

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

16 luglio 2019

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$i \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z^2) = z\bar{z} + (i\sqrt{3} + 1)^3.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x - \sin x)^{\frac{1}{x}} - 1}{(1 + x)^{\ln x} - x^x}.$$

3. Risolvere la disequazione

$$3 \cdot 2^x - 1 \leq \sqrt{9 \cdot 4^x - 2^{x+1} - 7}.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = (x - 1) \frac{\ln |x - 1|}{\ln |x - 1| - 1}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x - \ln x}{(x + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$ e in $[1, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = x + iy$ si ha $\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Re}(x^2 - y^2 + 2xyi) = x^2 - y^2$
 $|z|^2 = x^2 + y^2$

$$(i\sqrt{3}+1)^3 = \left(2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right)^3 = 8 (\cos \pi + i \sin \pi) = -8$$

e quindi

$$ix(x^2 - y^2) = x^2 + y^2 - 8 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 8 = 0 \\ x(x^2 - y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x = 0 \end{cases} \vee$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} 2x^2 = 4 \\ y = \pm x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm x \end{cases}$$

L'equazione ha 6 soluzioni $z_1 = 2\sqrt{2}i$ $z_2 = -2\sqrt{2}i$ $z_3 = 2+2i$
 $z_4 = 2-2i$ $z_5 = -2+2i$ $z_6 = -2-2i$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x - \sin x)^{\frac{1}{x}} - 1}{(1+x)^{\ln x} - x^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x - \sin x)}{x}} - 1}{e^{\ln x \ln(1+x)} - e^{x \ln x}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{\ln(1+x - \sin x)}{x}} - 1}{e^{x \ln x} (e^{\ln x \ln(1+x) - x \ln x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x - \sin x}{x}}{e^{x \ln x} (\ln x \ln(1+x) - x \ln x)}$

poiché $\frac{\ln(1+x - \sin x)}{x} \sim \frac{x - \sin x}{x} = \frac{x - x + \frac{1}{6}x^3}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$

$\ln x \ln(1+x) \sim (\ln x)x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$

$x \ln x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$ e $e^{\frac{1}{6}x^2} - 1 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow 0$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^2}{\ln x \cdot e^{x \ln x} (\ln(1+x) - x)} = e^{\frac{1}{6}x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^2}{\ln x \cdot (\ln(1+x) - x)}$$

$\downarrow$ $e^0 = 1$ $\downarrow$ $\ln(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2}$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3}}{\ln x} = 0$$

3. Posto $2^x = t$ la disequazione diventa

$$3y - 1 \leq \sqrt{9y^2 - 2y - 7} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2 - 2y - 7 \geq 0 \\ 3y - 1 \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y - 1 > 0 \\ (3y - 1)^2 \leq 9y^2 - 2y - 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{2}{3} \\ y \leq \frac{1}{3} \end{cases} \vee y \geq 1 \vee \begin{cases} y \geq \frac{1}{3} \\ 9y^2 - 6y + 1 \leq 9y^2 - 2y - 7 \end{cases} \quad \begin{matrix} 4y \geq 8 \\ y \geq 2 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow y \leq -\frac{2}{3} \vee y \geq 2 \quad \text{cioè} \quad 2^x \leq -\frac{2}{3} \vee 2^x \geq 2$$

$$\quad \quad \quad \phi \quad \quad \quad x \geq 1$$

La disequazione è soddisfatta per $x \geq 1$.

$$4. ID: \begin{cases} |x-1| \neq 0 \\ \ln|x-1| \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1| \neq 0 \\ |x-1| \neq e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 1 \pm e \end{cases}$$

$$ID = (-\infty, 1-e[\cup]1-e, 1[\cup]1, 1+e[\cup]1+e, +\infty)$$

Poiché $f(1-x) = f(x-1)$ f è simmetrica rispetto all'asse $x=1$

Intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x-1=0 \vee \ln|x-1|=0 \end{cases} \quad (0,0) \quad (2,0)$$

$$x \neq 1 \text{ Non acc.} \quad |x-1|=1 \Leftrightarrow x-1=\pm 1 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$$

Positività

$$y > 0 \quad x > 1$$

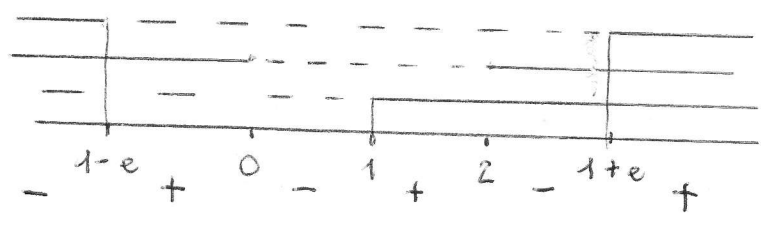
$$(x-1) \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} > 0 \Rightarrow \ln|x-1| > 0 \Leftrightarrow |x-1| > 1 \Leftrightarrow x-1 < -1 \vee x-1 > 1$$

$$\ln|x-1| > 1 \Leftrightarrow |x-1| > e \Leftrightarrow x-1 < -e \vee x-1 > e$$

$$x > 1$$

$$x < 0 \vee x > 2$$

$$x < 1-e \vee x > 1+e$$



$$f(x) > 0 \Leftrightarrow 1-e < x < 0 \vee 1 < x < 2 \vee x > 1+e$$

Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow (1-e)^{\pm}} (x-1) \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} = e \cdot \frac{1}{0^{\pm}} = \pm \infty \quad x=1-e \text{ As. Vert.}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} = 0$ essendo $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{y}{y-1} = 1$
 $\downarrow$ $\downarrow$
 0 1
 f prolungabile per continuité in $x=1$

$\lim_{x \rightarrow (1+e)^{\pm}} (x-1) \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} = e \cdot \frac{1}{0^{\pm}} = \pm \infty$ $x=1+e$ As. vert.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x-1) \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} = \pm \infty \cdot 1 = \pm \infty$ essendo $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} =$

$\nexists$ as. orizz. $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{y-1} = 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-1}{x} \cdot \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} = 1$ (eventuale coeff. ang. ch. asintoto obl.)
 $\downarrow$ $\downarrow$
 1 1

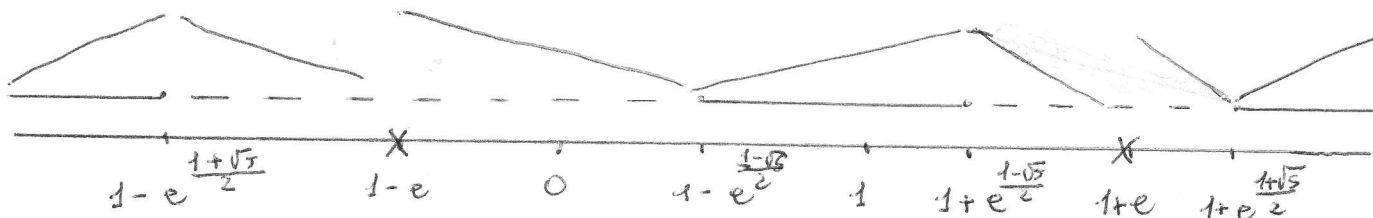
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \left(\frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \underbrace{x \left(\frac{1}{\ln|x-1|-1} \right)}_{\pm \infty \cdot 0^{\pm} = \infty \text{ per gli ordini}} - \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} = +\infty$ $\nexists$ as. obliquo

Studio della derivata prima

$y' = \frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} + (x-1) \frac{\frac{1}{x-1} (\ln|x-1|-1) - \frac{\ln|x-1|}{x-1}}{(\ln|x-1|-1)^2} =$
 $\frac{\ln|x-1|}{\ln|x-1|-1} + \frac{-1}{(\ln|x-1|-1)^2} = \frac{\ln^2|x-1| - \ln|x-1| - 1}{(\ln|x-1|-1)^2}$

$ID(y') = ID(y)$ $\nexists$ pi angolari o cuspidali

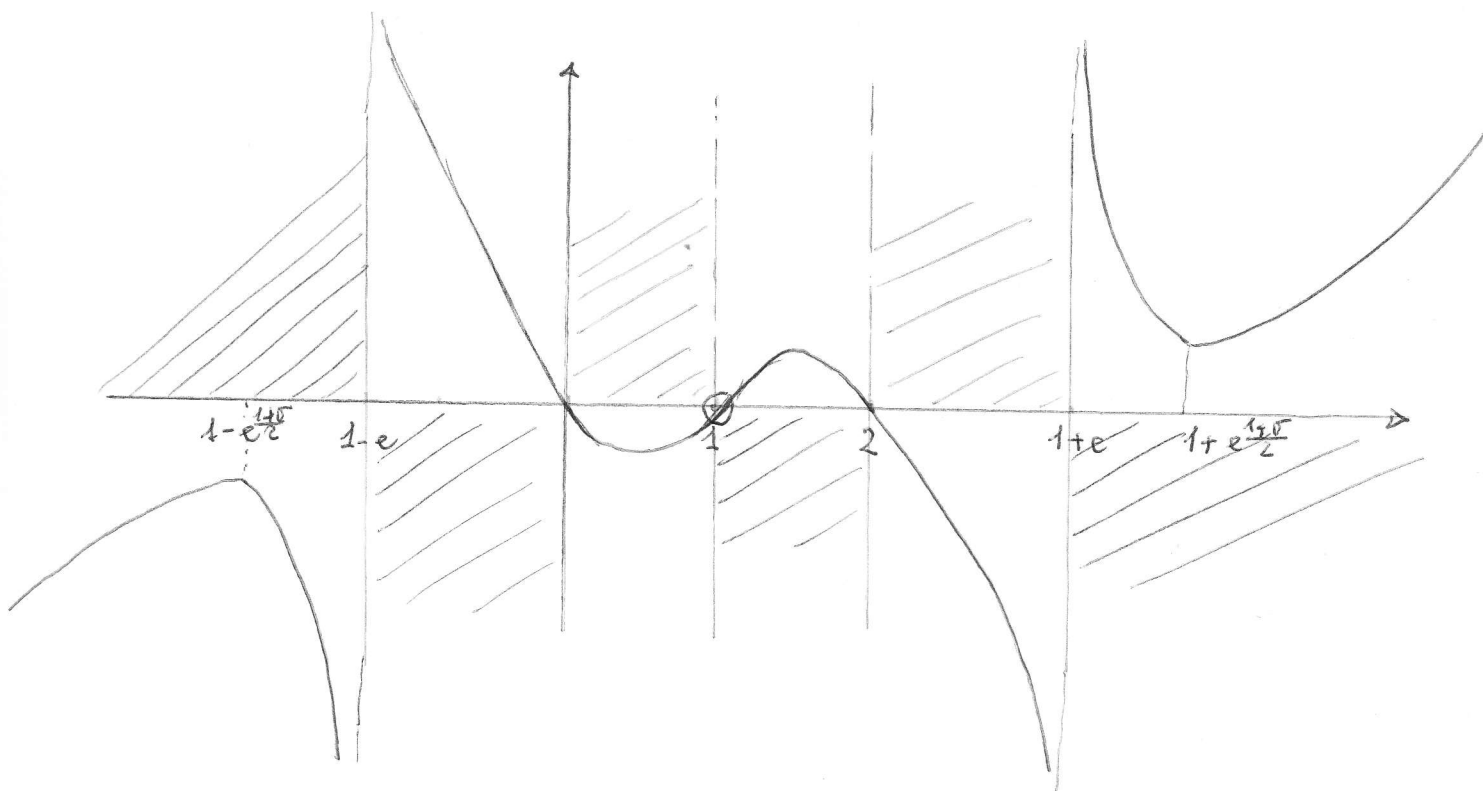
$y' > 0 \Leftrightarrow \ln^2|x-1| - \ln|x-1| - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln|x-1| < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee \ln|x-1| > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 $\Leftrightarrow |x-1| < e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \vee |x-1| > e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$
 $\Leftrightarrow x < 1 - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \vee 1 - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} < x < 1 + e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \vee x > 1 + e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$



$$M \begin{cases} x = 1 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ y = f(1 - e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}) \end{cases}$$

$$m \begin{cases} x = 1 - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ y = f(1 - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}) \end{cases}$$

$$M \begin{cases} x = 1 + e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \\ y = f(1 + e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}) \end{cases} \quad m \begin{cases} x = 1 + e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ y = f(1 + e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}) \end{cases}$$



$$5. i) \int \frac{x - \ln x}{\sqrt{x+1}^3} dx = \int D \left(-\frac{2}{\sqrt{x+1}} \right) (x - \ln x) dx \stackrel{P.P.}{=} -2 \int \frac{x - \ln x}{\sqrt{x+1}} + 2 \int \frac{1}{\sqrt{x+1}} \left(1 - \frac{1}{x} \right) dx = -2 \frac{x - \ln x}{\sqrt{x+1}} + 4 \sqrt{x+1} - 2 \int \frac{1}{x \sqrt{x+1}} dx.$$

Posso $\sqrt{x+1} = t \Rightarrow x = t^2 - 1 \quad dx = 2t dt$ where

$$\int \frac{1}{x \sqrt{x+1}} dx = \int \frac{2t}{(t^2-1)t} dt = 2 \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{t+1} \right) dt = \lg \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \lg \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$$

$$\text{e quindi } \int \frac{x - \ln x}{\sqrt{x+1}^3} dx = -2 \frac{x - \ln x}{\sqrt{x+1}} + 4 \sqrt{x+1} - 2 \lg \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C.$$

ii) Poiché f è def. e continua in $[0, +\infty)$ con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ con ord
 molto lento $\Rightarrow f$ è m.l.g. in s.t. in $[0, +\infty)$.
 Poiché $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{\sqrt{x+1}^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x+1)\sqrt{x+1}} = 0$ con ord $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow f$ non è int. in $[1, +\infty)$.