MISURARE IL FUTURO

ORIENTAMENTO CONSAPEVOLE 2020

Vito Crismale

Dipartimento di Matematica

Università degli studi di Bari Aldo Moro

vitonofrio.crismale@uniba.it

21 Febbraio 2020

PERCHE‘ MISURARE IL FUTURO

- Misurare: accertare la quantità, l’entità quantitativa di qualcosa
- Futuro: qualcosa che deve ancora avvenire.

Il futuro è incertezza. Si cerca spesso di dare una quantificazione dell’incertezza.

Quanto è probabile che piova oggi? Prendo l’ombrello?

... La matematica ci aiuta

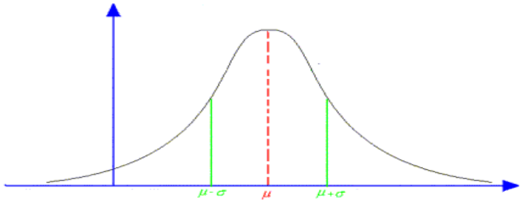
PERCHE' MISURARE IL FUTURO

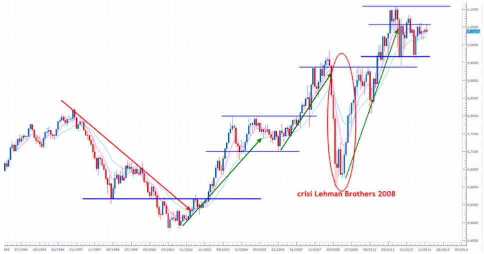
PROBABILITA'

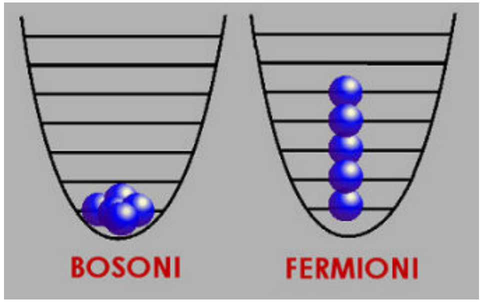
⇓

quantificare (misurare) eventi in presenza di incertezza

...e molto altro







PERCHE' MISURARE IL FUTURO

- 1654 Un giocatore d'azzardo facoltoso sta rovinando le sue finanze
- chiede aiuto a Fermat e Pascal

che concepiscono i primi modelli di calcolo delle probabilità.

- inizia una nuova avventura matematica, che a volte fornisce informazioni coerenti col senso comune, altre volte sorprende...

ALCUNE SORPRESE

- Supponiamo di essere circa 70.

  Quanto è probabile che tra noi ci siano almeno2 persone che festeggiano il compleanno nello stesso giorno?

  Più del 99.7%

- Si pubblicizza una carta di credito che realizza operazioni di pagamento correttamente nel 99% dei casi.

  Supponiamo che voi vorreste usarla 50 volte in un anno.

  E' del tutto ragionevole pensare che tutte le vostre operazioni vadano in porto?

  C'è il 41% di probabilità che almeno 1 abbia esito negativo.

ALCUNE SORPRESE

Il problema delle 3 porte

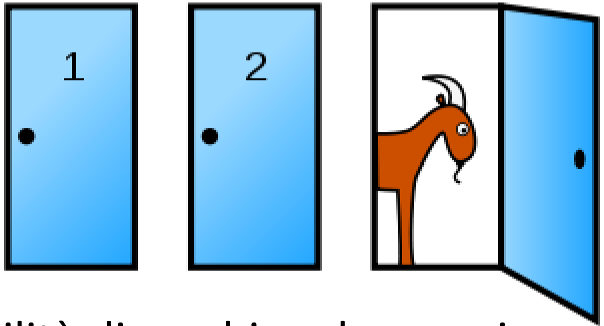
In un gioco vengono mostrate al concorrente tre porte chiuse.

Dietro ad una si trova un'automobile, mentre ciascuna delle altre due nasconde una capra.

ALCUNE SORPRESE

Il giocatore può scegliere una delle tre porte, vincendo il premio corrispondente.

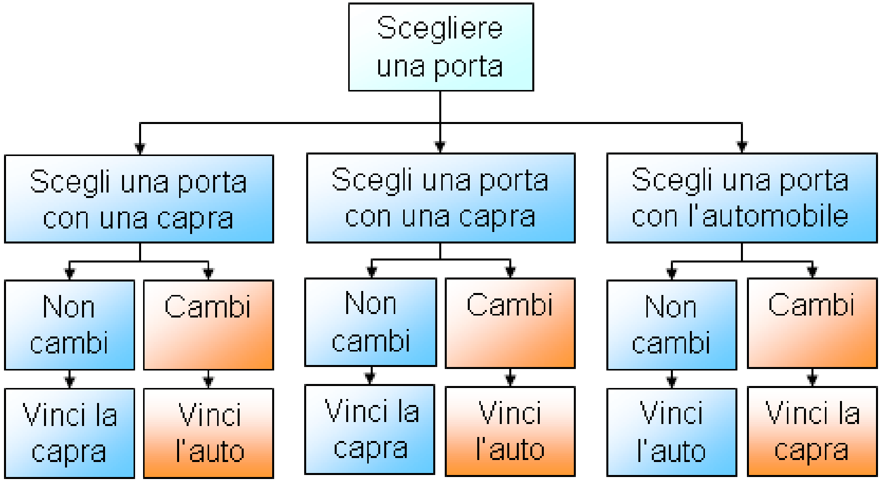
Il giocatore sceglie una porta ma non viene aperta. Il presentatore – che conosce cosa c'è dietro le porte - apre una porta con la capra.



Offre al giocatore la possibilità di cambiare la propria scelta iniziale, passando all'unica porta restante….che fare?

ALCUNE SORPRESE

Conviene cambiare o no? Le probabilità di vittoria cambiano?



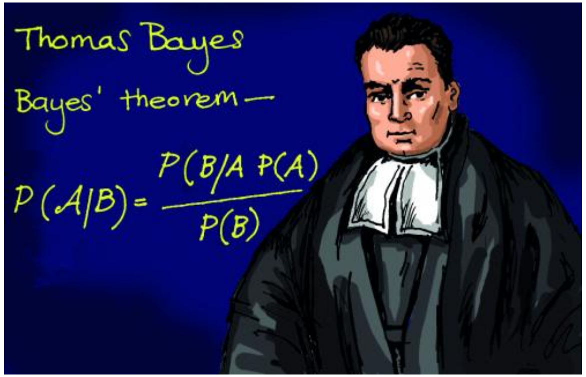
…. Conviene cambiare.

ALCUNE SORPRESE

Il diagramma precedente (fonte: Wikipedia) non dà una spiegazione *rigorosa* del perchè conviene cambiare.

Per comprendere a fondo il problema ed averne una dimostrazione, abbiamo bisogno del concetto di PROBABILITA‘ CONDIZIONATA e di alcune sue proprietà.

C‘è cioè bisogno di scomodare il ministro presbiteriano **Thomas Bayes**



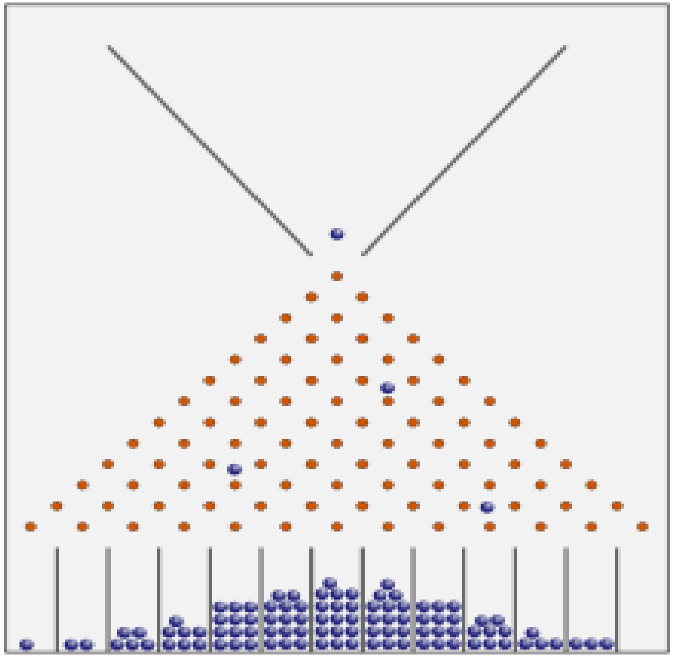
ALCUNE SORPRESE

- Il teorema del Limite Centrale

  Il risultato più profondo della Teoria della Probabilità…

  Non tutte le leggi probabilistiche hanno la stessa dignità: c‘è una regina

ALCUNE SORPRESE



ALCUNE SORPRESE

Numeri normali in base 10

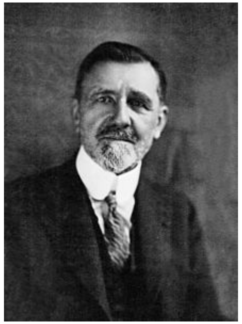
- Sono quelli per cui tutte le cifre appaiono con frequenza 1/10, tutte le coppie di cifre con frequenza $1/(10)^2$, ….
- Tutti i numeri razionali non sono normali. Alcuni irrazionali algebrici come $\sqrt{2}$

  o trascendenti come π non si sa se lo sono.
- 0,1234567891011121314151617… è normale
- 0,2357111317192329313741... è normale

  Ma c'è qualcosa di ancora più sorprendente

ALCUNE SORPRESE

Circa un secolo fa Emile Borel



prova con un teorema probabilistico noto come **Legge Dei Grandi Numeri** che *quasi tutti* i numeri sono normali.

Ma quelli non normali sono infiniti e *tanti quanti* i numeri reali!!!!!

UN PO‘ DI STORIA

Dal XVII secolo fino al 1933 si raggiungono risultati importantissimi in Probabilità, ma manca ancora una sua sistemazione assiomatica.

Questo perchè i tempi non erano ancora maturi.

Non si conoscevano ancora gli strumenti matematici per arrivare a tale scopo.

UN PO' DI STORIA

Nel 1933 Andrej Nikolaevic Kolmogorov definisce gli assiomi della Teoria della Probabilità.

Da quel momento lo sviluppo diventa impetuoso

UN PO‘ DI STORIA

Oggi è tra i settori matematici più in espansione, con applicazioni che vanno dalla Statistica, alla Fisica, all‘Informatica, alla Finanza.

Accanto alla Teoria della Probabilità di Kolmogorov, sono nate altre teorie, nate inizialmente per spiegare alcuni fenomeni in Meccanica Quantistica.

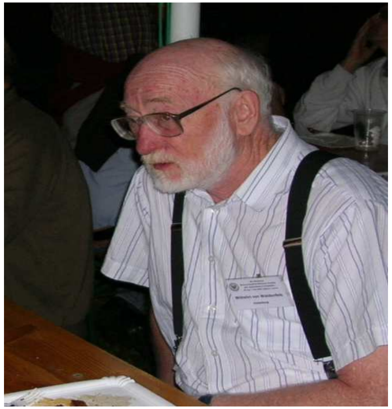
Negli ultimi anni si sta assistendo ad un fenomeno simile a quello che portò alla nascita e allo sviluppo delle geometrie non euclidee.

UN PO' DI STORIA

Tra il 1974 e il 1984 nasce la Probabilità Quantistica

L. Accardi

K.R. Parthasarathy



W. Von Waldenfels

R. Hudson

...che è il mio campo di ricerca

MODELLO PROBABILISTICO

In Matematica si cerca di dare risposte a problemi costruendo modelli.

I modelli probabilistici permettono il trattamento matematico dell'incertezza.

Si derivano conclusioni logiche e rigorose in base alle ipotesi formulate.

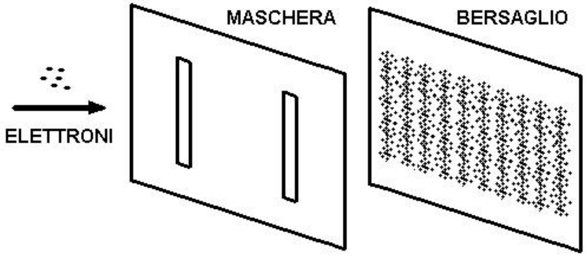
Inizialmente la Probabilità permette di affrontare problemi interessanti con modelli semplici e matematica elementare...

ma non è così sempre. **Non è disciplina *facile***...non è sempre facile MISURARE IL FUTURO!

CONCLUSIONI

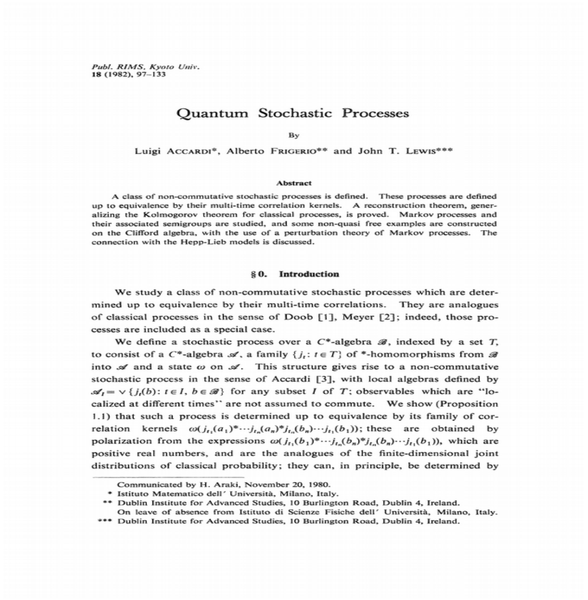
Il modello probabilistico, come sempre in matematica, è astrazione dalla realtà.

Occorre sempre verificare l'attendibilità e rivedere il tutto se le sue previsioni si scostano dall'evidenza sperimentale, come nell'esperienza della doppia fenditura...



CONCLUSIONI

Casi ancora più eclatanti hanno portato non solo a dare definizioni diverse alla probabilità condizionata ma alla nascita della Teoria della Probabilità non kolmogoroviana oltre quella sempre valida di Kolmogorov.



Publ. RIMS, Kyoto Univ.
18 (1982), 97–133

Quantum Stochastic Processes

By

Luigi ACCARDI*, Alberto FRIGERIO** and John T. LEWIS***

Abstract

A class of non-commutative stochastic processes is defined. These processes are defined up to equivalence by their multi-time correlation kernels. A reconstruction theorem, generalizing the Kolmogorov theorem for classical processes, is proved. Markov processes and their associated semigroups are studied, and some non-quasi free examples are constructed on the Clifford algebra, with the use of a perturbation theory of Markov processes. The connection with the Hepp-Lieb models is discussed.

§ 0. Introduction

We study a class of non-commutative stochastic processes which are determined up to equivalence by their multi-time correlations. They are analogues of classical processes in the sense of Doob [1], Meyer [2]; indeed, those processes are included as a special case.

We define a stochastic process over a C^*-algebra $\mathscr{B}$, indexed by a set T, to consist of a C^*-algebra $\mathscr{A}$, a family $\{j_t: t \in T\}$ of *-homomorphisms from $\mathscr{B}$ into $\mathscr{A}$ and a state ω on $\mathscr{A}$. This structure gives rise to a non-commutative stochastic process in the sense of Accardi [3], with local algebras defined by $\mathscr{A}_I = \vee\{j_t(b): t \in I, b \in \mathscr{B}\}$ for any subset I of T; observables which are "localized at different times" are not assumed to commute. We show (Proposition 1.1) that such a process is determined up to equivalence by its family of correlation kernels $\omega(j_{t_1}(a_1)^* \cdots j_{t_n}(a_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_1}(b_1))$; these are obtained by polarization from the expressions $\omega(j_{t_1}(b_1)^* \cdots j_{t_n}(b_n)^* j_{t_n}(b_n) \cdots j_{t_1}(b_1))$, which are positive real numbers, and are the analogues of the finite-dimensional joint distributions of classical probability; they can, in principle, be determined by

Communicated by H. Araki, November 20, 1980.
* Istituto Matematico dell' Università, Milano, Italy.
** Dublin Institute for Advanced Studies, 10 Burlington Road, Dublin 4, Ireland. On leave of absence from Istituto di Scienze Fisiche dell' Università, Milano, Italy.
*** Dublin Institute for Advanced Studies, 10 Burlington Road, Dublin 4, Ireland.

Commun. Math. Phys. 93, 301–323 (1984)

Communications in Mathematical Physics
© Springer-Verlag 1984

Quantum Ito's Formula and Stochastic Evolutions*

R. L. Hudson[1] and K. R. Parthasarathy[2]

1 Mathematics Department, University of Nottingham, University Park, Nottingham NG7 2RD, England
2 Indian Statistical Institute, 7, S.J.S. Sansanwal Marg, New Delhi 110016, India

Abstract. Using only the Boson canonical commutation relations and the Riemann-Lebesgue integral we construct a simple theory of stochastic integrals and differentials with respect to the basic field operator processes. This leads to a noncommutative Ito product formula, a realisation of the classical Poisson process in Fock space which gives a noncommutative central limit theorem, the construction of solutions of certain noncommutative stochastic differential equations, and finally to the integration of certain irreversible equations of motion governed by semigroups of completely positive maps. The classical Ito product formula for stochastic differentials with respect to Brownian motion and the Poisson process is a special case.

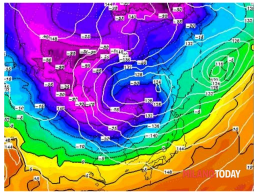
1. Introduction

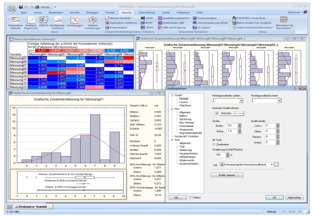
We construct a quantum mechanical generalisation of the Ito-Doob theory of mean-square stochastic integration and an associated Ito product formula in which Brownian motion is replaced by the pair of operator processes $(A_f(t): t \geqq 0)$, $(A_g^\dagger(t): t \geqq 0)$, where $A_f(t) = a(f\chi_{[0,t]})$, and $A_g^\dagger(t) = a^\dagger(g\chi_{[0,t]})$ are annihilation and creation operators in the Boson Fock space $\Gamma(\mathfrak{h})$ over $\mathfrak{h} = L^2[0,\infty) \otimes \mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}$ being a Hilbert space with inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{k}}$, and the Poisson process is replaced by what we call a gauge process $(\Lambda_\Pi(t): t \geqq 0)$, where π is a locally bounded self adjoint operator valued map from $[0,\infty)$ to $B(\mathfrak{k})$ and $\Lambda_\pi(t)$ is the differential second quantisation of $I \otimes \Pi(t)$. This leads to a stochastic calculus which is in some respects simpler and more natural than the classical theory, which is contained as a special case.

* Parts of this work were completed while the first author was a Royal Society-Indian National Science Academy Exchange Visitor to the Indian Statistical Institute, New Delhi, and visiting the University of Texas supported in part by NSF grant PHY81-07381, and part while the second author was visiting the Mathematics Research Centre of the University of Warwick

CONCLUSIONI

La Probabilità è presente in molti ambiti della nostra vita





$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

CONCLUSIONI

I mestieri del probabilista:

analisi statistica, analisi del rischio, controlli di qualità, quote agenzie di scommesse, finanza, industria, ricerca…

...se questo bollino fosse messo su oggetti sarebbe il più comune...

CONCLUSIONI

Misurare il futuro significa prendere atto che fenomeni non deterministici accadono continuamente ed è possibile studiarli rigorosamente.

Non significa eliminare l'imponderabile ma quantificare l'incertezza.

E significa soprattutto comprendere se è possibile che appaiano comportamenti regolari nel ripetersi - in un numero elevato di volte – di fenomeni aleatori.

<< Dio non gioca a dadi con l'universo >> ?