

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

6 novembre 2019

1. Risolvere e disegnare nel piano complesso le soluzioni della seguente equazione

$$z \operatorname{Im} z = (\bar{z} + 1)^2 - 2i^5 + 2i^{81}.$$

2. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) (\cot \pi x).$$

3. Studiare insieme di definizione e segno della funzione

$$y = \lg_{0,5} \left(\arccos \sqrt{\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x + 2}} \right).$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{(\ln |x| - 1)^2} - \sqrt[3]{(\ln |x| + 1)^2}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{(x+1)(\ln^3 x + \ln x)}{x},$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se g è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

Soluzioni

1. Posto $z = a + ib$, poiché $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^{81} = (i^4)^{20} \cdot i = i$
 l'equazione diventa

$$(a+ib)b = (a-ib+1)^2 - 2i + 2b \Leftrightarrow$$

$$ab + ib^2 = (a+1)^2 + i^2 b^2 + 2(a+1)ib \Leftrightarrow$$

$$ab + b^2 - (a+1)^2 + i(b^2 + 2(a+1)b) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ab + b^2 - (a+1)^2 = 0 \\ b^2 + 2(a+1)b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 = 0 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -2a(1+a) + 4(1+a)^2 = (a+1)^2 \\ b = -2(1+a) \end{cases}$$

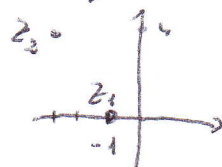
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3(a+1)^2 + 2a(a+1) = 0 \\ b = -2(1+a) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} (a+1)(3(a+1) + 2a) = 0 \\ b = -2(1+a) \end{cases} \quad (\text{posso semplificare} \\ \text{dividendo per } a+1 \neq 0$$

perché il caso $a+1=0$
 si è già considerato)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -3 \\ b = 4 \end{cases}$$

$z_1 = -1$ e $z_2 = -3 + 4i$ sono le uniche sol dell'equazione



$$2. \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x) \frac{\cos \pi x}{\sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x} \cdot \cos \pi x = - \frac{1}{\pi} \cdot (-1) = \frac{1}{\pi} \text{ essendo}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x} \stackrel{x-1=y}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{\sin(\pi y + \pi)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{-\sin \pi y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{-\pi y}.$$

per gli ordini

$$3. \arccos \sqrt{\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x + 2}} > 0 \Leftrightarrow -1 \leq \sqrt{\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x + 2}} < 1 \Leftrightarrow$$

sempre vero se il radicando ≥ 0

(2)

$$\begin{cases} \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} \geq 0 & \textcircled{1} \\ \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} < 1 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$N \geq 0 \quad x \leq 0 \vee x \geq 5$
 $D > 0 \quad x < 1 \vee x > 2$

$$\frac{x^2-5x - (x^2-3x+2)}{x^2-3x+2} < 0 \quad \frac{2(x+1)}{x^2-3x+2} > 0$$

$$\begin{cases} 1^\circ x \leq 0 \vee 1 < x < 2 \vee x \geq 5 \\ 2^\circ \begin{cases} N > 0 & x > -1 \\ D > 0 & x < 1 \vee x > 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \vee 1 < x < 2 \vee x \geq 5 \\ -1 < x < 1 \vee x > 2 \end{cases}$$

$ID =]-1, 0] \cup [5, +\infty)$

Per studiare il segno, pongo

$$\lg_{0.5} \arccos \sqrt{\frac{x^2-5x}{x^2-3x+2}} > 0 \Leftrightarrow 0 < \arccos \sqrt{\frac{x^2-5x}{x^2-3x+2}} < 1$$

$\downarrow$
 $\forall x \in ID$

$$\Leftrightarrow \cos \sqrt{\frac{x^2-5x}{x^2-3x+2}} \leq 1$$

$\Leftrightarrow \forall x \in ID$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2-5x}{x^2-3x+2} \geq \cos^2 1 \\ x \in ID \end{cases}$$

Poiché $\cos 1$ non è un valore esatto, usiamo quindi con i conti.

4. $ID: |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \quad ID = \mathbb{R}^+$

$$f(-x) = f(x)$$

Per $x > 0$

Studio per $x > 0$ e poi ribalto il grafico rispetto all'asse y.

$$y = \sqrt[3]{(\ln x - 1)^2} - \sqrt[3]{(\ln x + 1)^2}$$

$$y = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)^2 = (\ln x + 1)^2 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (1, 0)$$

$$y > 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)^2 > (\ln x + 1)^2 \Leftrightarrow 4 \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{(\ln x - 1)^2} - \sqrt[3]{(\ln x + 1)^2} = +\infty - \infty ?$$



$$\begin{aligned} \ln x = y \\ = \lim_{y \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{(y-1)^2} - \sqrt[3]{(y+1)^2} &= \lim_{y \rightarrow -\infty} y^{\frac{2}{3}} \left[\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} y^{\frac{2}{3}} \left[\frac{\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{\frac{1}{y}} + \frac{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{\frac{1}{y}} \right] \cdot \frac{1}{y} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow -\infty} y^{-\frac{1}{3}} \left[\underbrace{-\frac{\left(1 - \frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{\frac{1}{y}}}_{\downarrow -\frac{2}{3}} + \underbrace{\frac{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{\frac{1}{y}}}_{\downarrow +\frac{2}{3}} \right] = 0 \cdot 0 = 0$$

f non ha
as. verticale
ma si può in $x=0$
prolungare x continue.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{(\ln x - 1)^2} - \sqrt[3]{(\ln x + 1)^2} = +\infty - \infty$$

$$= \lim_{y = \ln x} \lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{(y-1)^2} - \sqrt[3]{(y+1)^2} = 0 \quad \text{regolando come sopra}$$

$y=0$ As. obliq. a $+\infty$.

$$\begin{aligned} y' &= D \left[(\ln x - 1)^{\frac{2}{3}} - (\ln x + 1)^{\frac{2}{3}} \right] = \frac{2}{3} (\ln x - 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{3} (\ln x + 1)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} \left[\frac{1}{\sqrt[3]{\ln x - 1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x + 1}} \right] \end{aligned}$$

$ID(y')$: $\ln x \neq 1 \wedge \ln x \neq -1$
 $x \neq 0 \wedge x \neq e, x \neq e^{-1}$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^+} y' = \frac{2}{3} e \left[\frac{1}{\sqrt[3]{-2}} + \infty \right] = +\infty$$

Perché $f'_+(e^{-1}) = -\infty$
 $f'_-(e^{-1}) = +\infty$

$$\begin{cases} x = e^{-1} \\ y = +\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

pt. cuspidale ascendente

Analogamente

(4)

$$\lim_{x \rightarrow e^{\pm}} y' = \frac{2}{3e} \left[\pm \infty - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right] = \pm \infty$$

$$\begin{cases} x = e \\ y = \sqrt[3]{-4} \end{cases} \quad \begin{matrix} pto \text{ cuspidale} \\ discendente \end{matrix}$$

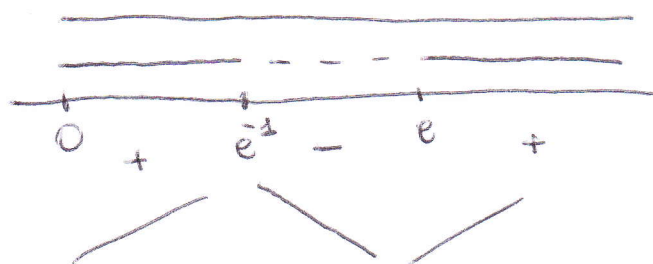
$$f'_+(e) = +\infty \quad f'_-(e) = -\infty$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x - 1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{\ln x + 1}} > 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{\ln x + 1} - \sqrt[3]{\ln x - 1}}{\sqrt[3]{\ln^2 x - 1}} > 0$$

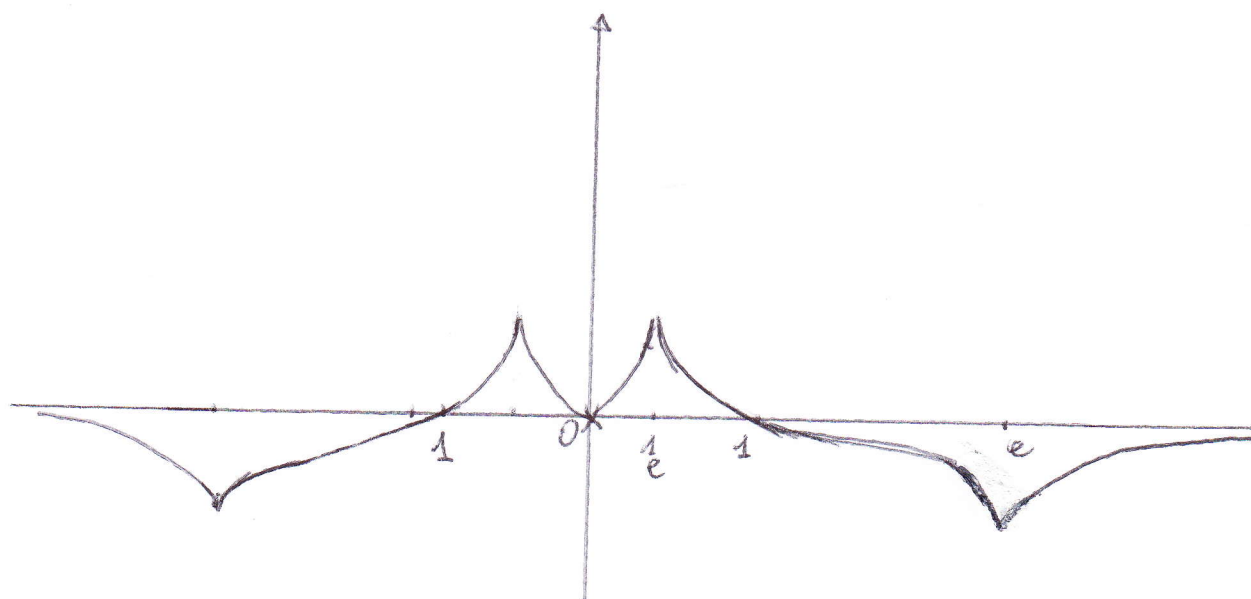
$$N > 0 \quad \sqrt[3]{\ln x + 1} > \sqrt[3]{\ln x - 1} \quad +1 > -1 \quad \forall x > 0$$

$$D > 0 \quad \sqrt[3]{\ln^2 x - 1} > 0 \quad \ln x < -1 \vee \ln x > 1$$

$$0 < x < e^{-1} \vee x > e$$



$$M \quad \begin{cases} x = e^{-1} \\ y = \sqrt[3]{4} \end{cases} \quad m \quad \begin{cases} x = e \\ y = -\sqrt[3]{4} \end{cases}$$



$$5. c) \int \left(\frac{x+1}{x} \right) (\ln^3 x + \ln x) dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) (\ln^3 x + \ln x) dx$$

$$= \int (1 dx) (\ln^3 x + \ln x) dx + \int \frac{1}{x} (\ln^3 x + \ln x) dx$$

$$= x(\ln^3 x + \ln x) - \int x \left(\frac{3\ln^2 x + 1}{x} \right) dx + \frac{\ln^4 x}{4} + \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$= x(\ln^3 x + \ln x) - x(3\ln^2 x + 1) + \int x \cdot \frac{6\ln x}{x} dx + \frac{\ln^4 x}{4} + \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$= x(\ln^3 x + \ln x - 3\ln^2 x - 1) + 6x\ln x - 6 \int dx + \frac{\ln^4 x}{4} + \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

$$= x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 7\ln x - 7) + \frac{\ln^4 x}{4} + \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

ii) Poiché $ID =]0, +\infty)$ la funzione è continua in $[0, 1]$ e in $[1, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)(\ln^3 x + \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\downarrow +\infty \text{ con ord. } 1} \underbrace{(\ln^3 x + \ln x)}_{\downarrow +\infty \text{ con ord. } 3} = +\infty$$

con ordine $> 1 \Rightarrow$

la funzione non è integrabile in $]0, 1]$.

$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}_{\downarrow 1} \underbrace{(\ln^3 x + \ln x)}_{\downarrow +\infty} = +\infty \Rightarrow \text{funz. non integrabile in } [1, +\infty).$$