

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

17 settembre 2019

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$z^4 + (3 - 2i)z^2 = 6i.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - x^2 + 2x^3}{x^4 + e^{x^4} - 1}.$$

3. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{e^{2x} - 8e^x + 15} + 4 \leq \sqrt{e^{2x} + e^x - 2}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x-2)\sqrt{|x^2-4|}}{x+2}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{\arctan x}{x^\alpha}$$

- i) calcolare l'integrale indefinito per $\alpha = \frac{3}{2}$;
ii) studiare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, l'integrabilità in senso improprio in $]0, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z^2 = t$ l'equazione diventa $t^2 + (3-2i)t - 6i = 0$

Poiché $\Delta = (3-2i)^2 + 24i = 3^2 + 4i^2 + 12i = (3+2i)^2$ Al Re

$$t_{1/2} = \frac{-(3-2i) \pm (3+2i)}{2} = \begin{cases} -3 \\ 2i \end{cases} \text{ e quindi}$$

$$z^2 = -3 \Rightarrow z_{1/2} = \pm i\sqrt{3}$$

$$z^2 = 2i \Rightarrow z = \sqrt{2i} = \sqrt{2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2}\right)$$

e quindi $z_{3/4} = \pm \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm(1+i)$ $k \in \{0, 1\}$

L'equazione ha 4 radici complesse date da $\pm i\sqrt{3}, \pm(1+i)$.

2. Poiché $\ln^2(1+x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 \approx x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}$ per $x \rightarrow 0$
 $e^x = 1 + x + o(x^2) \Rightarrow e^x \approx 1 + x^4$

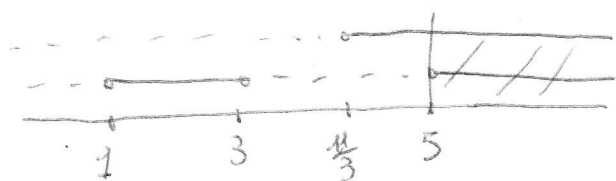
il limite diventa $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x^2} - x^3 + \frac{x^4}{4} - \cancel{x^2} + 2x^3}{x^4 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + \cancel{\frac{x^4}{4}}}{2x^4}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \nexists$ essendo $\lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{1}{2x} = \pm \infty$.

3.
$$\begin{cases} e^{2x} - 8e^x - 15 \geq 0 \\ e^{2x} + e^x - 8 \geq 0 \\ \left(\sqrt{e^{2x} - 8e^x - 15} + 4\right)^2 \leq \left(\sqrt{e^{2x} + e^x - 8}\right)^2 \end{cases} \begin{cases} e^x \leq 3 \vee e^x \geq 5 \\ e^x \leq -2 \vee e^x \geq 1 \\ \cancel{e^{2x} - 8e^x - 15 + 4 + 8\sqrt{e^{2x} - 8e^x - 15}} \leq \cancel{e^{2x} + e^x - 8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^x \leq 3 \vee e^x \geq 5 \\ e^x \geq 1 \\ 8\sqrt{e^{2x} - 8e^x - 15} \leq 9e^x - 33 \end{cases} \begin{cases} 1 \leq e^x \leq 3 \vee e^x \geq 5 \\ e^x \geq \frac{33^{11}}{83} \\ 64(e^{2x} - 8e^x - 15) \leq 81e^{2x} - 18 \cdot 33e^x + 33^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \leq e^x \leq 3 \vee e^x \geq 5 \\ e^x \geq \frac{11}{3} \\ 17e^{2x} - 82e^x + 129 > 0 \end{cases} \quad \Delta < 0 \quad \forall x$$



$$e^x \geq 5 \Rightarrow x \geq \ln 5$$

4. ID: $x+2 \neq 0 \quad x \neq -2$ $\neq$ ne pari ne dispari

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ (x-2)\sqrt{|x^2-4|} = 0 \end{cases} \Rightarrow x=2 \vee x=-2 \text{ (non acc.)}$$

$(0, -2)$ $(2, 0)$ intersec. con assi

$$y \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} \sqrt{|x^2-4|} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 2$$

Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+2} \sqrt{|x^2-4|} = \frac{0}{0} =$$



$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x-2)\sqrt{|x+2|}\sqrt{|x+2|}}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

(il numeratore va a 0 con ord $\frac{1}{2}$
il denomin. con ord 1 e il segno
della funzione è negativo a destra)

$$x = -2 \text{ A.V.} \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \underbrace{\frac{x-2}{x+2}}_1 \cdot \underbrace{\sqrt{|x^2-4|}}_{+\infty} = +\infty \quad \text{A. As. orizz.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-2}{x+2} \frac{\sqrt{|x^2-4|}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \underbrace{\frac{x-2}{x+2}}_1 \cdot \frac{\sqrt{|x^2-4|}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1 \text{ (in)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+2} \sqrt{|x^2-4|} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+2} \sqrt{x^2-4} - x =$$

$$x^2-4 > 0 \Leftrightarrow x < -2 \vee x > 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+2} x \left(\left(1 - \frac{4}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{x-2}{x+2}}_1 \cdot x \cdot \left(-\frac{4}{x^2} \right) = 0 \quad (9)$$

$$y = x \quad \text{As. ob. a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+2} \sqrt{|x^2-4|} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+2} \cdot \sqrt{x^2-4} + x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x+2} (-x) \left(\left(1 - \frac{4}{x^2} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} - \frac{x-2}{x+2} \left(-\frac{4}{x} \right) = 0 \quad (9)$$

$y = -x$ As. ob. $x \rightarrow -\infty$

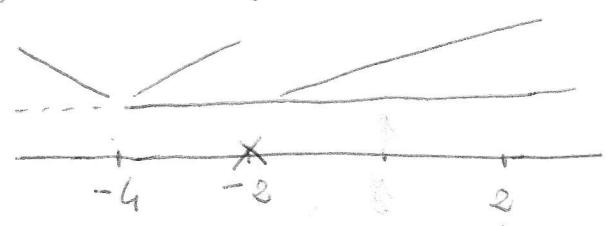
$$y' = D \left(\frac{x-2}{x+2} \sqrt{|x^2-4|} \right) = \frac{x+2-x+2}{(x+2)^2} \sqrt{|x^2-4|} + \frac{x-2}{x+2} \cdot \frac{1}{\cancel{x} \sqrt{|x^2-4|}} \cdot \frac{x-2}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}$$

$$= \frac{4}{(x+2)^2} \sqrt{|x^2-4|} + \frac{x(x-2)^2}{\sqrt{|x^2-4|} |x^2-4|} = \frac{4|x^2-4|^2 + x(x-2)^2(x+2)^2}{(x+2)^2 \sqrt{|x^2-4|} |x^2-4|}$$

$$= \frac{(x^2-4)^2 (4+x)}{(x+2)^2 \sqrt{|x^2-4|} |x^2-4|}$$

$$ID(y') = ID(y) - \{2\}$$

$y' > 0 \Leftrightarrow 4+x > 0 \quad x > -4$
 $in (-4, 6\sqrt{3})$

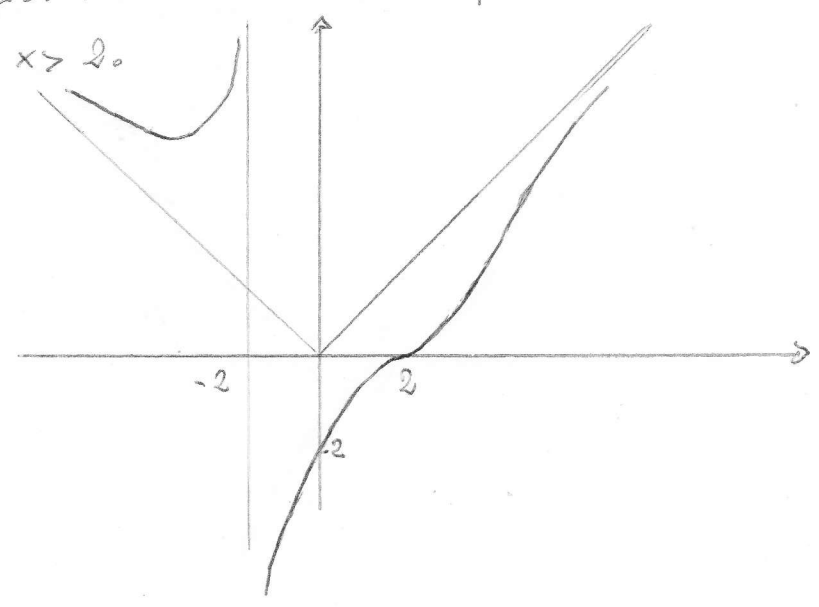


Perche

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} y' = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2-4)^2 (4+x)}{(x+2)^2 \sqrt{x^2-4} (x^2-4)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)(4+x)}{\sqrt{x-2} \sqrt{x+2} (x+2)^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y' = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2-4)(4+x)}{(x+2)^2 \sqrt{-x^2+4}} = 0 \quad \text{pu gli ordini} \quad x \text{ ordin}$$

f è derivabile in $x=2$ con $y'(2)=0$. Dunque f ha un pt. di flesso a tangente orizzontale in $x=2$ e quindi necessariamente ha un altro flesso per $x > 2$.



5. i) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}} dx = \int \Delta \left(\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \right) \operatorname{arctg} x dx =$

$-\frac{2}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x + 2 \int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}} dx$

Nell' integrale sostituisco
 $\sqrt{x} = t \quad x = t^2 \quad dx = 2t dt$

$\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{x}} dx = \int \frac{2t}{(1+t^4)t} dt = 2 \int \frac{dt}{t^4+1} = 2 \int \frac{dt}{\underbrace{t^4+1+2t^2-2t^2}_{(t^2+1)^2-(\sqrt{2}t)^2}}$
 $= 2 \int \frac{dt}{(t^2+\sqrt{2}t+1)(t^2-\sqrt{2}t+1)} = 2 \int \left(\frac{At+B}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{Ct+D}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right) dt$

Facciamo i conti e applicando il principio di identità dei polinomi si ha

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=0 \\ A-\sqrt{2}B+\sqrt{2}D+C=0 \\ B+D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B = \frac{1}{2} \\ D = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{2t+2\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t+1} - \frac{2t-2\sqrt{2}}{t^2-\sqrt{2}t+1} \right) dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\lg(t^2+\sqrt{2}t+1) + \int \frac{2\sqrt{2}}{(t+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} dt \right.$
 $\left. + \lg(t^2-\sqrt{2}t+1) + \int \frac{2\sqrt{2}}{(t-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}} dt \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\lg \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \int \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t+1)^2+1} dt \right.$
 $\left. + \int \frac{4\sqrt{2}}{(\sqrt{2}t-1)^2+1} dt \right] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\lg \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + 4 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1) + 4 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1) \right] + C$

Dunque $I = -\frac{2}{\sqrt{x}} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2\sqrt{2}} \lg \frac{t^2+\sqrt{2}t+1}{t^2-\sqrt{2}t+1} + \sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t+1) + \sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t-1) + C.$

ii) Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ +\infty & \text{con ord } \alpha-1 \text{ se } \alpha > 1 \end{cases}$

f è integ. in un intorno destro di 0 se $\alpha-1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < 2.$

Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\alpha} = 0$ con ord. α , f è integ. in un intorno di $+\infty$

se $\alpha > 1$. Conclusione: f è integ. in s.i. in $[0, +\infty)$ se esiste

$\begin{cases} \alpha < 2 \\ \alpha > 1 \end{cases}$ cioè $1 < \alpha < 2$. Negli altri casi $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty.$