

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

19 giugno 2019

1. Determinare $z = x + iy$ such that

$$\operatorname{Re}\left(\frac{y}{z-i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x^2}{z-i}\right) + i^{81}(y-2).$$

2. Studiare l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{\log_{\frac{1}{2}}(1-x) + \log_2(1-2x)}{2^{-x} - 4}}.$$

3. Data la funzione

$$f(x) = e^{-\frac{1}{|x-1|}}(x-4),$$

- a) studiarla e disegnarne il grafico approssimativo;
b) dire se è integrabile in senso improprio in $]1, 2]$ e in $[2, +\infty)$.
4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cos \frac{5}{x} - x(x-1)e^{\frac{1}{x}} \right).$$

5. Determinare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{2x\sqrt{x^4-1}}{1+\sqrt{x^4-1}} dx.$$

Solgimento

1. Posto $z = x + iy$ e poiché $i^{81} = (i^4)^{20} \cdot i = 1 \cdot i = i$, si ha:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{y}{z-i}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{y(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{xy - i y(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}\right)$$

$$= \frac{xy}{x^2 + (y-1)^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{x^2}{z-i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x^2(x-i(y-1))}{(x+i(y-1))(x-i(y-1))}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x^3 - i x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}\right) = \frac{-x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2}$$

e quindi l'equazione diventa

$$\frac{xy}{x^2 + (y-1)^2} = -\frac{x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} + i(y-2) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{xy}{x^2 + (y-1)^2} = -\frac{x^2(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x^2 = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$$

L'equazione ha 2 soluzioni $z = 2i$ e $z = -2 + 2i$.

2. $\frac{\lg_{\frac{1}{2}}(1-x) + \lg_2(1-2x)}{2^{-x} - 4} > 0$

Studio il segno del rapporto nel campo di esistenza:

$$\begin{cases} 1-x > 0 \\ 1-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

$N > 0: -\lg_2(1-x) + \lg_2(1-2x) > 0$

$$\lg_2(1-2x) > \lg_2(1-x)$$

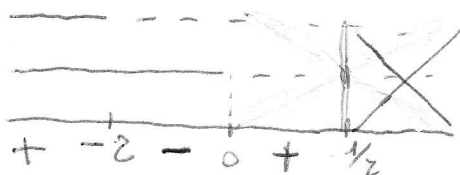
$$1-2x > 1-x \quad x < 0$$

$$\begin{cases} \text{poiché} \\ \lg_{\frac{1}{2}}(1-x) = \frac{\lg_2(1-x)}{\lg_2 \frac{1}{2}} = -\frac{\lg_2(1-x)}{\lg_2 2} \end{cases}$$

$D > 0: 2^{-x} > 4 \quad 2^{-x} > 2^2 \quad -x > 2 \quad x < -2$

$D > 0$

$N > 0$



$$ID = (-\infty, -2[\cup]0, \frac{1}{2}[$$

3. ID: $|x-1| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

ID = $\mathbb{R} - \{1\}$

$\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{4}{e} \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=4 \end{cases} \quad (0, -\frac{4}{e}) \quad (4, 0)$
 pts di intersezione con gli assi

$y > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{|x-1|}} (x-4) > 0 \Leftrightarrow x > 4$

$\lim_{x \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{|x-1|}} (x-4) = 0 \cdot (-4) = 0$

non prolungabile per continuit  in $x=1$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{-\frac{1}{|x-1|}} (x-4) = 1 \cdot (\pm \infty) = \pm \infty$

Asint. orizzontale

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{e^{-\frac{1}{|x-1|}} (x-4)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{-\frac{1}{|x-1|}} \cdot \frac{x-4}{x} = 1$
 (coeff. angolare ds. essenziale as. obl.)

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x-4)e^{-\frac{1}{|x-1|}} - x = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 - \frac{1}{|x-1|} + o\left(\frac{1}{|x-1|}\right) \right) (x-4) - x$

perche' $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \rightarrow 0$

separo i casi:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-4) \left(1 - \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right) \right) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 4 - x^2 + x}{x-1} = -5$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4) \left(1 + \frac{1}{x-1} + o\left(\frac{1}{x-1}\right) \right) - x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x - x^2 + x}{x-1} = -3$

$y = x - 5$ as. obliquo a $+\infty$

$y = x - 3$ as. obliquo a $-\infty$.

$y' = e^{-\frac{1}{|x-1|}} \left(\frac{x-1}{(x-1)^2} (x-4) + 1 \right) = e^{-\frac{1}{|x-1|}} \left(\frac{x-4}{(x-1)|x-1|} + 1 \right)$

ID(y') = ID(y) = $\mathbb{R} - \{1\}$

non pt. angolari o cuspidali

Perche' $\lim_{x \rightarrow 1 \pm} y' = 0 \cdot (\mp \infty) = 0$

per gli ordini quando

$\lim_{x \rightarrow 1} e^{-\frac{1}{|x-1|}} = 0$
 con ord. 1 con grandi

$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} \frac{x-4}{(x-1)|x-1|} + 1 = \mp \infty$
 con ord. 2

segue che se prolunga f in $x=1$ ponendolo = 0, il prolungamento e'

derivabile in $x=1$ con derivata $= 0$.

(3)

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ e^{-\frac{1}{x-1}} \left(\frac{x-4}{(x-1)^2} + 1 \right) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ e^{\frac{1}{x-1}} \left(-\frac{x-4}{(x-1)^2} + 1 \right) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x-4 + (x-1)^2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ -x+4 + (x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 3 > 0 \\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x^2 - 3x + 5 > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < \frac{1-\sqrt{13}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{13}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1+\sqrt{13}}{2} \vee x < 1$$

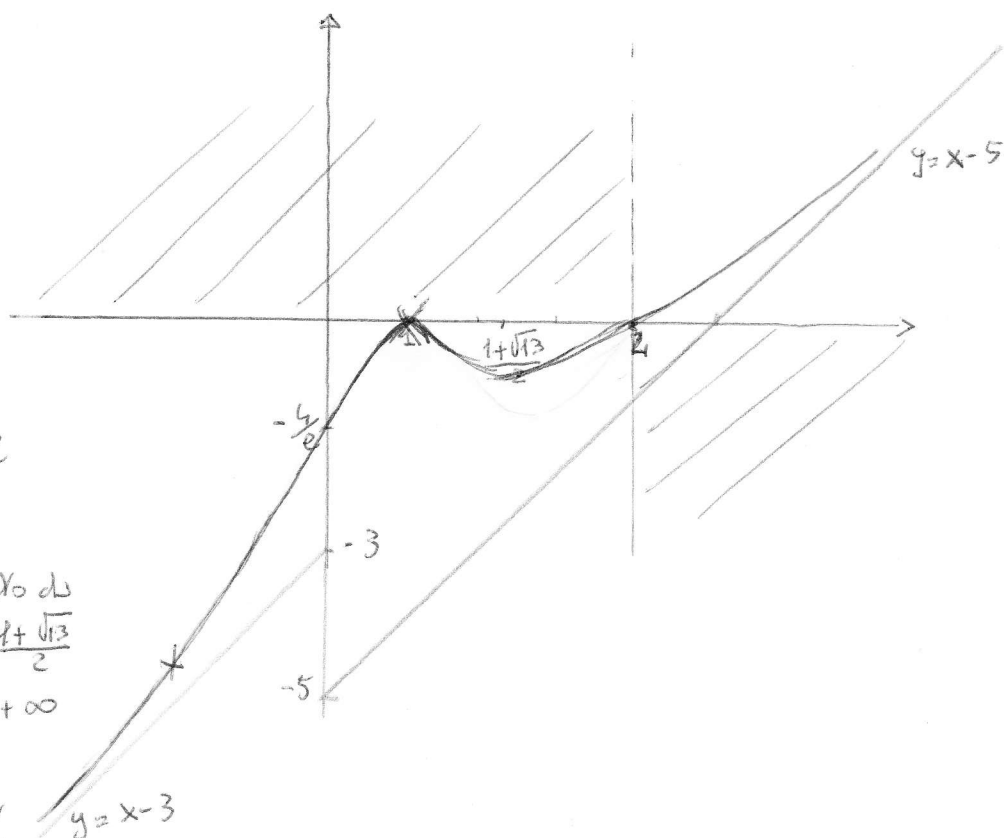
u

$$\begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ y = f\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \end{cases}$$

$(1,0)$ pto di massimo per il prolungamento di f

Poichè $f\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) < k = \text{ord. pto di ascissa } \frac{1+\sqrt{13}}{2}$
sull'es. $a+\infty$

f ha solo 2 pti di flesso, uno prima di 1 e l'altro tra 1 e $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.



b) Poichè f è continua in $[1,2]$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$,

f è integ. in senso improprio anche in senso classico in $[1,2]$.

Poichè $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \neq 0$, f non è integ. in s.l. in $[2,+\infty)$.

(4)

$$\begin{aligned}
 4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cos \frac{5}{x} - x(x-1) e^{\frac{1}{x}} \right) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos 5y}{y} - \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} - 1 \right) e^y \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos 5y - (1-y)e^y}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 25y^2 + o(y^2) - (1-y)(1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2))}{y^2} \\
 &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - 25y^2 - 1 + y^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^3 + o(y^2)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-25 + 2 - \frac{1}{2})y^2 + o(y^2)}{y^2} = -12.
 \end{aligned}$$

5. Posto $x^2 = y \Rightarrow 2x dy = dy$ e integrale di Seiva

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x \sqrt{x^4-1}}{1+\sqrt{x^4-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{y^2-1}}{1+\sqrt{y^2-1}} dy = \int \left(1 - \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \right) dy \\
 &= y - \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}} = x^2 - \int \frac{-\frac{1}{2} \frac{b^2-1}{b^2}}{-1+b^2} db = x^2 - \int \frac{1}{b} db = x^2 - \lg |b| + C =
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{aligned}
 \sqrt{y^2-1} &= y+b \Rightarrow y^2-1 = y^2+b^2+2yb \Rightarrow y = -\frac{1+b^2}{2b} \\
 dy &= -\frac{1}{2} \frac{2b^2-1-b^2}{b^2} db = -\frac{1}{2} \frac{b^2-1}{b^2} db \\
 \sqrt{y^2-1} &= -\frac{1+b^2}{2b} + b = \frac{-1+b^2}{2b}
 \end{aligned} \right]$$

$$= x^2 - \lg |\sqrt{y^2-1} - y| + C = x^2 - \lg |\sqrt{x^4-1} - x^2| + C$$

$$= x^2 - \lg (x^2 - \sqrt{x^4-1}) + C.$$