

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

3 luglio 2019

1. Determinare le radici cubiche del numero complesso

$$z = (1 - i)^8(\sqrt{3} + i)^5.$$

2. Studiare l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \left(\arctan \left(\frac{x + 1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3}}{|x - 1|} \right) \right).$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \arctan \frac{x + 1}{\sqrt{|x|} - 1}.$$

4. Calcolare i limiti per $x \rightarrow 0$ e per $x \rightarrow +\infty$ della seguente funzione

$$f(x) = \frac{e^{1-\cos x} - 1}{(1+x)^x - 1 - x^2}.$$

5. Data la funzione

$$f(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{4 - x^2}} dx,$$

- i) calcolare l'integrale indefinito;
- ii) dire se è integrabile in senso improprio in $[0, 2[$ e in $[4, +\infty)$.

Svolgimento

1.

Poi da $(1-i)^8 = ((1-i)^2)^4 = (-2i)^4 = 16i^4 = 16$

$(\sqrt{3}+i)^5 = (2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}))^5 = 2^5 (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6})$ e ha

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{16 \cdot 32} (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) = \sqrt[3]{16 \cdot 32} (\cos \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi}{3})$
e quindi le radici sono $k \in \{0, 1, 2\}$

$w_0 = 8 (\cos \frac{5\pi}{18} + i \sin \frac{5\pi}{18})$

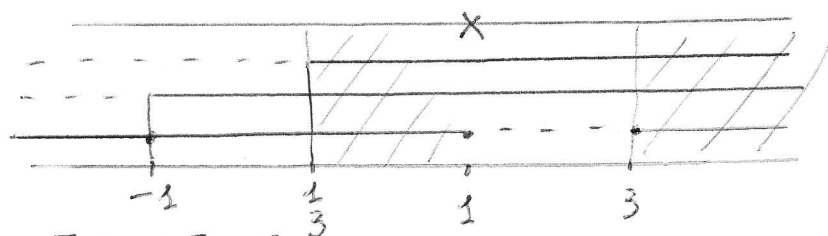
$w_1 = 8 (\cos \frac{17\pi}{18} + i \sin \frac{17\pi}{18})$

$w_2 = 8 (\cos \frac{29\pi}{18} + i \sin \frac{29\pi}{18})$

2. $\arcsin \left(\frac{x+1-\sqrt{x^2-4x+3}}{|x-1|} \right) > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1-\sqrt{x^2-4x+3}}{|x-1|} > 0 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \sqrt{x^2-4x+3} < x+1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x+3 \geq 0 & 2 \pm 1 = \frac{1}{3} \\ x+1 > 0 \\ x^2-4x+3 < x^2+2x+1 & 6x > 2 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 3 \\ x > -1 \\ x > \frac{1}{3} \\ x \neq 1 \end{cases}$



$ID =]\frac{1}{3}, 1[\cup [3, +\infty)$

3. $ID: \sqrt{|x|} \neq 1 \Leftrightarrow |x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \quad ID = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

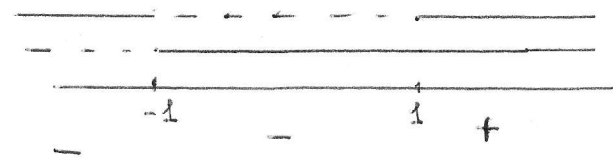
$\begin{cases} x = 0 \\ y = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x+1=0 \end{cases} \quad x = -1 \text{ Non accet.} \quad (0, -\frac{\pi}{2})$

$f(-x) \neq \pm f(x)$

f non è pari né dispari

$$y > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{|x|-1}} > 0 \quad \begin{matrix} N > 0 \\ D > 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x > 1 \\ \sqrt{|x|} > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1 \end{matrix}$$

$y > 0$ per $x > 1$



$\lim_{x \rightarrow -1} \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{|x|-1}} = \arcsin(-2)$ poiché

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{|x|-1}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{-x}+1)}{(\sqrt{-x}-1)(\sqrt{-x}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(\sqrt{-x}+1)}{-(x+1)} = -2$

† prolungabile per continuità in $x = -1$, 2 as. vert. in $x = 1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{|x|-1}} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \arcsin y = \pm \frac{\pi}{2}$ poiché

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{\sqrt{|x|-1}} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty} = \pm\infty$ 2 as. verticale in $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{|x|-1}} = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \arcsin y = \pm \frac{\pi}{2}$ $y = \frac{\pi}{2}$ As. oz. $a + \infty$
 $y = -\frac{\pi}{2}$ As. oz. $a - \infty$

$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|-1}}\right)^2} \cdot \frac{\sqrt{|x|-1} - (x+1) \frac{1}{2\sqrt{|x|}} \cdot \frac{x}{|x|}}{(\sqrt{|x|-1})^2}$ $ID(y') = ID(y) - \{0\}$

(rapp. $\lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} y' = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^{\pm}} \frac{\sqrt{|x|-1} \mp (x+1) \frac{1}{2\sqrt{|x|}}}{(\sqrt{|x|-1})^2} = \mp \infty$ $x=0$ pto cuspidale)

$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \wedge x \neq 1 \\ \sqrt{x}-1 - \frac{x+1}{2\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \wedge x \neq -1 \\ \sqrt{-x}-1 + \frac{x+1}{2\sqrt{-x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

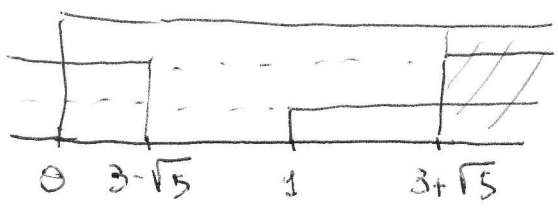
$\begin{cases} x > 0 \wedge x \neq 1 \\ 2x - 2\sqrt{x} - x - 1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \wedge x \neq -1 \\ -2x - 2\sqrt{-x} + x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \wedge x \neq 1 \\ x-1 > 2\sqrt{x} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \wedge x \neq -1 \\ -x+1 > 2\sqrt{-x} \end{cases}$

$\begin{cases} x > 0 \wedge x \neq 1 \\ x-1 > 0 \\ x^2+1-2x > 4x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \wedge x \neq -1 \\ -x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \wedge x \neq 1 \\ x > 1 \\ x^2-6x+1 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \wedge x \neq -1 \\ x < 1 \\ x^2-2x-1 > 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x > 0 \wedge x \neq 1 \\ x > 1 \\ x < 3 - \sqrt{5} \vee x > 3 + \sqrt{5} \end{cases}$$

$\vee$

$$\begin{cases} x < 0 \wedge x \neq -1 \\ x < 1 \\ \vee x \neq -1 \end{cases}$$

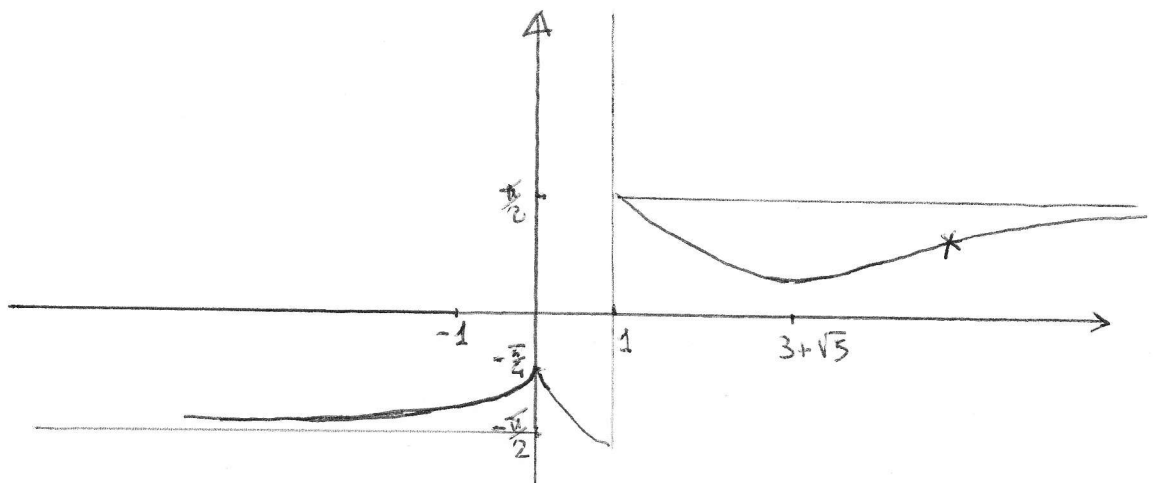
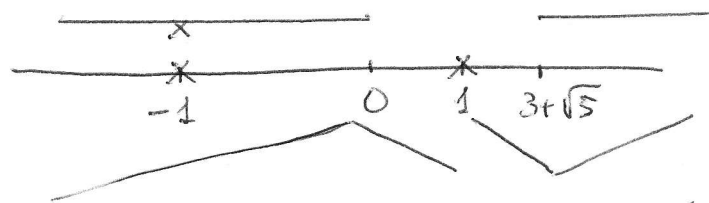


$$x > 3 + \sqrt{5}$$

$$\vee \quad x < 0 \wedge x \neq -1$$

$$M \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$m \begin{cases} x = 3 + \sqrt{5} \\ y = f(3 + \sqrt{5}) \end{cases}$$



Per brevit  si omette lo studio del segno di y'' : la funzione ha sicuramente un flesso per $x > 3 + \sqrt{5}$; potrebbe avere 1 flesso tra 0 e 1 e tra 1 e $3 + \sqrt{5}$, ma la disegniamo con 1 solo flesso.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{(1+x)^x - 1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{e^{x \lg(1+x)} - 1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \lg(1+x) + \frac{1}{2} x^2 \lg^2(1+x) - x^2}$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \lg(1+x) \sim x - \frac{x^2}{2}$$

$$\stackrel{!}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x^2}{x^2 - \frac{x^3}{2} - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x} \quad \text{ma } \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{(1+x)^x - 1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{e^{x \lg(1+x)} - 1 - x^2} = 0$$

poich  il numeratore $e^B - 1$ resta mentre il denominatore $\rightarrow +\infty$

5. i) $\int \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{4-x^2}} dx = - \int \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} (x^2+1) dx = - \int D(\sqrt{4-x^2}) (x^2+1) dx \stackrel{P.P.}{=} - \sqrt{4-x^2} (x^2+1) + \int 2x \sqrt{4-x^2} dx = - \sqrt{4-x^2} (x^2+1) + \int (4-x^2)^{\frac{1}{2}} D(4-x^2) dx$
 $= - \sqrt{4-x^2} (x^2+1) - \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = - \sqrt{4-x^2} (x^2+1 + \frac{2}{3}(4-x^2)) + C$
 $= - \sqrt{4-x^2} (\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{3}) + C.$

ii) Perché f è definita in $4-x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$
 f non è integrabile in $[4, +\infty)$ perché non è definita in questo intervallo mentre è integrabile in s.i. in $[0, 2[$ perché continua e

Per $x \rightarrow 2^-$ $\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{4-x^2}} = \underset{0 \text{ con ord } \frac{1}{2}}{\underbrace{x(x^2+1)}} \underset{\rightarrow \frac{2.5}{2}}{\underbrace{\frac{1}{(2-x)^{1/2} (2+x)^{1/2}}}} = +\infty$ con ord. $\frac{1}{2} < 1$.