

# La nascita del Calcolo Differenziale

Anna Maria Candela

Dipartimento di Matematica  
Università degli Studi di Bari Aldo Moro

14 febbraio 2020

Orientamento Consapevole

"La Matematica tra Numeri e Forme, Algoritmi e Modelli"

Dipartimento di Matematica

# Sommario

# Sommario

- Alcuni problemi

# Sommario

- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz

# Sommario

- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz
- Il rigore di Cauchy e Weierstrass

# Sommario

- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz
- Il rigore di Cauchy e Weierstrass
- L'Analisi non Standard

# Sommario

- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz
- Il rigore di Cauchy e Weierstrass
- L'Analisi non Standard
- Il calcolo integrale

# Sommario

- Alcuni problemi
- La disputa tra Newton e Leibniz
- Il rigore di Cauchy e Weierstrass
- L'Analisi non Standard
- Il calcolo integrale
- Fonti Bibliografiche e sitografiche





## Alcuni problemi



René Descartes = Cartesio (1596 – 1650)

All'inizio del seicento Cartesio rivoluzionò la  
Matematica:

All'inizio del seicento Cartesio rivoluzionò la  
Matematica:

la retta e le curve geometriche come circonferenza,  
parabola, ellissi potevano essere rappresentate da  
equazioni algebriche per cui la Geometria poteva  
essere ridotta in buona parte a calcolo.

All'inizio del seicento Cartesio rivoluzionò la  
Matematica:

la retta e le curve geometriche come circonferenza,  
parabola, ellissi potevano essere rappresentate da  
equazioni algebriche per cui la Geometria poteva  
essere ridotta in buona parte a calcolo.

Da questa idea nasce la **Geometria Analitica**.

All'inizio del seicento Cartesio rivoluzionò la Matematica:

la retta e le curve geometriche come circonferenza, parabola, ellissi potevano essere rappresentate da equazioni algebriche per cui la Geometria poteva essere ridotta in buona parte a calcolo.

Da questa idea nasce la **Geometria Analitica**.

Il metodo algebrico si dimostrò molto potente per risolvere tanti problemi:

- l'intersezione tra due curve si riduce a un sistema di equazioni,
- l'interpolazione della curva per  $n$  punti si riduce ugualmente a un sistema di equazioni,
- ....



# Il problema della tangente

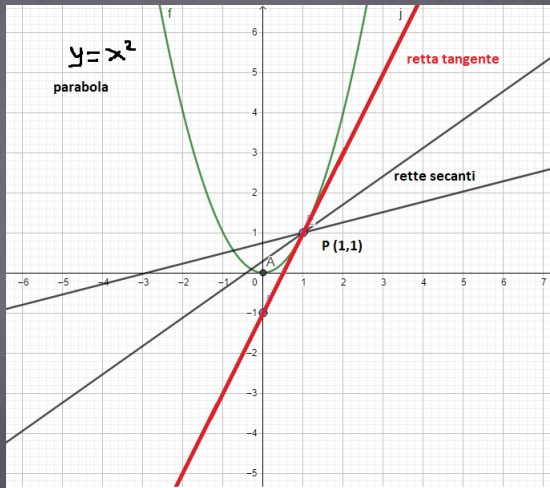


Grafico di  $y = x^2$





# La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

# La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

Data la parabola di equazione

$$\gamma: y = x^2$$

una retta si dice **tangente** a  $\gamma$  se ha con essa un unico punto di intersezione.

# La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

Data la parabola di equazione

$$\gamma: y = x^2$$

una retta si dice **tangente** a  $\gamma$  se ha con essa un unico punto di intersezione.

In particolare, la retta tangente nel punto  $P(1,1)$  è la retta del fascio per  $P$  determinata da

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - 1 = m(x - 1) \end{cases} \iff x^2 - mx + m - 1 = 0,$$

# La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

Data la parabola di equazione

$$\gamma: y = x^2$$

una retta si dice **tangente** a  $\gamma$  se ha con essa un unico punto di intersezione.

In particolare, la retta tangente nel punto  $P(1,1)$  è la retta del fascio per  $P$  determinata da

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - 1 = m(x - 1) \end{cases} \iff x^2 - mx + m - 1 = 0,$$

che avrà un'unica soluzione se ha discriminante uguale a zero, cioè

$$\Delta = m^2 - 4(m - 1) = 0 \iff m = 2.$$

# La tangente di una parabola

In Geometria Analitica:

Data la parabola di equazione

$$\gamma: y = x^2$$

una retta si dice **tangente** a  $\gamma$  se ha con essa un unico punto di intersezione.

In particolare, la retta tangente nel punto  $P(1,1)$  è la retta del fascio per  $P$  determinata da

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - 1 = m(x - 1) \end{cases} \iff x^2 - mx + m - 1 = 0,$$

che avrà un'unica soluzione se ha discriminante uguale a zero, cioè

$$\Delta = m^2 - 4(m - 1) = 0 \iff m = 2.$$

Quindi l'equazione della retta tangente cercata è

$$y = 2x - 1 \quad \text{con coefficiente angolare } m_P = 2.$$



E nel caso della funzione seno?

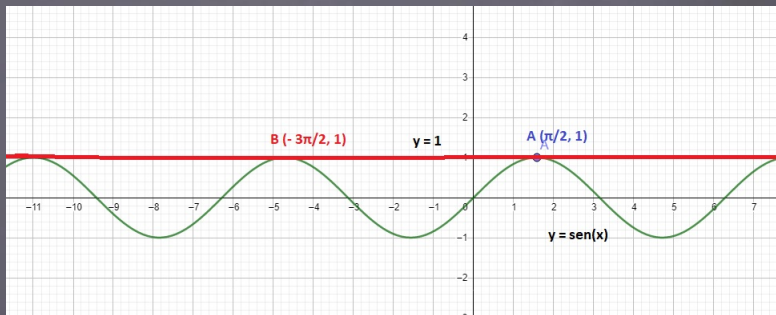


Grafico della funzione  $y = \text{sen}x$





## Altro approccio

La retta tangente alla parabola

$$\gamma: y = x^2$$

nel punto  $P(1,1)$  è la "retta limite" delle rette per  $P$  secanti la parabola.

# Altro approccio

La retta tangente alla parabola

$$\gamma: y = x^2$$

nel punto  $P(1,1)$  è la "retta limite" delle rette per  $P$  secanti la parabola.

Se  $Q(x, x^2)$ ,  $x \neq 1$ , è un secondo punto di  $\gamma$ , la retta per  $P$  e  $Q$  è la retta del fascio

$$y - 1 = m(x - 1)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

# Altro approccio

La retta tangente alla parabola

$$\gamma: y = x^2$$

nel punto  $P(1,1)$  è la "retta limite" delle rette per  $P$  secanti la parabola.

Se  $Q(x, x^2)$ ,  $x \neq 1$ , è un secondo punto di  $\gamma$ , la retta per  $P$  e  $Q$  è la retta del fascio

$$y - 1 = m(x - 1)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Si presume che  $Q$  tende a  $P \implies m_Q$  tende a  $m_P = 2$ ,

# Altro approccio

La retta tangente alla parabola

$$\gamma: y = x^2$$

nel punto  $P(1,1)$  è la "retta limite" delle rette per  $P$  secanti la parabola.

Se  $Q(x, x^2)$ ,  $x \neq 1$ , è un secondo punto di  $\gamma$ , la retta per  $P$  e  $Q$  è la retta del fascio

$$y - 1 = m(x - 1)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

Si presume che  $Q$  tende a  $P \implies m_Q$  tende a

$$m_P = 2,$$

cioè

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow 2 \quad \text{se } x \rightarrow 1.$$



## Più in generale

Più in generale, data la funzione

$$y = f(x), \quad x \in ]a, b[,$$

e fissato il punto  $P(x_0, f(x_0))$  appartenente al grafico della funzione,

## Più in generale

Più in generale, data la funzione

$$y = f(x), \quad x \in ]a, b[,$$

e fissato il punto  $P(x_0, f(x_0))$  appartenente al grafico della funzione,

se esiste, si ha che la retta tangente in  $P$  al grafico della funzione, con coefficiente  $m_P$ , è la "retta limite" delle rette per  $P$  che intersecano il grafico in un altro punto  $Q(x, f(x))$ ,  $x \neq x_0$ ,



## Più in generale

Più in generale, data la funzione

$$y = f(x), \quad x \in ]a, b[,$$

e fissato il punto  $P(x_0, f(x_0))$  appartenente al grafico della funzione,

se esiste, si ha che la retta tangente in  $P$  al grafico della funzione, con coefficiente  $m_P$ , è la "retta limite" delle rette per  $P$  che intersecano il grafico in un altro punto  $Q(x, f(x))$ ,  $x \neq x_0$ ,

dove la retta per  $P$  e  $Q$  è la retta del fascio

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

# Più in generale

Più in generale, data la funzione

$$y = f(x), \quad x \in ]a, b[,$$

e fissato il punto  $P(x_0, f(x_0))$  appartenente al grafico della funzione,

se esiste, si ha che la retta tangente in  $P$  al grafico della funzione, con coefficiente  $m_P$ , è la "retta limite" delle rette per  $P$  che intersecano il grafico in un altro punto  $Q(x, f(x))$ ,  $x \neq x_0$ ,

dove la retta per  $P$  e  $Q$  è la retta del fascio

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

con coefficiente angolare

$$m_Q = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si presume che  $Q$  tende a  $P \implies m_Q$  tende a  $m_P$ , cioè

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow m_P \quad \text{se } x \rightarrow x_0.$$



# La velocità istantanea

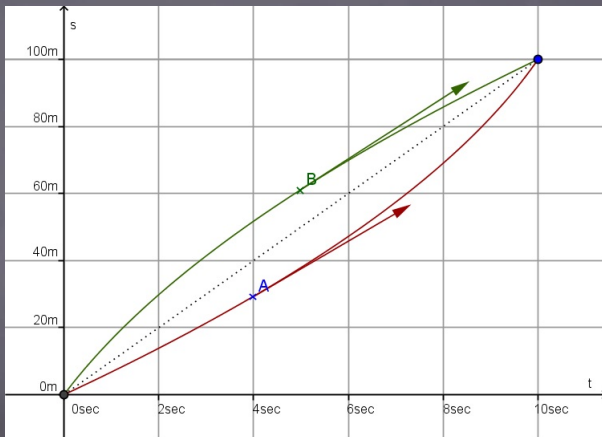


Grafico tempo-spazio



# La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10 \text{ m/sec (metri al secondo).}$$

# La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10 \text{ m/sec (metri al secondo)}.$$

Per definizione la **velocità media** di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo:

# La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10 \text{ m/sec (metri al secondo)}.$$

Per definizione la **velocità media** di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove  $\Delta s = s(t) - s(t_0)$  = spazio percorso,  
 $\Delta t = t - t_0$  = tempo impiegato a percorrerlo.



# La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10 \text{ m/sec (metri al secondo)}.$$

Per definizione la **velocità media** di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove  $\Delta s = s(t) - s(t_0) =$  spazio percorso,  
 $\Delta t = t - t_0 =$  tempo impiegato a percorrerlo.

In quei dieci secondi però l'atleta non ha corso sempre alla stessa velocità.

# La velocità istantanea

Un atleta che corre i 100 m in 10 secondi netti, ha una velocità media di

$$\frac{100}{10} = 10 \text{ m/sec (metri al secondo)}.$$

Per definizione la **velocità media** di un corpo è il quoziente tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

dove  $\Delta s = s(t) - s(t_0) =$  spazio percorso,  
 $\Delta t = t - t_0 =$  tempo impiegato a percorrerlo.

In quei dieci secondi però l'atleta non ha corso sempre alla stessa velocità.

Si può calcolare la **velocità istantanea** come

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \rightarrow v_i \quad \text{se } t \rightarrow t_0.$$



## "Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in  $x_0$  alla funzione  $y = f(x)$ :

# "Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in  $x_0$  alla funzione  $y = f(x)$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow m_P \quad \text{se } x \rightarrow x_0.$$

# "Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in  $x_0$  alla funzione  $y = f(x)$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow m_P \quad \text{se } x \rightarrow x_0.$$

vs

# "Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in  $x_0$  alla funzione  $y = f(x)$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow m_P \quad \text{se } x \rightarrow x_0.$$

vs

Velocità istantanea lungo il percorso  $s(t)$  all'istante  $t_0$ :

# "Retta tangente" vs "velocità istantanea"

Coefficiente angolare della retta tangente in  $x_0$  alla funzione  $y = f(x)$ :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow m_P \quad \text{se } x \rightarrow x_0.$$

vs

Velocità istantanea lungo il percorso  $s(t)$  all'istante  $t_0$ :

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} \rightarrow v_i \quad \text{se } t \rightarrow t_0.$$





# Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

# Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

- i ragionamenti di **Zenone** di Elea (489 a.C. - 431 a.C.)
- le dimostrazioni di **Eudosso** di Chido (408 a.C. - 355 a.C.)

# Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

- i ragionamenti di **Zenone** di Elea (489 a.C. - 431 a.C.)
- le dimostrazioni di **Eudosso** di Cnido (408 a.C. - 355 a.C.)
- i calcoli di **Archimede** di Siracusa (287 a.C. circa - 212 a.C.)

# Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

- i ragionamenti di **Zenone** di Elea (489 a.C. - 431 a.C.)
- le dimostrazioni di **Eudosso** di Chido (408 a.C. - 355 a.C.)
- i calcoli di **Archimede** di Siracusa (287 a.C. circa - 212 a.C.)
- ...

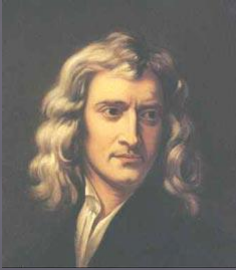
# Le origini

Le origini del Calcolo Infinitesimale si possono far risalire a:

- i ragionamenti di **Zenone** di Elea (489 a.C. - 431 a.C.)
- le dimostrazioni di **Eudosso** di Cnido (408 a.C. - 355 a.C.)
- i calcoli di **Archimede** di Siracusa (287 a.C. circa - 212 a.C.)
- ...
- i lavori di **Bonaventura Cavalieri** (1598 - 1647), **Galileo Galilei** (1564 - 1642), **Evangelista Torricelli** (1608 - 1647), **Blaise Pascal** (1623 - 1662) e **Pierre de Fermat** (1601 - 1665) che creano le condizioni perché si possa costruire in modo organico il **Calcolo sublime**



# La disputa tra Newton e Leibniz



Isaac Newton  
(1642 - 1727)

VS



Gottfried Wilhelm  
von Leibniz  
(1646 - 1716)





# Isaac Newton

Newton considera le quantità matematiche come descritte da un moto continuo.

# Isaac Newton

Newton considera le quantità matematiche come descritte da un moto continuo.

Chiama **fluenti** queste quantità che sono considerate variabili per gradi e sono indicate, per esempio, con le lettere  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

# Isaac Newton

Newton considera le quantità matematiche come descritte da un moto continuo.

Chiama **fluenti** queste quantità che sono considerate variabili per gradi e sono indicate, per esempio, con le lettere  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Le velocità con le quali le fluenti variano sono dette **flussione** e sono denotate con  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ .

# Isaac Newton

Newton considera le quantità matematiche come descritte da un moto continuo.

Chiama **fluenti** queste quantità che sono considerate variabili per gradi e sono indicate, per esempio, con le lettere  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Le velocità con le quali le fluenti variano sono dette **flussione** e sono denotate con  $\dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $\dot{z}$ .

Newton si avvicina molto al concetto moderno di derivata ma lo fa in modo confuso.

Gottfried Wilhelm von Leibniz

## Gottfried Wilhelm von Leibniz

Partendo da una curva  $y = f(x)$ , si tracci la retta tangente uscente da un punto  $(x, y)$  della curva.

## Gottfried Wilhelm von Leibniz

Partendo da una curva  $y = f(x)$ , si tracci la retta tangente uscente da un punto  $(x, y)$  della curva.

Dato poi ad  $x$  un incremento qualsiasi, detto **differenza** e indicato con  $dx$ ,



# Gottfried Wilhelm von Leibniz

Partendo da una curva  $y = f(x)$ , si tracci la retta tangente uscente da un punto  $(x, y)$  della curva.

Dato poi ad  $x$  un incremento qualsiasi, detto **differenza** e indicato con  $dx$ ,

**Leibniz** sceglie il differenziale della funzione  $dy$  in modo che il rapporto  $\frac{dy}{dx}$  sia esattamente il coefficiente angolare della retta tangente alla curva.



# La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni

# La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni
- 1676: In due lettere, da comunicare a Leibniz, Newton spiega il suo metodo delle serie che lega, con un anagramma, al metodo delle flussioni

# La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni
- 1676: In due lettere, da comunicare a Leibniz, Newton spiega il suo metodo delle serie che lega, con un anagramma, al metodo delle flussioni
- 1672-75: Leibniz trova i fondamenti del Calcolo Differenziale

# La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni
- 1676: In due lettere, da comunicare a Leibniz, Newton spiega il suo metodo delle serie che lega, con un anagramma, al metodo delle flussioni
- 1672-75: Leibniz trova i fondamenti del Calcolo Differenziale
- 1684: Leibniz pubblica la "Nova methodus"

# La disputa

- 1666: Newton inventa il metodo delle flussioni
- 1676: In due lettere, da comunicare a Leibniz, Newton spiega il suo metodo delle serie che lega, con un anagramma, al metodo delle flussioni
- 1672-75: Leibniz trova i fondamenti del Calcolo Differenziale
- 1684: Leibniz pubblica la "Nova methodus"
- 1704: Newton pubblica l' "Opticks" con in appendice il "Tractatus de quadratura curvarum", che contiene il metodo delle flussioni

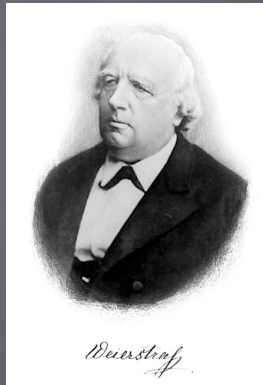




# Il rigore di Cauchy e Weierstrass



Augustin-Louis Cauchy  
(1789 - 1857)



Karl Weierstrass  
(1815 - 1897)



# Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle Basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy.

# Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle Basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy.

Cauchy ridefinì derivate e integrali in termini di limiti invece che di infinitesimi.

# Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle Basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy.

Cauchy ridefinì derivate e integrali in termini di limiti invece che di infinitesimi.

Successivamente Karl Weierstrass diede una definizione rigorosa di limite:

# Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle Basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di Augustin Cauchy.

Cauchy ridefinì derivate e integrali in termini di limiti invece che di infinitesimi.

Successivamente Karl Weierstrass diede una definizione rigorosa di limite:

se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  di accumulazione per  $A$  e  $\ell \in \mathbb{R}$  si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

equivale a dire

# Una definizione formale

Nell'Ottocento il problema delle Basi dell'Analisi fu preso di petto e risolto in modo radicale principalmente ad opera di **Augustin Cauchy**.

**Cauchy** ridefinì derivate e integrali in termini di limiti invece che di infinitesimi.

Successivamente **Karl Weierstrass** diede una definizione rigorosa di limite:

se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  di accumulazione per  $A$  e  $\ell \in \mathbb{R}$  si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

equivale a dire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ t.c. } x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$





## Più in generale

Dato  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , si dice intorno di  $x_0$  ogni insieme del tipo:

## Più in generale

Dato  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , si dice intorno di  $x_0$  ogni insieme del tipo:

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[ \quad \text{se } x_0 \in \mathbb{R},$$

per ogni  $\epsilon > 0$ ;

## Più in generale

Dato  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , si dice intorno di  $x_0$  ogni insieme del tipo:

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[ \quad \text{se } x_0 \in \mathbb{R},$$

per ogni  $\epsilon > 0$ ;

$$]a, +\infty[ \quad \text{se } x_0 = +\infty,$$

per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,

## Più in generale

Dato  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , si dice intorno di  $x_0$  ogni insieme del tipo:

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[ \quad \text{se } x_0 \in \mathbb{R},$$

per ogni  $\epsilon > 0$ ;

$$]a, +\infty[ \quad \text{se } x_0 = +\infty,$$

per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$]-\infty, a[ \quad \text{se } x_0 = -\infty,$$

per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,

# Più in generale

Dato  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , si dice intorno di  $x_0$  ogni insieme del tipo:

$$]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[ \quad \text{se } x_0 \in \mathbb{R},$$

per ogni  $\epsilon > 0$ ;

$$]a, +\infty[ \quad \text{se } x_0 = +\infty,$$

per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$]-\infty, a[ \quad \text{se } x_0 = -\infty,$$

per ogni  $a \in \mathbb{R}$ ,

per cui, data la funzione  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  di accumulazione per  $A$  e  $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  si ha che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \Longleftrightarrow$$

$\forall V$  intorno di  $\ell \quad \exists U$  intorno di  $x_0$  t.c.

$$x \in A \cap (U \setminus \{x_0\}) \implies f(x) \in V.$$



# La derivata

Data una funzione  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e fissato  $x_0 \in ]a, b[$  si dice che  $f$  è **derivabile** in  $x_0$  se

# La derivata

Data una funzione  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e fissato  $x_0 \in ]a, b[$  si dice che  $f$  è **derivabile** in  $x_0$  se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$



# La derivata

Data una funzione  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e fissato  $x_0 \in ]a, b[$  si dice che  $f$  è **derivabile** in  $x_0$  se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Tale limite è detto **derivata prima di  $f$  in  $x_0$**  e si denota con

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

# La derivata

Data una funzione  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e fissato  $x_0 \in ]a, b[$  si dice che  $f$  è **derivabile** in  $x_0$  se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Tale limite è detto **derivata prima di  $f$  in  $x_0$**  e si denota con

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Usando tale definizione:

- il **coefficiente angolare** della retta tangente in  $x_0$  alla funzione  $y = f(x)$  è proprio  $f'(x_0)$ ;

# La derivata

Data una funzione  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  e fissato  $x_0 \in ]a, b[$  si dice che  $f$  è **derivabile** in  $x_0$  se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Tale limite è detto **derivata prima di  $f$  in  $x_0$**  e si denota con

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0).$$

Usando tale definizione:

- il **coefficiente angolare** della retta tangente in  $x_0$  alla funzione  $y = f(x)$  è proprio  $f'(x_0)$ ;
- la **velocità istantanea** lungo il percorso  $s(t)$  all'istante  $t_0$  è proprio  $s'(x_0)$ .



# L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di **infinitesimo**, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi;

# L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di **infinitesimo**, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi; successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di **Cauchy** e **Weierstrass**.

# L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di **infinitesimo**, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi; successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di **Cauchy** e **Weierstrass**.

Tra il 1960 e il 1966 il matematico **Abraham Robinson** (1918 - 1974) dà un fondamento logico rigoroso agli infinitesimi di Leibniz e tale teoria prende il nome di **Analisi non Standard**.

# L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di **infinitesimo**, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi; successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di **Cauchy** e **Weierstrass**.

Tra il 1960 e il 1966 il matematico **Abraham Robinson** (1918 - 1974) dà un fondamento logico rigoroso agli infinitesimi di Leibniz e tale teoria prende il nome di **Analisi non Standard**.

La scelta di utilizzare questo approccio piuttosto che il concetto formale di limite ha due motivazioni:



# L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di **infinitesimo**, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi; successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di **Cauchy** e **Weierstrass**.

Tra il 1960 e il 1966 il matematico **Abraham Robinson** (1918 - 1974) dà un fondamento logico rigoroso agli infinitesimi di Leibniz e tale teoria prende il nome di **Analisi non Standard**.

La scelta di utilizzare questo approccio piuttosto che il concetto formale di limite ha due motivazioni:

- le dimostrazioni sono più semplici e intuitive;

# L'Analisi non Standard

Newton e Leibniz fondano il Calcolo Differenziale sul concetto di **infinitesimo**, numero infinitamente piccolo eppure diverso da zero, usato per definire le derivate come rapporti di infinitesimi; successivamente gli infinitesimi vengono ritenuti superflui poiché si passa al rigore formale di **Cauchy** e **Weierstrass**.

Tra il 1960 e il 1966 il matematico **Abraham Robinson** (1918 - 1974) dà un fondamento logico rigoroso agli infinitesimi di Leibniz e tale teoria prende il nome di **Analisi non Standard**.

La scelta di utilizzare questo approccio piuttosto che il concetto formale di limite ha due motivazioni:

- le dimostrazioni sono più semplici e intuitive;
- l'Aritmetica inizia con i numeri interi naturali, quindi considera gli interi relativi, i razionali, gli irrazionali. In quest'ottica il passo successivo sembra essere l'introduzione degli infinitesimi.



# Il calcolo integrale

Si presentano due problemi:

## Il calcolo integrale

Si presentano due problemi:

- data una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dire se esiste  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F$  è derivabile in  $I$  e  $F'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in I$

## Il calcolo integrale

Si presentano due problemi:

- data una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dire se esiste  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F$  è derivabile in  $I$  e  $F'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in I$   
se esiste,  $F$  è detta **primitiva** di  $f$  in  $I$ ;

# Il calcolo integrale

Si presentano due problemi:

- data una funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dire se esiste  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $F$  è derivabile in  $I$  e  $F'(x) = f(x)$  per ogni  $x \in I$   
se esiste,  $F$  è detta **primitiva** di  $f$  in  $I$ ;
- data una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  limitata e positiva, se possibile calcolare l'area della regione

$$R_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

detto **rettangoloide relativo a  $f$  di Base  $[a, b]$** .





## Calcolo dell'area del cerchio

Già nel 430 a.C. Antifonte tentò di determinare l'area del cerchio inscrivendovi dei triangoli sempre più piccoli fino a quando la sua area non 'esaurisce'.

# Calcolo dell'area del cerchio

Già nel 430 a.C. Antifonte tentò di determinare l'area del cerchio inscrivendovi dei triangoli sempre più piccoli fino a quando la sua area non 'esaurisce'.

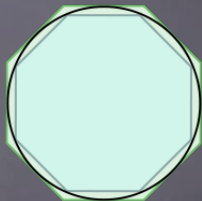
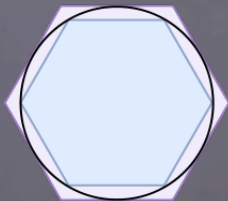
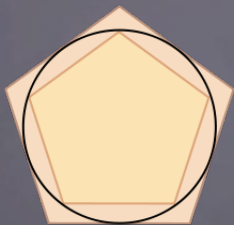
Archimede determinò con buona approssimazione l'area del cerchio (e quindi di  $\pi$ !) costruendo poligoni regolari inscritti in un cerchio (metodo di esaustione) e poligoni regolari circoscritti (metodo di compressione):

# Calcolo dell'area del cerchio

Già nel 430 a.C. Antifonte tentò di determinare l'area del cerchio inscrivendovi dei triangoli sempre più piccoli fino a quando la sua area non 'esaurisce'.

Archimede determinò con buona approssimazione l'area del cerchio (e quindi di  $\pi$ !) costruendo poligoni regolari inscritti in un cerchio (metodo di esaustione) e poligoni regolari circoscritti (metodo di compressione): all'aumentare del numero dei lati dei poligoni le figure tendono ad avvicinarsi alla forma del cerchio 'per difetto' e 'per eccesso'.

## Approssimazione dell'area del cerchio



Metodo di esaustione e metodo di compressione



# Il calcolo integrale

Il metodo di esaustione e il metodo di compressione sono alla base del concetto di integrale di una funzione sviluppato nel Seicento da

## Il calcolo integrale

Il metodo di esaustione e il metodo di compressione sono alla base del concetto di integrale di una funzione sviluppato nel Seicento da

- Isaac Newton (1643 - 1727),
- Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716) e

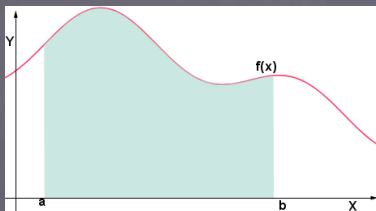
## Il calcolo integrale

Il metodo di esaustione e il metodo di compressione sono alla base del concetto di integrale di una funzione sviluppato nel Seicento da

- Isaac Newton (1643 - 1727),
- Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 - 1716) e
- Johann I Bernoulli (1667 - 1748).



# Il calcolo integrale



Area del rettangoloide



Integrale secondo  
Riemann

# Fonti Bibliografiche e sitografiche

- P. Bonavoglia, Il calcolo infinitesimale, analisi per i licei alla maniera non standard, Editore Matematicamente.it, 2011
- M. Galeazzi, Newton e Leibniz,  
<http://matematica-old.unibocconi.it/galeazzi/capitolo16.htm>
- G. Lari, Storia del calcolo differenziale e la disputa tra Leibniz e Newton, Tesi di laurea, Università di Bologna.
- A. Pucci, Nascita del calcolo differenziale,  
<http://www.humanitasnova.net/?p=51>
- G.T. Bagni, Differenziale e infinitesimo alle origini del Calcolo infinitesimale: note storiche ed esperienze didattiche,  
<http://www.syllogismos.it/history/Speranza.pdf>