

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

18 febbraio 2022

1. Risolvere la seguente equazione nel piano complesso

$$\bar{z}^4 + z^4 = |z|^4 + \left(\frac{1-i}{i+1}\right)^{124} + \left(\frac{\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi}{\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi}\right)^{36}.$$

2. Studiare la disequazione

$$\sqrt[3]{\frac{\ln^2(x^2) + \ln|x| - 3}{\sqrt{x^2 - x} - x}} < 0.$$

3. Calcolare il seguente limite al variare di $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2} \sin^2 x}{(1 + x^\alpha)^5 - 1}.$$

4. Studiare la funzione

$$y = 2x\sqrt{2} - \ln|x^2 - 1|.$$

e tracciarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} \arccos \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx.$$

6. Stabilire, giustificando la risposta, se la funzione integranda è integrabile in $(1, 2]$, $[2, 3]$ e $[3, +\infty)$.

Solgimento

1. Poiché $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{124} = \left(\frac{(1-i)^2}{1-i^2}\right)^{124} = \left(\frac{-2i}{2}\right)^{124} = (i^4)^{31} = 1$

$$\left(\frac{\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi}{\cos \frac{7}{12}\pi + i \sin \frac{7}{12}\pi}\right)^{36} = \left(\cos\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12}\right)\pi + i \sin\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12}\right)\pi\right)^{36} = \cos \frac{36}{12}\pi + i \sin \frac{36}{12}\pi = -1$$

l'equazione diventa $\bar{z}^4 + z^4 = |z|^4 + |z|^4$.

Poiché $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ e quindi $\bar{z} = \rho(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$ si ha

$$\rho^4(\cos(-4\theta) + i \sin(-4\theta)) + \rho^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = \rho^4$$

Poiché $\cos(-4\theta) = \cos 4\theta$ e $\sin(-4\theta) = -\sin 4\theta$ si ottiene

$$\rho^4(2 \cos 4\theta - 1) = 0 \Rightarrow \rho = 0 \vee \cos 4\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$z = 0 \vee 4\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow z = 0 \vee \theta = \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Conclusione: l'equazione oltre la soluzione banale $z = 0$ ha infinite

soluzioni del tipo $z_0 = \rho(\cos(\pm \frac{\pi}{12}) + i \sin(\pm \frac{\pi}{12})) = \rho(\cos \frac{\pi}{12} \pm i \sin \frac{\pi}{12})$, $\rho > 0$

$$z_1 = \rho(\cos(\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}))$$

$$z_2 = \rho(\cos(\pm \frac{\pi}{12} + \pi) + i \sin(\pm \frac{\pi}{12} + \pi)) = -z_0$$

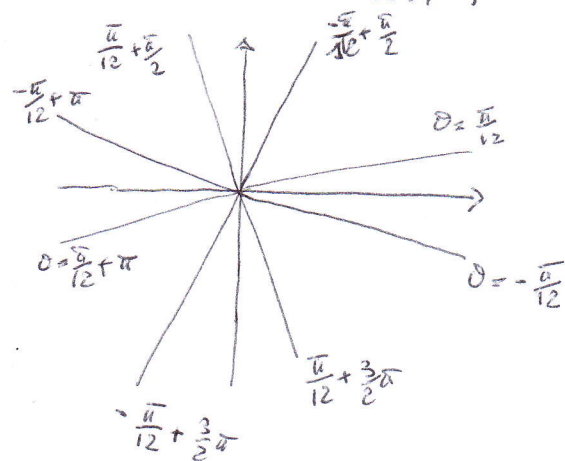
$$z_3 = \rho(\cos(\pm \frac{\pi}{12} + \frac{3}{2}\pi) + i \sin(\pm \frac{\pi}{12} + \frac{3}{2}\pi)) = -z_1$$

N.B. le soluzioni sono infinite perché $\rho > 0$

è arbitrario, quindi ad es. $\theta = \frac{\pi}{12}$

individua la semiretta del I° quadrante

che parte dall'origine e forma un angolo $= \frac{\pi}{12}$ con l'asse x .



2. Poiché la funzione radice n -esima con esponente dispari è definita in $\mathbb{R}$ e assume valori negativi se l'argomento è negativo, la disequazione da studiare diventa

$$\frac{\ln^2(x^2) + \ln|x| - 3}{\sqrt{x^2 - x} - x} < 0$$

Studio prima il Campo di esistenza e poi applico la regola del segno

$$C.E. \begin{cases} x^2 > 0 \\ |x| > 0 \\ x^2 - x \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - x} \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 0 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$C.E. = (-\infty, 0[\cup [1, +\infty)$$

$$N > 0 \quad \ln^2(x^2) + \ln|x| - 3 > 0 \Rightarrow (\ln x^2)^2 + \ln|x| - 3 > 0$$

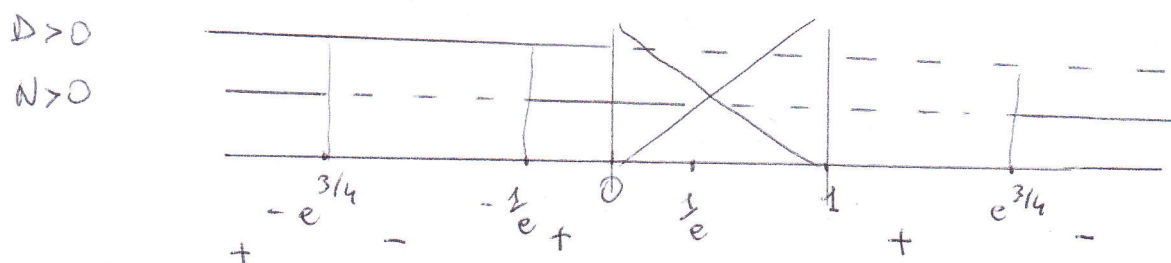
$$4 \quad \ln^2|x| + \ln|x| - 3 > 0 \quad (\ln|x|)_{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm 7}{8} = \frac{-1 \pm 7}{8} < \frac{3}{4} \quad \ln|x| < -1 \vee \ln|x| > \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 0 < x < e^{-1} \vee -e^{-1} < x < 0 \vee x < -e^{3/4} \vee x > e^{3/4}$$

$$D > 0 \quad \sqrt{x^2 - x} - x > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} > x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - x > x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$$

$x < 0 \quad \emptyset$



La disequazione è soddisfatta $\forall x \in]-e^{3/4}, -e^{-1}[\cup]e^{3/4}, +\infty)$

3. Poiché $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2$

$$(1+x^\alpha)^5 - 1 \sim 5x^\alpha$$

sostituendo nel limite si ha

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Più $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2} \sin^2 x}{(1+x^\alpha)^5 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{5x^\alpha}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6}}{5x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{30} \frac{x^3}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & 0 < \alpha < 3 \\ \frac{1}{30} & \alpha = 3 \\ +\infty & \alpha > 3 \end{cases}$$

trascurando infinitesimi di ordine superiore

il limite si può in realtà calcolare solo da destra poiché la funzione potenza con esponente reale $\alpha > 0$ è definita solo per $x \geq 0$.

4) $y = 2x\sqrt{2} - \ln|x^2-1|$ ID $|x^2-1| > 0 \Leftrightarrow x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ Non studio intersezioni con asse x e y positive perché servirebbe il metodo grafico.

La funzione non è né pari né dispari.

Lim $2x\sqrt{2} - \ln|x^2-1| = +\infty$
 $x \rightarrow 1$

Lim $2x\sqrt{2} - \ln|x^2-1| = +\infty$ $x = \pm 1$
 $x \rightarrow -1$ Asintotici

Lim $2x\sqrt{2} - \ln|x^2-1| = +\infty - \infty = +\infty$ per gli ordini essendo
 $x \rightarrow +\infty$ ord $\ln x < \text{ord } x = 1$

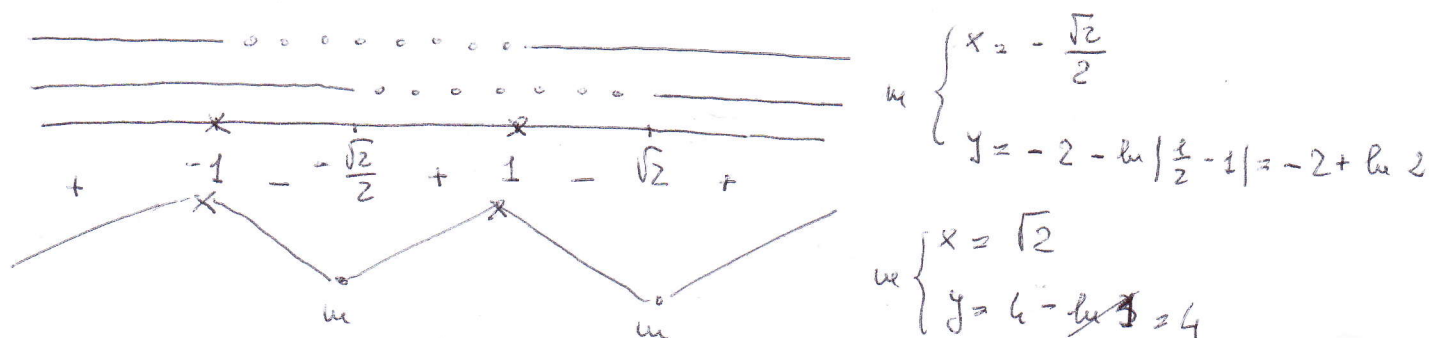
Lim $2x\sqrt{2} - \ln|x^2-1| = -\infty - \infty = -\infty$ $\nexists$ asintotici orizzontali
 $x \rightarrow -\infty$

Lim $\frac{2x\sqrt{2} - \ln|x^2-1|}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x\sqrt{2}}{x} = 2\sqrt{2}$ (eventuale coeff. angolare)
 x gli ordini

Lim $2x\sqrt{2} - \ln|x^2-1| - 2\sqrt{2}x = -\infty$ $\nexists$ asintot. obliqua $a \pm \infty$
 $x \rightarrow \pm\infty$

$y' = 2\sqrt{2} - \frac{1}{x^2-1} \cdot 2x \quad \forall x \neq \pm 1$

$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}x^2 - 2x - \sqrt{2}}{x^2-1} > 0$
 $N > 0 \quad x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > \sqrt{2}$
 $D > 0 \quad x < -1 \vee x > 1$

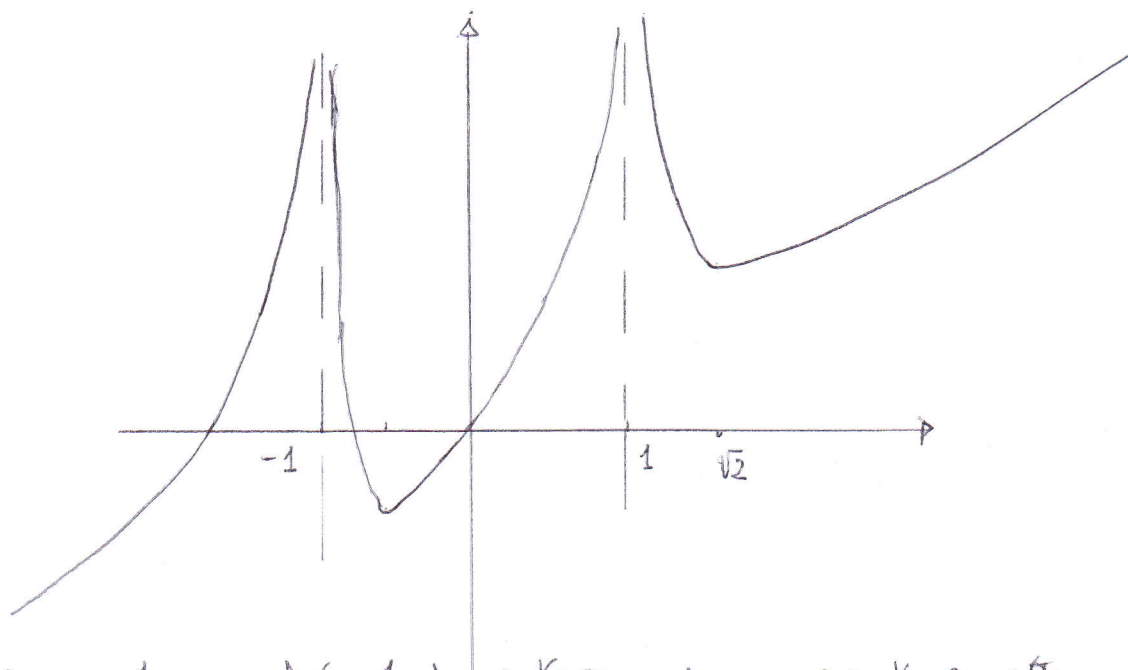


$y'' = D\left(2\sqrt{2} - \frac{2x}{x^2-1}\right) = -2 \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = 2 \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$

$y'' > 0 \quad \forall x \in \text{ID}$



$\nexists$ concavità in $(-\infty, -1[$, in $] -1, 1[$ e in $] 1, +\infty)$



5. Poiché $\frac{1}{(x-1)^2} = \Delta\left(-\frac{1}{x-1}\right)$ integrando per parti si ottiene

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} \arccos \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx = -\frac{1}{x-1} \arccos \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \int \frac{1}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4+x^2}}} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{4+x^2}}}{4+x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x-1} \arccos \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \int \frac{1}{x-1} \cdot \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} \cdot \frac{4+x^2-x^2}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$= -\frac{1}{x-1} \arccos \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}$$

$$\text{Poiché } \frac{1}{(x-1)^2(4+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + 4A-C}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C-B=0 \\ C=4A+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ C=B \\ B=-4B+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-\frac{1}{5} \\ C=\frac{1}{5} \\ B=\frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{si ha che}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+4)} dx = -\frac{1}{5} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{5} \int \frac{x+1}{x^2+4} dx$$

$$= -\frac{1}{5} \ln|x-1| + \frac{1}{10} \ln(x^2+4) + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + c$$

e quindi

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} \arccos \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} dx = -\frac{1}{x-1} \arccos \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{2}{5} \ln|x-1| - \frac{1}{5} \ln(x^2+4) + \frac{1}{5} \arctan \frac{x}{2} + c$$

6. Studio ID:

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ -1 \leq \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 1 \\ -\sqrt{4+x^2} \leq x \leq \sqrt{4+x^2} \end{cases}$$

$$x \leq \sqrt{4+x^2} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \vee \\ 4+x^2 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} x \geq 0 \\ 4+x^2 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$-\sqrt{4+x^2} \leq x \Rightarrow -x \leq \sqrt{4+x^2} \Rightarrow -x \leq 0 \vee \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2 \leq 4+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

Segue che f è definita $\forall x \neq 1$.

• In $(1, 2]$: f è continua ma $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} \arccos \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$ con ordine $2 > 1$ $\downarrow$
 $+\infty$ $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \neq 0$
 $\Rightarrow f$ non è integ. in s.i. in $(1, 2]$

• In $[2, 3]$ f è integrabile in senso classico perché continua in un intervallo chiuso e limitato

• In $[3, +\infty)$ f è continua e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{(x-1)^2}}_{\substack{\downarrow \\ 0 \\ \text{con ord } 2}} \underbrace{\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}_{\substack{\downarrow \\ \arccos 1 = 0}} = 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{con ordine } > 2 > 1$$

$\Rightarrow f$ integrabile in s.i. in $[3, +\infty)$.