

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

12 dicembre 2019

1. Risolvere e disegnare nel piano complesso le soluzioni della seguente equazione

$$z^2 + 3i\bar{z} + \frac{10}{(1-i)(2-i)} + 3i^{2017} = 0.$$

2. Studiare gli asintoti di

$$y = \frac{|x^2 - 1|}{x + 3} e^{-\frac{1}{x}}.$$

3. Studiare insieme di definizione della funzione

$$y = \lg_{0,5} \left(\frac{|x| - \sqrt{x^2 - x - 6}}{x^2 - 1} \right).$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{\arctan |x^2 - 2x|}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - 4e^{2x} + 5e^x - 2},$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in senso improprio in $]0, \frac{1}{2}]$ e in $[1, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché

$$\frac{10}{(1-i)(2-i)} = \frac{10}{2-2i-i+i^2} = \frac{10(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{10}{10}(1+3i) = 1+3i;$$

$$i^{2013} = i^{504 \cdot 4 + 1} = (i^4)^{504} \cdot i = 1 \cdot i = i$$

posto $z = a+ib$ e' equazione di Vieta

$$(a+ib)^2 + 3i(a-ib) + 1+3i + 3i = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2abi + 3ai + 3b + 1 + 6i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 + 3b + 1 = 0 \\ 2ab + 3a + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(-\frac{6}{2b+3}\right)^2 - b^2 + 3b + 1 = 0 \\ a = -\frac{6}{2b+3} \end{cases} (*)$$

Risolviendo la 1^a equazione si ottiene

$$4b^4 + 31b^2 + 39b + 45 = 0 \quad \text{Prova di soluzione.}$$

Per trovare le soluzioni di questa equazione, uso il metodo grafico, cioè disegno il grafico di $y = 4x^4 + 31x^2 + 39x + 45$ (per comodità diamo a x la variabile al posto di b) e poi deduco le intersezioni con $ax = 0$. Poiché

$$y' = 16x^3 + 62x + 39$$

$y' = 0$ può avere 1 o 3 radici reali, ma ne ha solo 1 poiché

$$y'' = 48x^2 + 62 > 0 \quad \forall x$$

e cioè la funzione è sempre convessa

osservo che $y'(0) = 39$, $y'(-1) = -39 \Rightarrow$ x.t. degli zero

$\exists x \in]-1, 0[\quad y'(x) = 0$ (per quanto detto prima $\exists 1$ radice di $y' = 0$)

Quindi $y''(x) > 0$

e dunque $x = x$ minimo assoluto

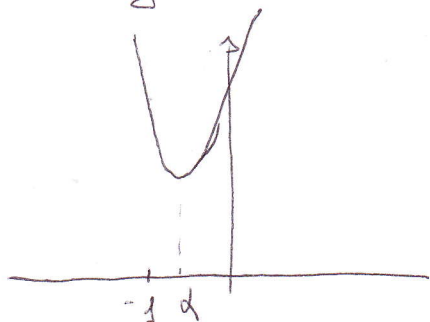
Dunque

$$4x^4 + 31x^2 + 39x + 45 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

cioè la eq. in b e quindi il sistema (*)

o equivalentemente l'equazione nel

camp. complesso non ammette soluzioni.



2. ID $\begin{cases} x+3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad ID = \mathbb{R} - \{-3, 0\}$

(2)

$\lim_{x \rightarrow -3^\pm} \frac{|x^2-1|}{x+3} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{8}{0^\pm} e^{-\frac{1}{3}} = \pm \infty \quad x = -3 \text{ As. Verticale}$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x^2-1|}{x+3} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{0^+}} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x^2-1|}{x+3} e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{0^-}} = +\infty \quad x = 0 \text{ As. Vert. solo a sinistra}$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x^2-1|}{x+3} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x e^{-\frac{1}{x}} = \pm \infty \quad \nexists \text{ as. orizzontali}$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{|x^2-1|}{x+3} e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2-1}{x^2+3x} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \quad (m)$

tolgo 1.1 perche' $x^2-1 > 0$ per $x < -1 \vee x > 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x^2-1|}{x+3} e^{-\frac{1}{x}} - x = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1-y^2}{y^2}}{\frac{1}{y}+3} e^{-y} - \frac{1}{y} =$
 tolgo 1.1
 pongo $y = \frac{1}{x}$

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1-y^2}{y^2}}{\frac{1}{y}+3} e^{-y} - \frac{1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left[\frac{(1-y^2)}{1+3y} e^{-y} - 1 \right] = e^{-y} \approx 1-y$

$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \frac{(1-y^2)(1-y) - 1 - 3y}{1+3y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1-y^2-y+y^3-1-3y}{y(1+3y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-4y}{y} = -4$

$y = x - 4$ as. obliquo a $-\infty$ e $+\infty$

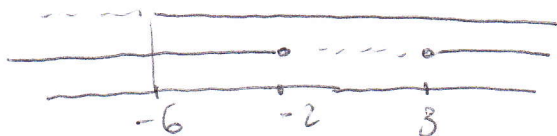
trascuri infinitesimi di ordine superiore

3. $\frac{|x| - \sqrt{x^2-x-6}}{x^2-1} > 0$

Studio prima ID delle frazioni e poi applico le regole del segno in ID

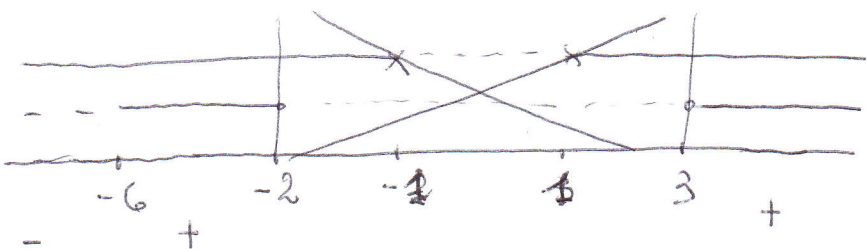
$x^2 - x - 6 \geq 0 \quad x_{1/2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{matrix} -2 \\ 3 \end{matrix} \quad x \leq -2 \vee x \geq 3$

$N > 0 \quad |x| > \sqrt{x^2-x-6} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0 \\ |x| \geq 0 \\ x^2 > x^2 - x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \vee x \geq 3 \\ \nexists x \in \mathbb{R} \\ x > -6 \end{cases}$



$$N > 0 \quad -6 < x \leq -2 \vee x \geq 3$$

$$D > 0 \quad x^2 - 4 > 0 \quad x < -2 \vee x > 2$$



$$ID = (-6; -2] \cup [3; +\infty)$$

4. $\arctan |x^2 - 2x| \geq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 2x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad ID = \mathbb{R}$

f non è né pari né dispari
 $\begin{cases} x=0 \\ y = \arctan 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ |x^2 - 2x| = 0 \Rightarrow x=0 \vee x=2 \end{cases}$
 $(0,0) \quad (2,0)$ intersezioni con gli assi
 $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \arctan |x^2 - 2x| = \frac{\pi}{2} \quad y = \frac{\pi}{2} \quad \text{As. orizz. a } \pm \infty$

$$y' = \frac{1}{2 \sqrt{\arctan |x^2 - 2x|}} \cdot \frac{1}{1 + (x^2 - 2x)^2} \cdot \frac{x^2 - 2x}{|x^2 - 2x|} \cdot (2x - 2)$$

$$ID(y'): \quad x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0, x \neq 2 \quad ID(y') = \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

Perché $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$:

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{2 \sqrt{\arctan (x^2 - 2x)}} \cdot \frac{1}{1 + (x^2 - 2x)^2} \cdot (x - 1) & x < 0 \vee x > 2 \\ - \frac{1}{\sqrt{\arctan (2x - x^2)}} \cdot \frac{1}{1 + (x^2 - 2x)^2} \cdot (x - 1) & 0 < x < 2 \end{cases}$$

quando

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \frac{1}{0^+} \cdot 1 \cdot (-1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = -\frac{1}{0^+} \cdot 1 \cdot (-1) = +\infty$$

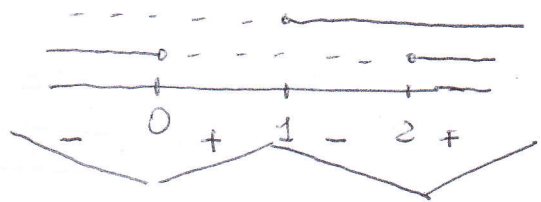
$x=0$ pto cuspidale

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y' = -\frac{1}{0^+} \cdot 1 \cdot 1 = -\infty$$

$x=2$ pto cuspidale

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y' = +\frac{1}{0^+} \cdot 1 \cdot 1 = +\infty$$

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x)(x - 1) \geq 0$$

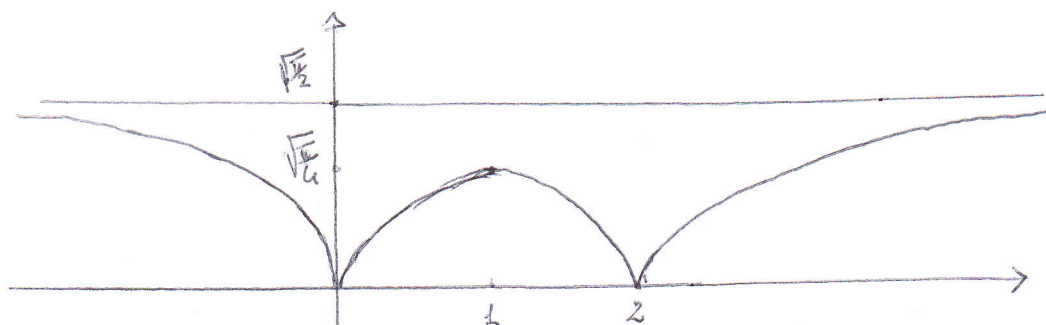


$$u \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$u \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

$$M \begin{cases} x=1 \\ y=\sqrt{\arccos 1} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

(4)



$$5. \quad i) \int \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - 4e^{2x} + 5e^x - 2} dx = \int \frac{t^3 + 1}{t^3 - 4t^2 + 5t - 2} \cdot \frac{1}{t} dt =$$

$$e^x = t$$

$$x = \ln t$$

$$dx = \frac{1}{t} dt$$

Decompongo $t^3 - 4t^2 + 5t - 2$: pido $t=1$ annullo il polinomio

diviso con metodo di Ruffini per $t-1$:

$$t^3 - 4t^2 + 5t - 2 = (t-1)(t^2 - 3t + 2) = (t-1)^2(t-2)$$

1	-4	5	-2
1		-3	2
1	-3	2	0

$$\frac{t^3 + 1}{t(t^3 - 4t^2 + 5t - 2)} = \frac{t^3 + 1}{t(t-1)^2(t-2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-2} + \frac{D}{t-1}$$

$$= \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t-2} - \frac{D}{(t-1)^2}$$

$$= \frac{A(t-1)^2(t-2) + Bt(t-1)(t-2) + Ct(t-1)^2 - Dt(t-2)}{t(t^3 - 4t^2 + 5t - 2)}$$

Posso $t^3 + 1 = A(t-1)^2(t-2) + Bt(t-1)(t-2) + Ct(t-1)^2 - Dt(t-2)$

Per $t=0$: $1 = -2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

$t=1$: $2 = D \Rightarrow D = 2$

$t=2$: $9 = 2C \Rightarrow C = \frac{9}{2}$

sostituendo i valori delle 3 costanti si ha

$$t^3 + 1 = -\frac{1}{2}(t-1)^2(t-2) + Bt(t-1)(t-2) + \frac{9}{2}t(t-1)^2 - 2t(t-2)$$

Per $t=-1$ ottengo

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot (-3) + 2B(-3) - \frac{9}{2} \cdot 4 - 6 \Rightarrow 0 = 6 - 6B - 18 - 6 \Rightarrow B = -3.$$

$$\int \frac{t^3 + 1}{t(t-1)^2(t-2)} dt = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{t} - \frac{3}{t-1} + \frac{9/2}{t-2} + \frac{d}{dt} \frac{2}{t-1} \right) dt =$$

$$-\frac{1}{2} \ln|t| - 3 \ln|t-1| + \frac{9}{2} \ln|t-2| + \frac{2}{t-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln e^x - 3 \ln(e^x - 1) + \frac{9}{2} \ln|e^x - 2| + \frac{2}{e^x - 1} + C$$

$$= -\frac{1}{2} x - 3 \ln(e^x - 1) + \frac{9}{2} \ln|e^x - 2| + \frac{2}{e^x - 1} + C.$$

ii) Prima di tutto studio ID della funzione:

$$e^{3x} - 4e^{2x} + 5e^x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)^2(e^x - 2) \neq 0$$

$$\begin{cases} e^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \\ e^x \neq 2 \Rightarrow x \neq \ln 2 \end{cases} \quad \text{ID}(f) = \mathbb{R} - \{0, \ln 2\}$$

Osservo che $\frac{1}{2} < \ln 2 \Leftrightarrow 1 < 2 \ln 2 \Leftrightarrow 1 < \ln 4 \Leftrightarrow e < 4$

dunque f è continua in $]0, \frac{1}{2}]$ e vero

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + 1}{(e^x - 1)^2(e^x - 2)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

con ordine di infinito = ordine di infinitesimo di $(e^x - 1)^2 = 2 > 1$

$\Rightarrow f$ non è integrab. in $]0, \frac{1}{2}]$.

Giusece f è cont. in $[1, +\infty)$ con

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 1}{e^{3x} - 4e^{2x} + 5e^x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{e^{3x}} = 1 \neq 0$$

$\Rightarrow f$ non è integr. in s.l. in $[1, +\infty)$.