

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

14 ottobre 2019

1. Risolvere e disegnare nel piano complesso le soluzioni della seguente equazione

$$\operatorname{Re} [(z+1)^2] = i(z\bar{z}+1) - 2i^5.$$

2. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \log_x(x+2)$ nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

3. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \sqrt{\frac{\arccos|x^2-1| - \arccos(x^2-1)}{x^x}}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x - 6}{x+2}}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Calcolare

$$\int e^{3x} \sin 2x dx.$$

6. Data la funzione

$$g(x) = \frac{\log x}{\log(x^2 - 2x + 2)}$$

dire se è integrabile in senso improprio in $]0, \frac{1}{2}]$, in $[\frac{1}{2}, 1[$ e in $[2, +\infty[$.

Solgimento

1. Posto $z = a+ib$: $\operatorname{Re}(z+1)^2 = \operatorname{Re}(a+1+ib)^2 =$

$$\operatorname{Re}((a+1)^2 - b^2 + 2ib(a+1)) = (a+1)^2 - b^2;$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2; \quad i^5 = i^4 \cdot i = i$$

quindi l'equazione diventa

$$(a+1)^2 - b^2 = i(a^2 + b^2 + 1) - 2i \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)^2 = b^2 \\ a^2 + b^2 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b^2 = (a+1)^2 \\ a^2 + (a+1)^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = (a+1)^2 \\ 2a^2 + 2a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 1 \\ a = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{Dunque l'eq. ha 3 soluzioni: } \pm i, -1.$$

2. L'eq. della retta tangente a f_f in $(x_0, f(x_0))$ è

$$t: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Nel nostro caso $f(x_0) = f(2) = \lg_2 4 = 2$

$$f'(x) = \Delta \frac{\lg(x+2)}{\lg x} = \frac{\frac{1}{x+2} \lg x - \frac{1}{x} \lg(x+2)}{\lg^2 x}$$

$$f'(2) = \frac{\frac{1}{4} \lg 2 - \frac{1}{2} \lg 4}{\lg^2 2} = \frac{\lg 2 - 2 \lg 4}{4 \lg^2 2} = \frac{\lg 2 - 4 \lg 2}{4 \lg^2 2} = -\frac{3 \lg 2}{4 \lg^2 2} = -\frac{3}{4 \lg 2}$$

Dunque $t: y - 2 = -\frac{3}{4 \lg 2} (x - 2)$ cioè $y = -\frac{3}{4 \lg 2} x + \frac{3}{2 \lg 2} + 2$

3. $\frac{\arccos|x^2-1| - \arccos(x^2-1)}{x^x} \geq 0$

Studio dominio della frazione e poi applico la regola del segno

$$\begin{cases} -1 \leq |x^2-1| \leq 1 \\ -1 \leq x^2-1 \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x^2-1 \leq 1 \\ -1 \leq x^2-1 \leq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 2 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Delta =]0, \sqrt{2}]$$

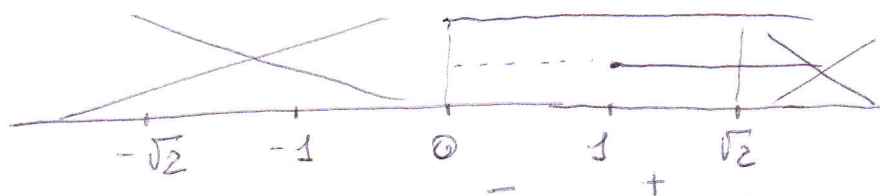
(2)

$$N \geq 0 \quad \arccos |x^2 - 1| \geq \arccos (x^2 - 1) \Leftrightarrow \text{poiché } \arccos \text{ è decrescente}$$

$$\begin{cases} |x^2 - 1| \leq x^2 - 1 \\ -1 \leq x^2 - 1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq -1 \vee 1 \leq x \leq \sqrt{2}$$

$$D > 0 \quad x^x > 0 \Leftrightarrow e^{\lg x} > 0 \quad \forall x > 0$$



Applico regole del segno solo nel Dom > 0 delle fr.

La funzione è definita in $ID = [1, \sqrt{2}]$.

4. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x - 6}{x + 2}}$ $ID = \mathbb{R} - \{-2\}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt[3]{3} \end{cases}$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 6 = 0 \quad x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}$
 $(0, -\sqrt[3]{3}) \quad (\frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}, 0)$ intersezione di f_p con gli assi

Positivare: $f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x - 6}{x + 2} > 0$

$$N > 0 \quad x < \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \vee x > \frac{3 + \sqrt{33}}{2}$$

$$D > 0 \quad x > -2$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in]-2, \frac{3 - \sqrt{33}}{2}[\cup] \frac{3 + \sqrt{33}}{2}, +\infty)$$

Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x - 6}{x + 2}} = \sqrt[3]{\frac{4}{0^\pm}} = \pm \infty$$

$x = -2$ A. Vert. completo

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{\frac{x^2 - 3x - 6}{x + 2}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt[3]{x} = \pm \infty \quad \nexists \text{ as. obliq.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = 0 \quad \nexists \text{ as. oblique}$$

$$y' = \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-3x-6}{x+2}\right)^2}} \cdot \frac{(2x-3)(x+2) - (x^2-3x-6)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-3x-6}{x+2}\right)^2} (x+2)^2}$$

$$ID(y') = \begin{cases} x+2 \neq 0 \\ 3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-3x-6}{x+2}\right)^2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2} \end{cases}$$

$$ID(y') = ID(y) - \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{33}}{2} \right\}$$

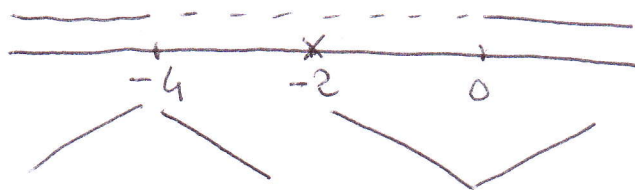
$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow \frac{3-\sqrt{33}}{2}} y' = \frac{\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\right)}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3+\sqrt{33}}{2}} y' = \frac{(3+\sqrt{33})^2 + 4\left(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\right)}{0^+} = +\infty$$

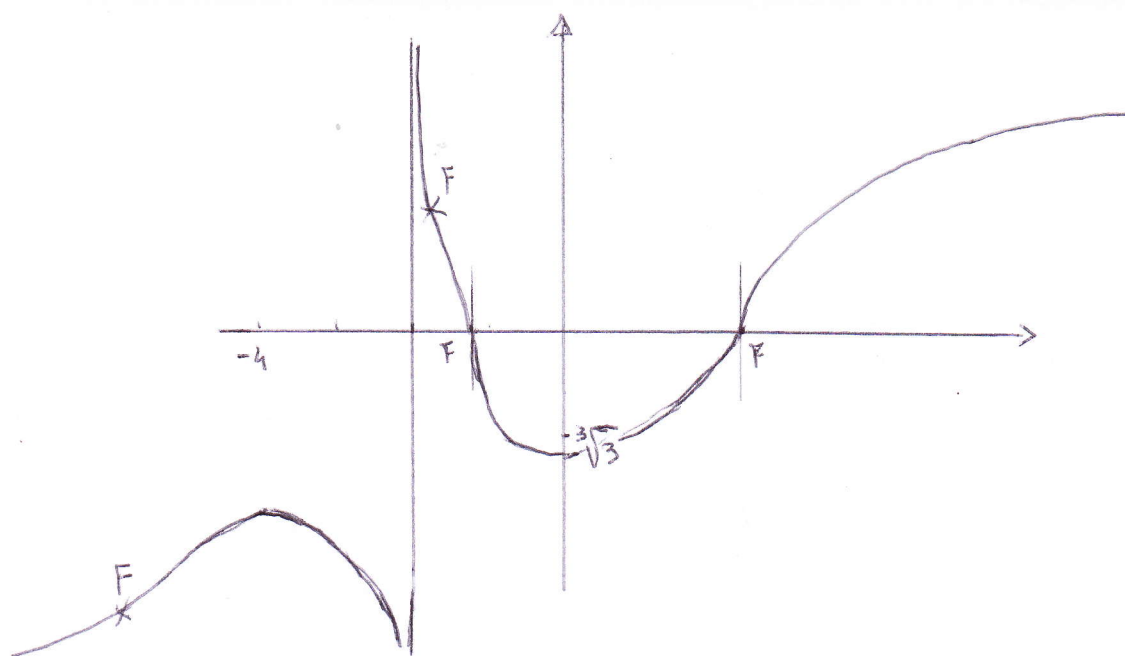
3 pli $\left(\frac{3 \pm \sqrt{33}}{2}, 0\right)$ sono punti di flesso a tangente verticale.

Monotonie

$$y' > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+4x}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{x^2-3x-6}{x+2}\right)^2} (x+2)^2} > 0 \Leftrightarrow x^2+4x > 0 \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 0$$



Non studio $y'' > 0$ perché troppo lungo, ma a posteriori si evince che, oltre ai due flessi a tangente verticale la funzione ha un terzo flesso di ascissa compresa tra -2 e $\frac{3-\sqrt{33}}{2}$. Dopo il plo di flesso $\frac{3+\sqrt{33}}{2}$ la funzione si manterrà concava poiché per $x \rightarrow +\infty$ $f(x) \sim \sqrt[3]{x}$ e per lo stesso motivo prima del plo di massimo relativo $\left(2, \frac{\sqrt{11}}{2}\right)$ la funzione sarà concava poiché per $x \rightarrow -\infty$ la funzione sarà concava come $\sqrt[3]{x}$.



$$\begin{aligned}
 5. \int e^{3x} \sin 2x dx &= \int \left(\frac{1}{3} e^{3x} \right) \sin 2x dx \stackrel{p.p.}{=} \frac{e^{3x}}{3} \sin 2x - \int \frac{e^{3x}}{3} \cdot 2 \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{3} \int \left(\frac{1}{3} e^{3x} \right) \cos 2x dx = \frac{1}{3} e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{3} \left(\frac{e^{3x}}{3} \cos 2x + \int \frac{e^{3x}}{3} 2 \sin 2x dx \right) \\
 \Rightarrow (1 + \frac{4}{9}) \int e^{3x} \sin 2x dx &= \frac{1}{3} e^{3x} \sin 2x - \frac{2}{9} e^{3x} \cos 2x + C
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int e^{3x} \sin 2x dx = \frac{9}{13} \left(\frac{3 \sin 2x - 2 \cos 2x}{9} \right) e^{3x} + C = \frac{e^{3x} (3 \sin 2x - 2 \cos 2x)}{13} + C$$

6. La g é definida por $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x + 2 > 0 \\ \lg(x^2 - 2x + 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{ID} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

Poiché g é continua in $]0, \frac{1}{2}]$ e

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg x}{\lg(x^2 - 2x + 2)} = \frac{1}{\lg 2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \lg x = -\infty \quad \text{con ord. con. prob.}$$

eq. $\sim x^\alpha$ con $0 \leq \alpha < 1$

segue che g é integrabile in s.i. in $]0, \frac{1}{2}]$.

Poiché g é continua in $[\frac{1}{2}, 1[$ e da

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lg x}{\lg(x^2 - 2x + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\lg(x-1+1)}{\lg((x-1)^2 + 1)} \stackrel{y=x-1}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\lg(1+y)}{\lg(1+y^2)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{y^2} \\
 &= -\infty \quad \text{con ord. 1} \Rightarrow g \text{ non é integ. in s.i. in } [\frac{1}{2}, 1[.
 \end{aligned}$$

Infine g non é integr. in $[2, +\infty[$ essendo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg x}{\lg(x^2 - 2x + 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg x}{\lg x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg x}{2 \lg x + \lg(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2})} = \frac{1}{2} \neq 0.$$