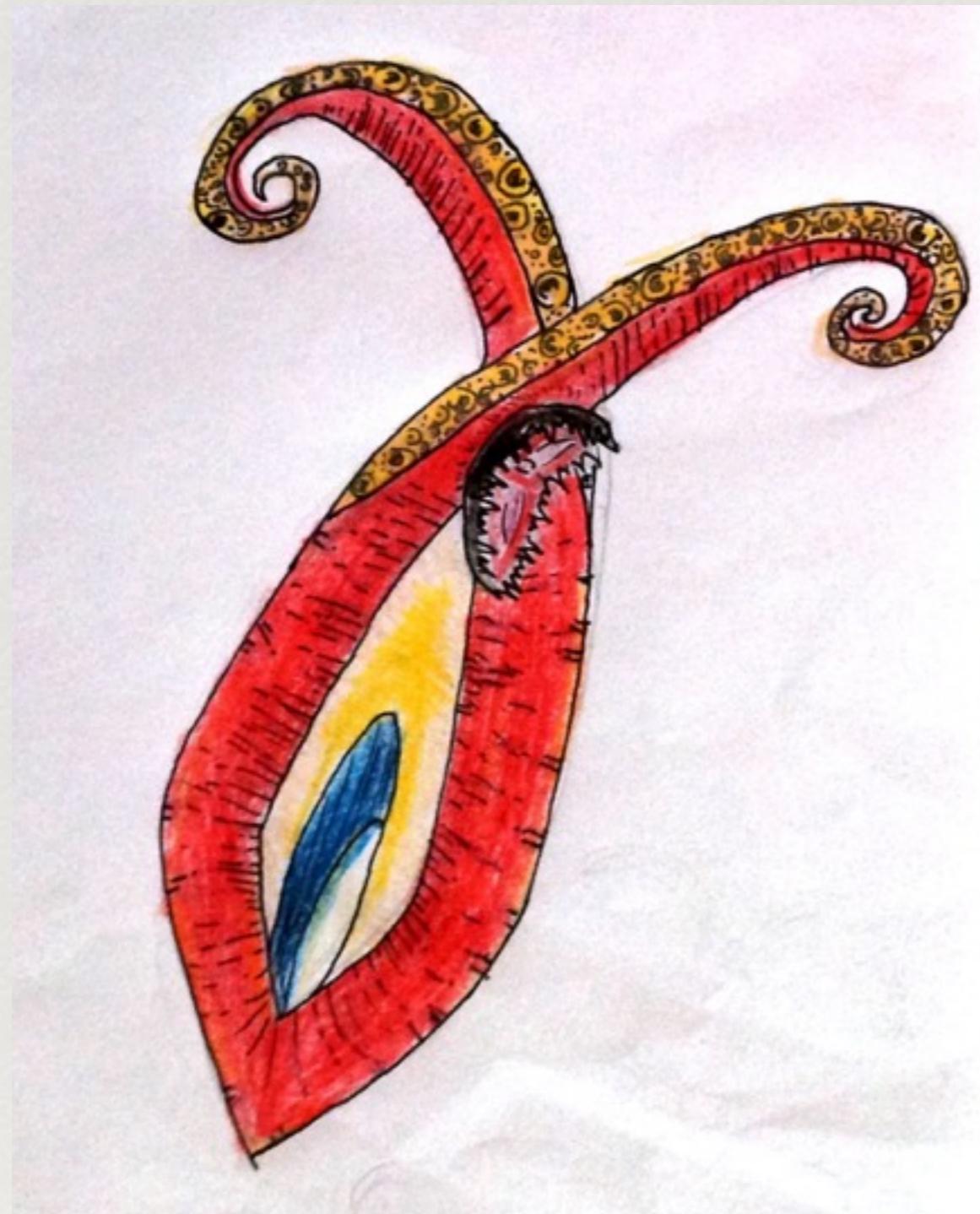
*Domanda 1600  
Risposta 1744 (irrazionale) 1873 (trascendente)*



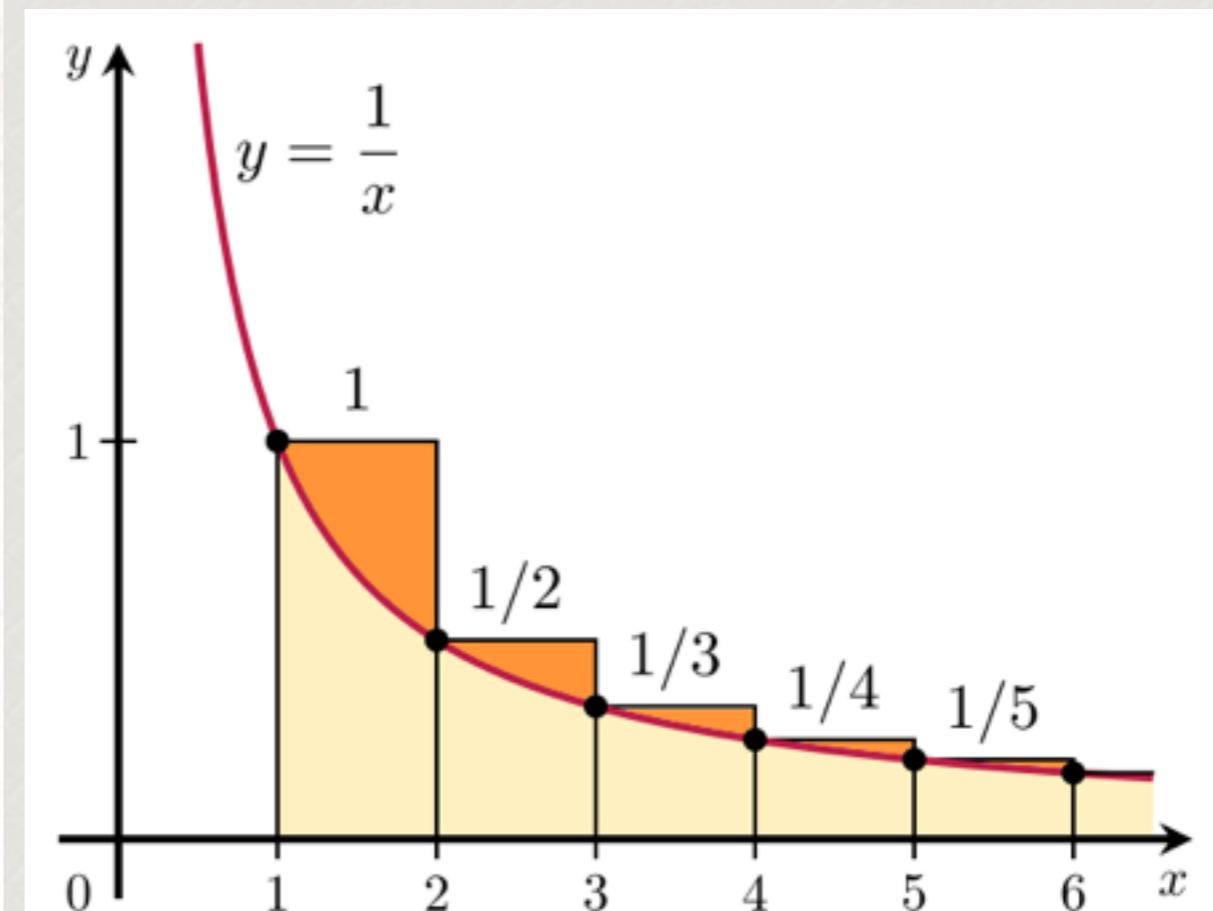
$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

$$\sqrt{\phi + 2} - \phi = \cfrac{e^{-2\pi/5}}{1 + \cfrac{e^{-2\pi}}{1 + \cfrac{e^{-4\pi}}{1 + \cfrac{e^{-6\pi}}{1 + \dots}}}}$$

WOW!



# Gamma



*Domanda 1700  
Risposta ??? (irrazionale) ??? (trascendente)*



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Il problema di Basilea  
Domanda Mengoli 1644  
Risposta Eulero 1735

(2)

$$\zeta(3) = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots$$



(3)

*Domanda 1700  
Risposta 1979 (irrazionale)  
???? (trascendente)*

# IMMAGINARI COMPLESSI

Erone 100 a.C.  
Tartaglia 1500  
Cartesio 1600  
Eulero 1700  
Gauss 1800

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

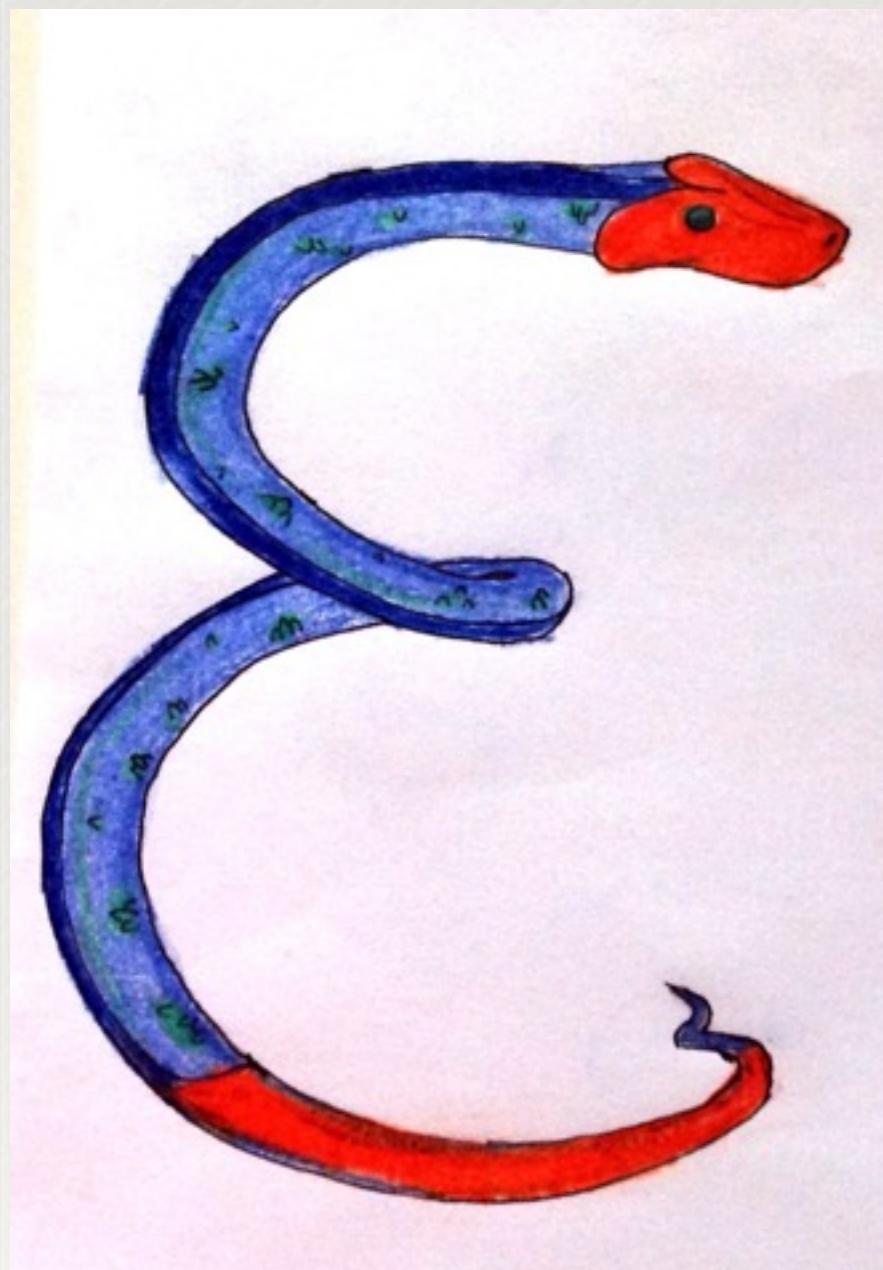


La zeta di Riemann  
Domanda Riemann 1859  
Risposta ????????

(z)



# IPERREALI (1966)



1/ $\epsilon$

Numeri reali

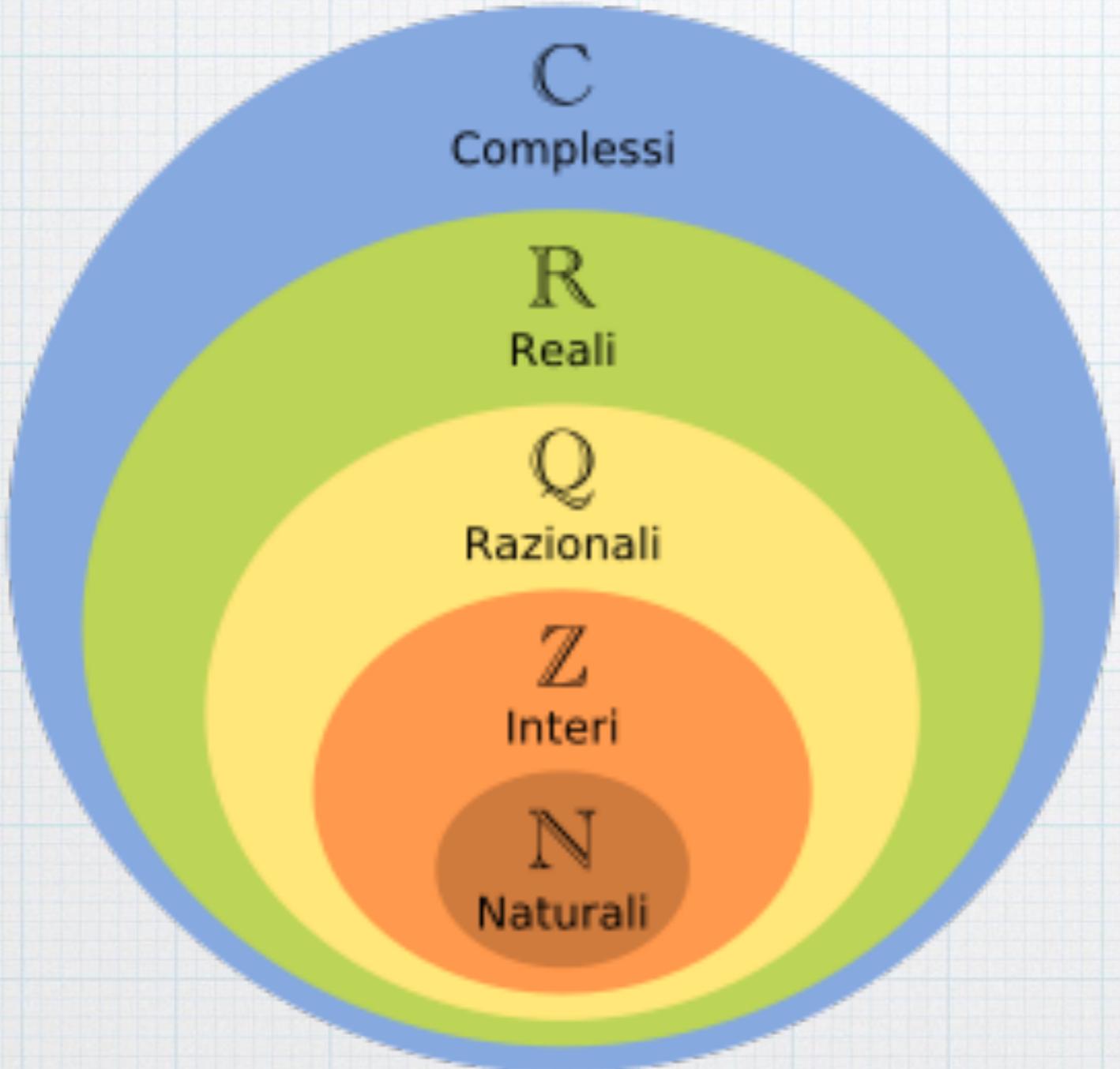
# SURREALI (1974)

*Creare dal vuoto... Anche gli interi, fino agli iperreali*

To be continued

# PARTE PRIMA

## cosa è un numero?



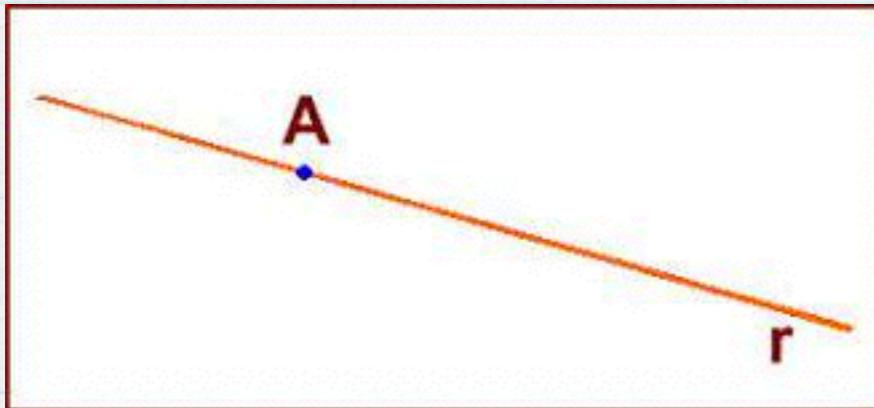
Facciamo ordine... se si può!



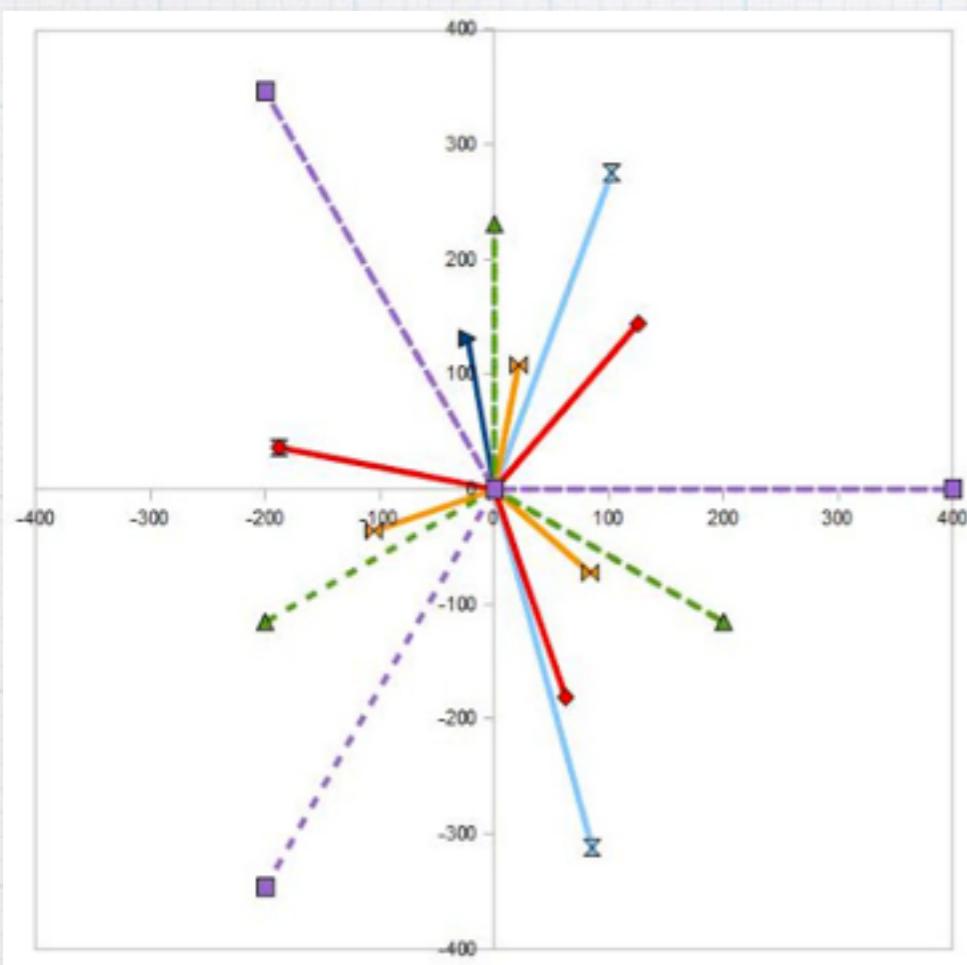
Vantaggi e  
Svantaggi

Vantaggi e  
Svantaggi

Facciamo ordine... se si può!



Vantaggi e  
Svantaggi



Vantaggi e  
Svantaggi

La connessione

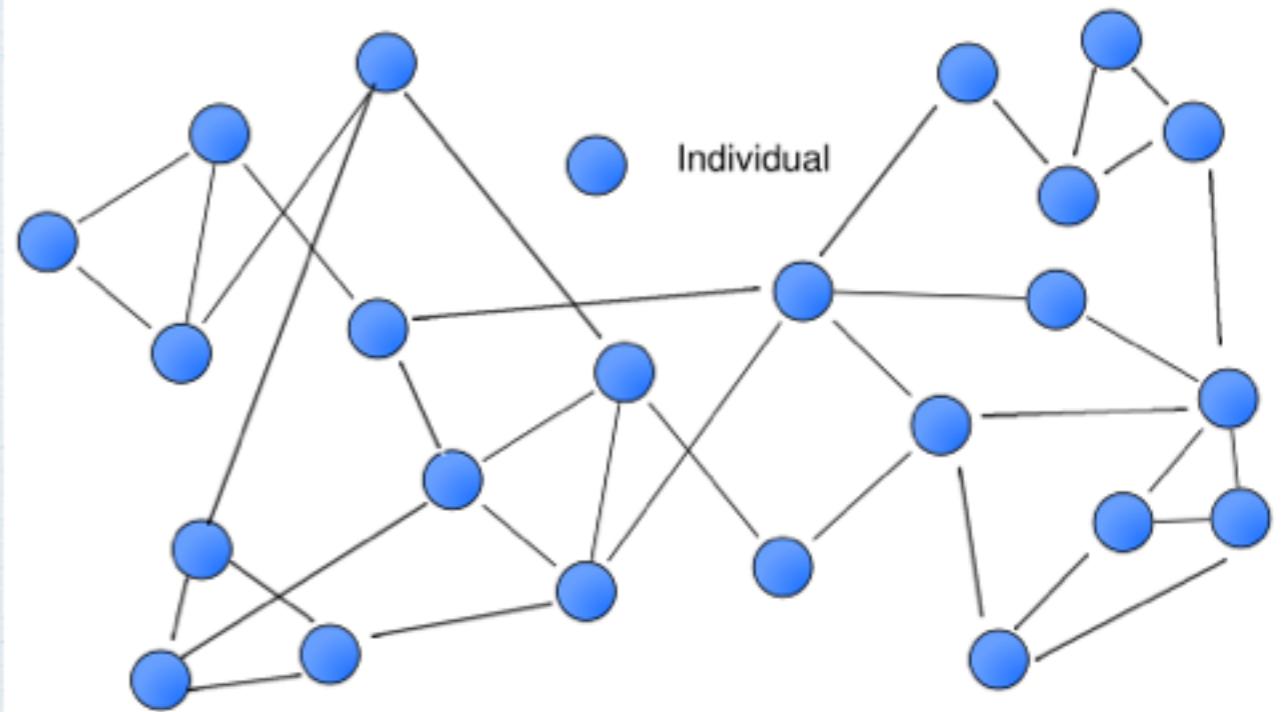
Brainstorming sulla parola  
Intervallo

Brainstorming sulla parola  
Connessione

# a casa



# per strada



# in classe

## INTERVALLI LIMITATI

Dati due numeri reali  $a$  e  $b$ , con  $a < b$ , si chiama:

INTERVALLO APERTO  $(a, b)$

l'insieme dei numeri reali  $x$  tali che  $a < x < b$



INTERVALLO CHIUSO  $[a, b]$

l'insieme dei numeri reali  $x$  tali che  $a \leq x \leq b$



INTERVALLO APERTO A DESTRA  $[a, b)$

l'insieme dei numeri reali  $x$  tali che  $a \leq x < b$



INTERVALLO APERTO A SINISTRA  $(a, b]$

l'insieme dei numeri reali  $x$  tali che  $a < x \leq b$



per  $a=b$ ???

## INTERVALLI ILLIMITATI

Dato un numero reale  $a$  qualsiasi, si chiama:

### INTERVALLO ILLIMITATO SUPERIORMENTE

l'insieme dei numeri reali  $x$  tali che  $x \geq a$

$$[a, +\infty)$$



### INTERVALLO ILLIMITATO INFERIORMENTE

l'insieme dei numeri reali  $x$  tali che  $x \leq a$

$$(-\infty, a]$$



### Osservazione

- Un intervallo limitato è in corrispondenza con i punti di un segmento
- Un intervallo illimitato è in corrispondenza con i punti di una semiretta
- L'intervallo  $(-\infty, +\infty)$  è in corrispondenza con i punti di una retta e rappresenta l'insieme dei numeri Reali

# all'università

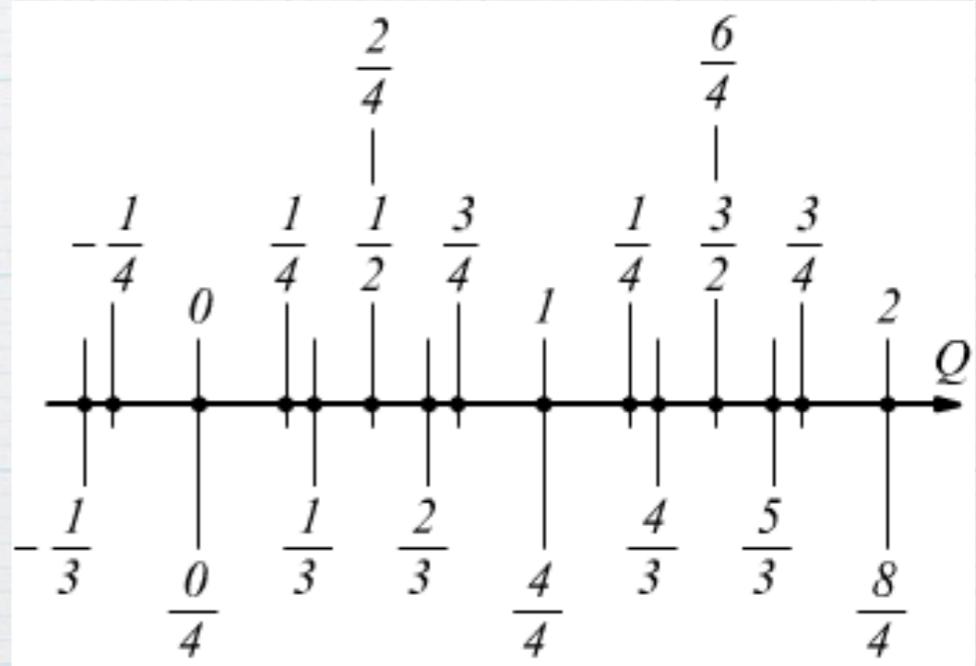
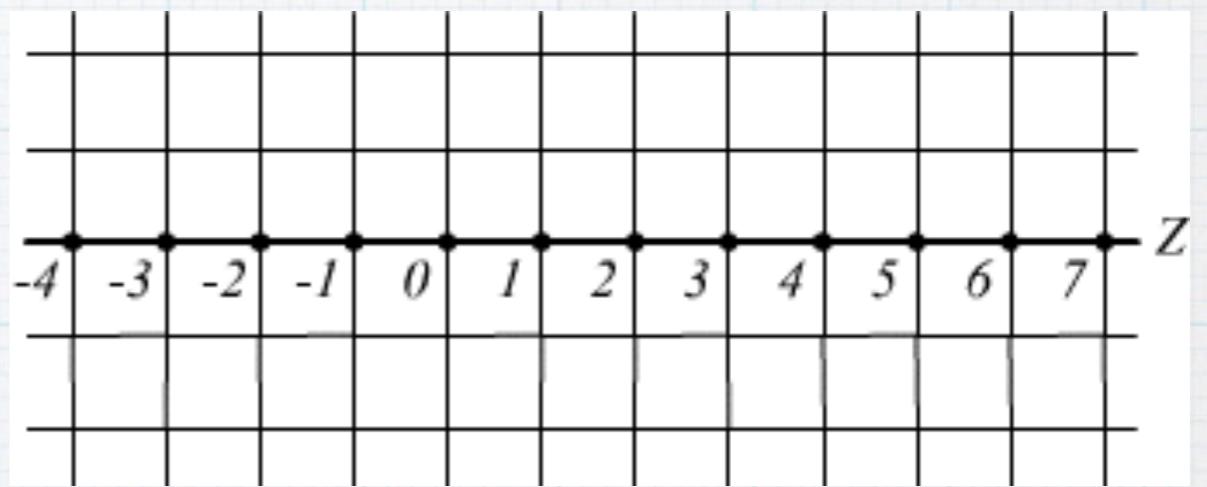
$I$  è un intervallo di  $\mathbb{R}$  se  $\forall x, y \in I$ , dato  $z \in \mathbb{R}$   $x < z < y$  si ha  $z \in I$

**TEOREMA**  $I$  intervallo  $\Leftrightarrow I$  è del tipo  $[a, b]$ ,  $]a, b]$ ,  $[a, b[$ ,  $]a, b[$ ,  
 $\emptyset$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $]-\infty, a]$ ,  $]-\infty, a[$ ,  
 $[a, +\infty[$ ,  $]a, +\infty[$

$\Leftarrow$  facile  
 $\Rightarrow$  Cosa nasconde??

**C-T OGNI INTERVALLO È UN CONNESSO**

# Connessione? Magari!



# Completezza

Brainstorming sulla parola  
**Limite**

Brainstorming sulla parola  
**Infinito**

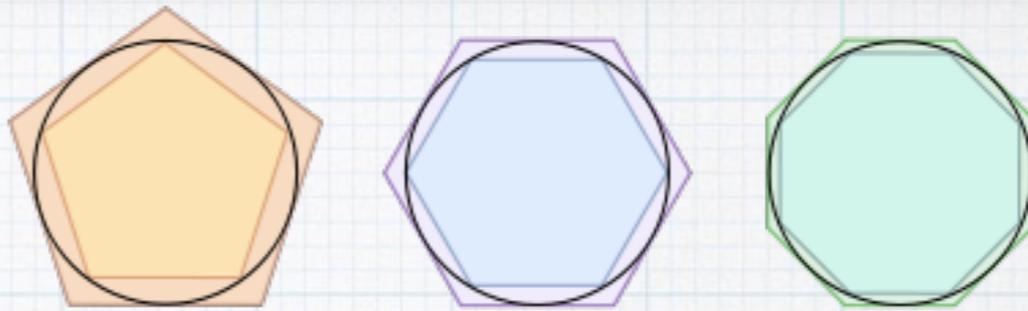
Brainstorming sulla parola  
**Completezza**



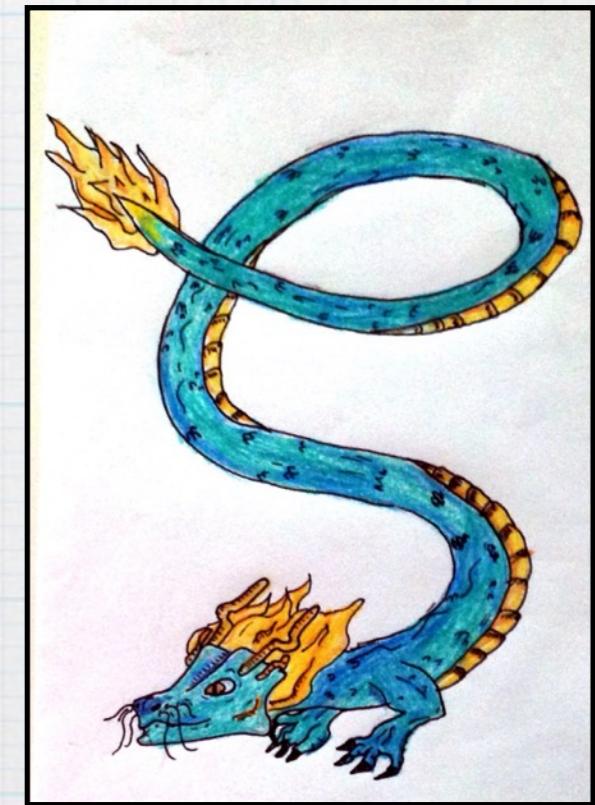
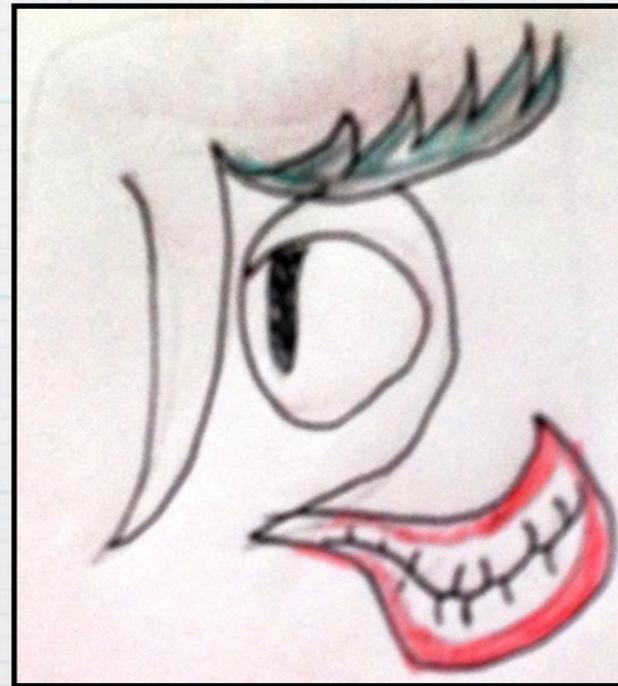
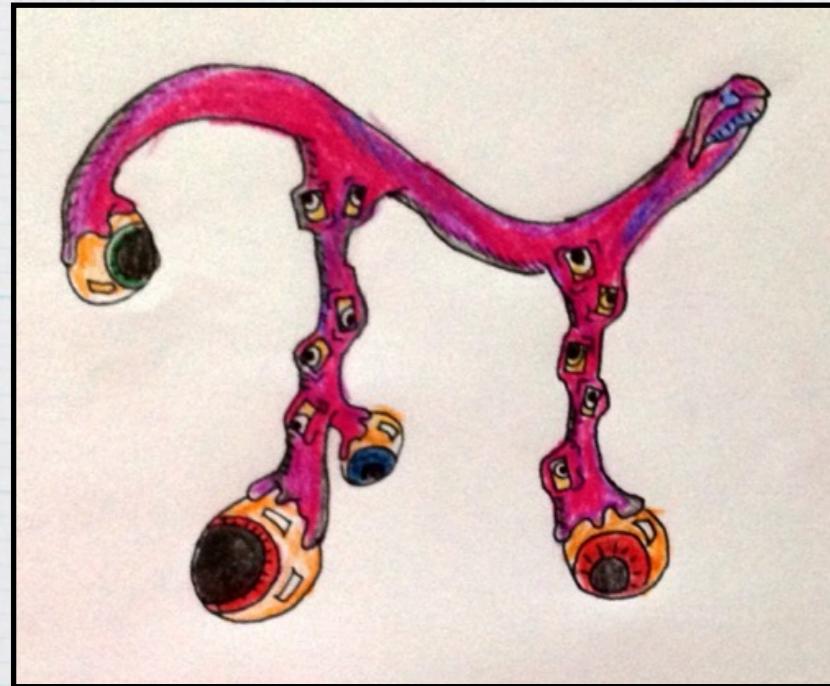
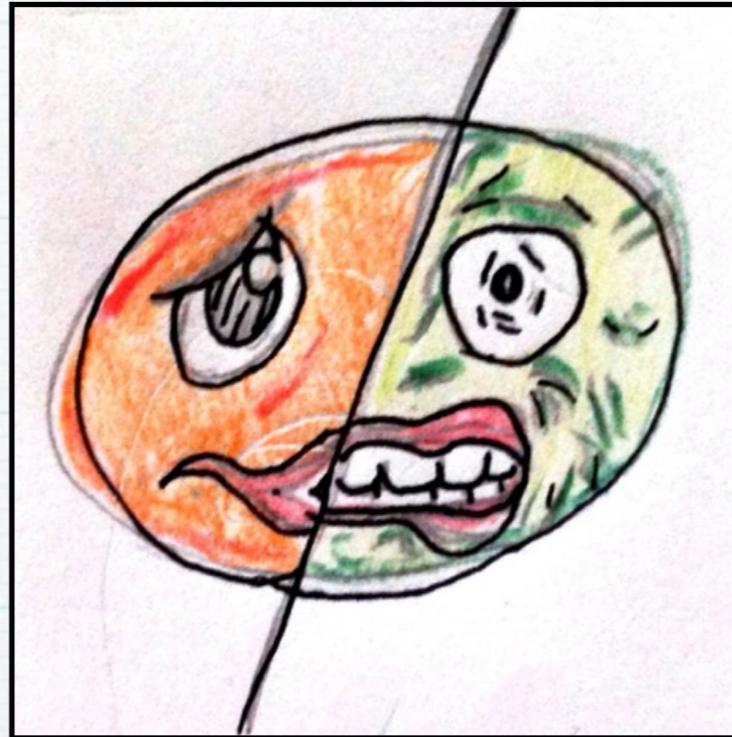
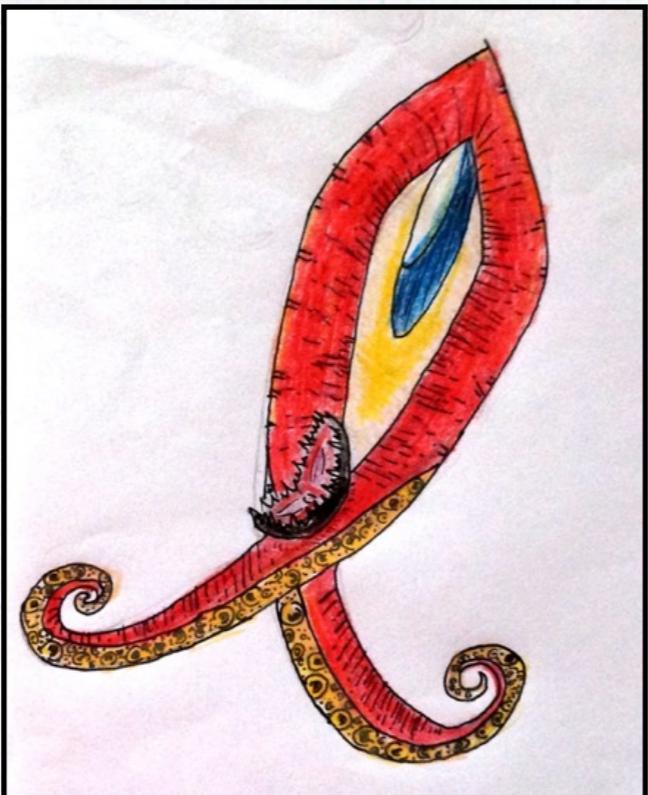
# a casa



# per strada



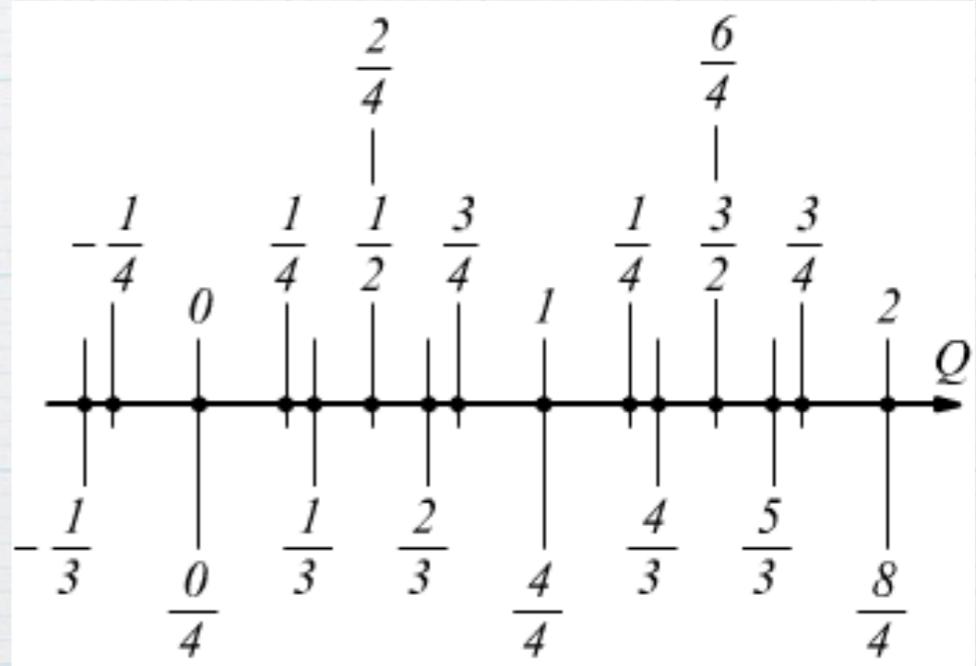
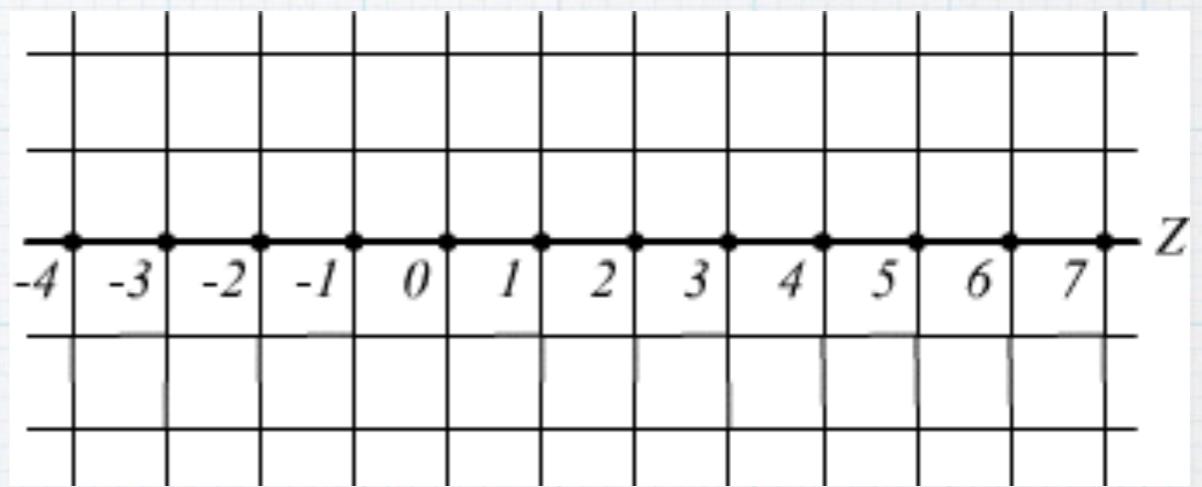
# in classe



# all'università

**C-M Ogni successione monotonà è regolare**

# Completezza? NO!!!!!!



# Continuità

Brainstorming sulla parola  
Intorno

Brainstorming sulla parola  
Separazione



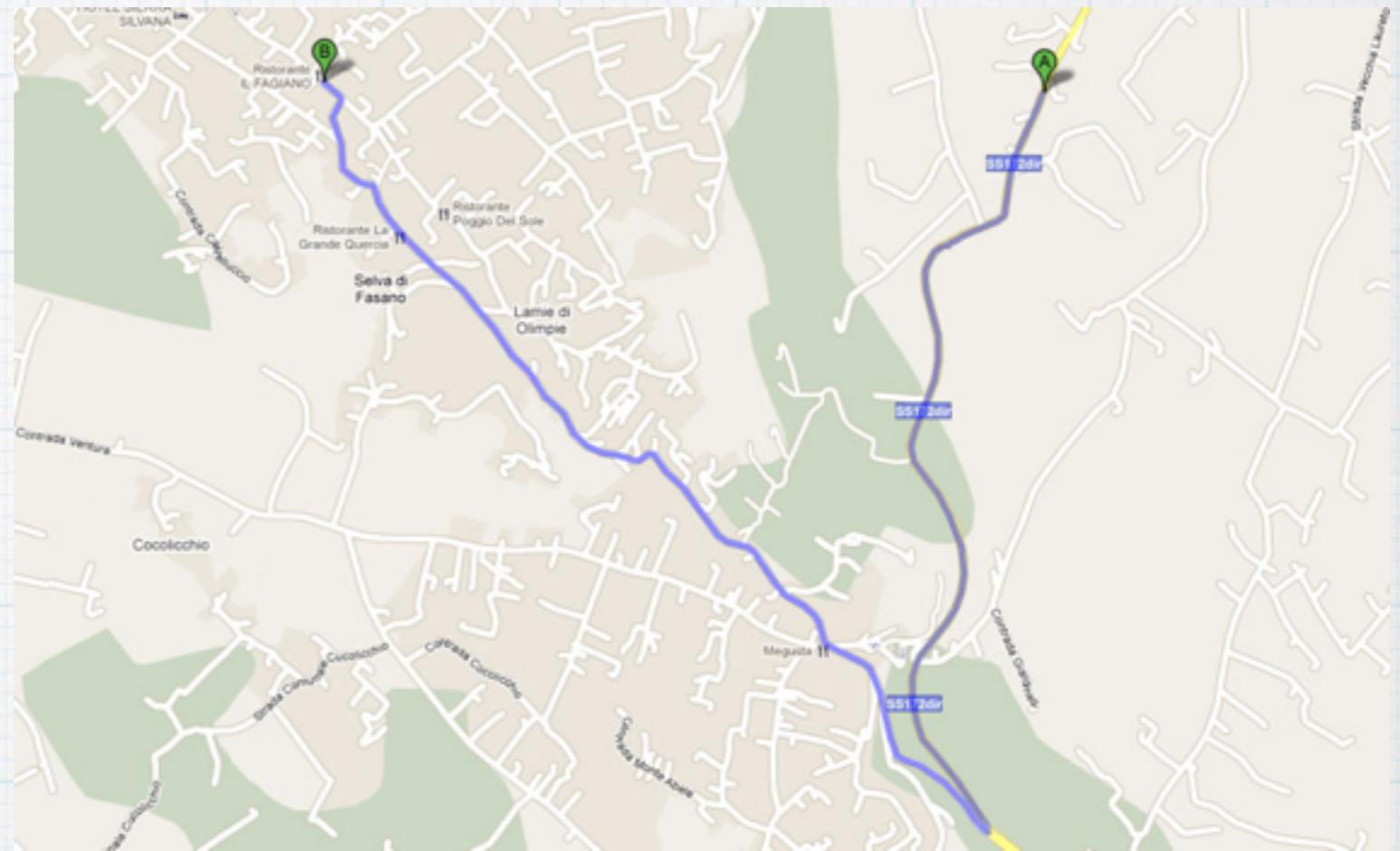
# a casa

Per capire meglio il concetto di **continuità**, proviamo ad immaginare un modo diverso, che sia nient'affatto graduale. Mi alzo la mattina, vado in bagno e apro l'acqua per lavarmi. Tutto bene al principio: l'acqua scorre dal rubinetto alla temperatura che più mi piace e che mi permette di passare dallo stato di torpore a quello di veglia senza particolari traumi. Ma, improvvisamente, senza che nulla lo lasciasse presagire, la temperatura dell'acqua diviene gelida. Non faccio a tempo a riprendermi dallo shock, che diventa bollente. Allontano le mani di scatto, ma il getto (che prima andava regolarmente verso il basso), senza nessun preavviso, comincia a cambiare direzione senza alcun preavviso: verso l'alto, verso lo specchio, verso di me, poi di nuovo verso il basso e così via, senza nessun criterio apparente.

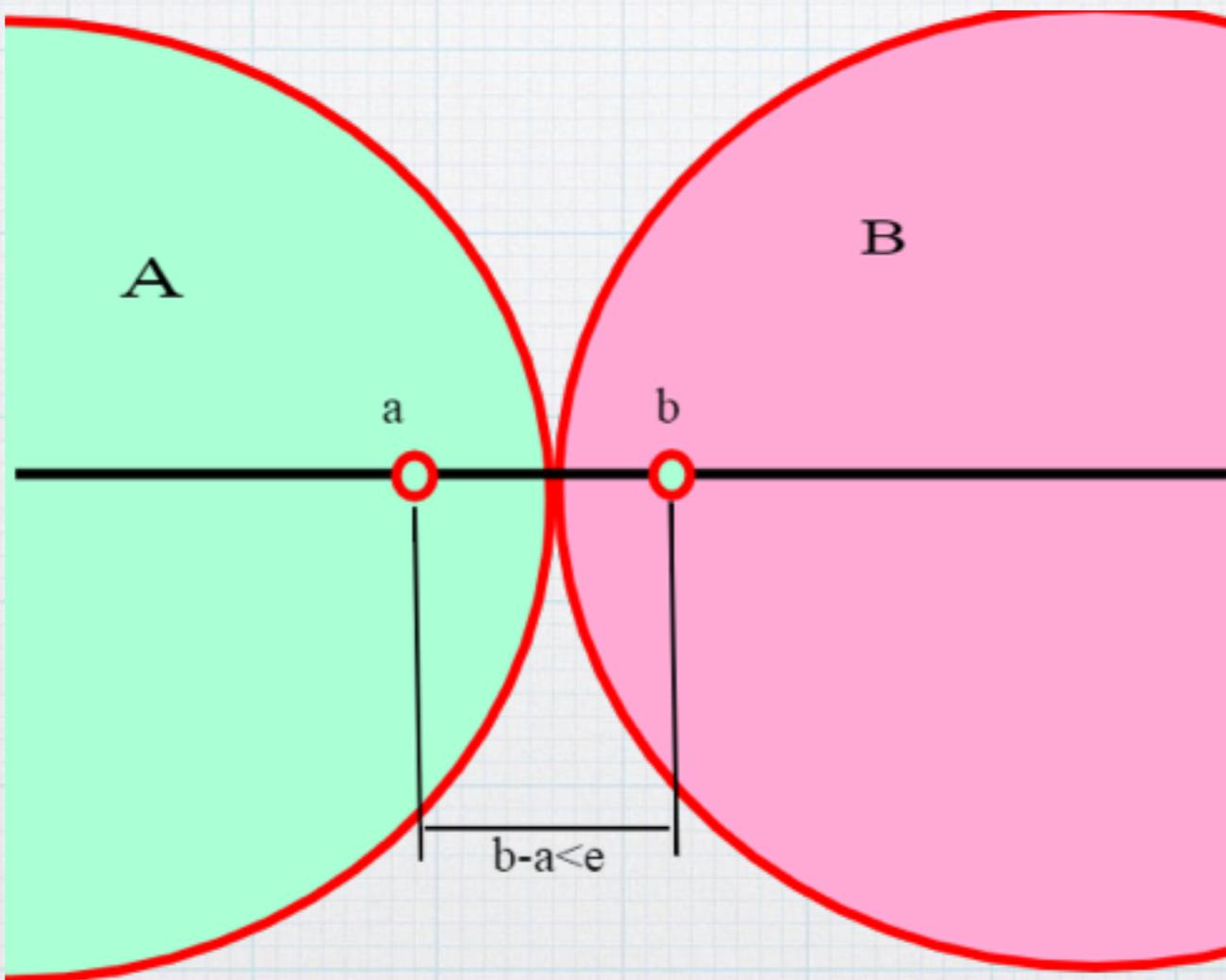
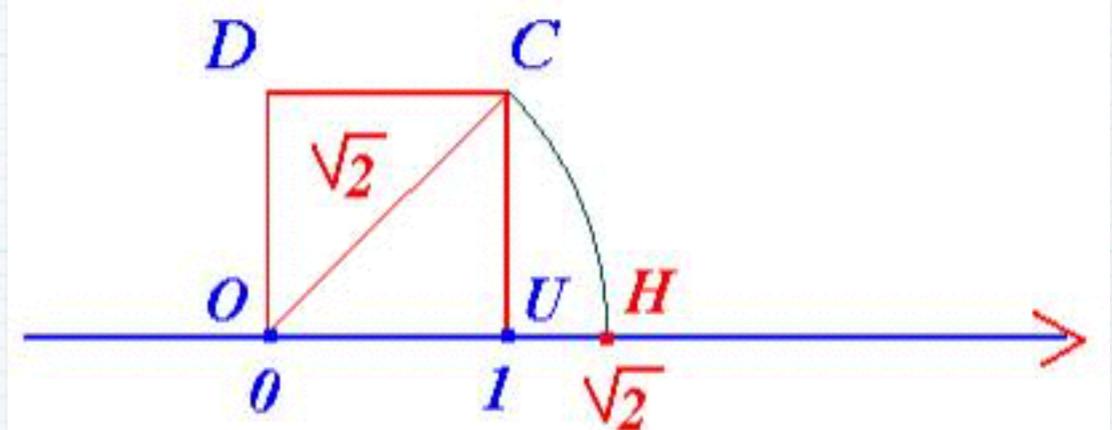
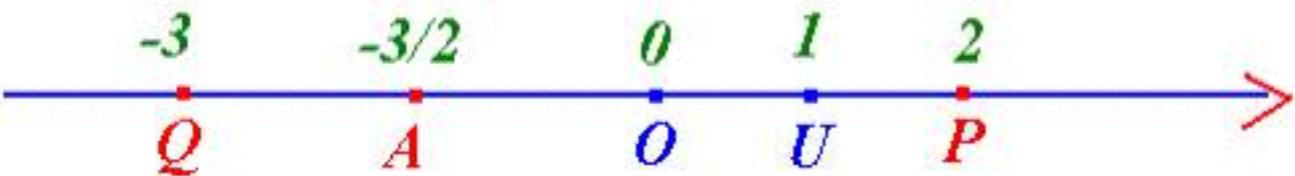
Cos'è, quindi, la continuità? E' l'opposto di quello che ho descritto. E' un mondo in cui due istantanee di ciò che ci circonda scattate ad istanti "vicini", si "somigliano". Le transizioni e le trasformazioni possono avvenire, ma non in maniera drastica, immediata. I cambiamenti possono avvenire, ma sempre passando per una sequenza di stati intermedi dallo stato di partenza a quello di arrivo. Ovviamente il concetto andrebbe precisato ed è in questa fase che l'uso del linguaggio matematico mostra tutta la sua potenza e duttilità.



# per strada



# all'università



# Conclusione linguaggio-parola-simbolo

Connessione  
Continuo

Vicino      Limite      Regolare

Discreto

Intorno

frattali      Isolato      Infinito

Accumulazione      Separazione

Intervallo      Completezza

a casa

Fate una bolla di sapone  
e osservatela: potreste  
passare tutta la vita a  
studiarla

Lord Kelvin

per strada

I buoni matematici riescono  
a vedere le analogie. I grandi  
matematici riescono a  
vedere le analogie tra le  
analogie.

Banach

in classe

Il numero misura la  
realtà e permette di  
penetrare il significato

Pitagora

# all'università

La prima dote del matematico è l'immaginazione, la sua fantasia non è in fondo molto diversa da quella del musicista, del pittore, dell'architetto e di ogni altro artista. Naturalmente, come il musicista se vuol comunicare i propri sogni deve esprimere in un linguaggio ben preciso, tale che ogni esecutore del tempo presente e dei secoli futuri possa esprimere i brani che lui ha composto, così anche il matematico deve tradurre i propri sogni in un linguaggio matematico che può essere compreso senza ambiguità ed equivoci da studiosi d'ogni Paese e d'ogni tempo.  
[...] In questa libertà di sogno il matematico non deve fermarsi agli oggetti di cui si può dare un'immediata rappresentazione sensibile, deve muoversi liberamente tra oggetti reali e ideali, concreti e astratti, visibili e invisibili, finiti e infiniti

Ennio De Giorgi