

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

20 maggio 2019

1. Studiare la seguente equazione nel campo complesso

$$3z^5\bar{z} + 36i = -6z^4 - 18|z|^2 i.$$

2. Studiare l'insieme di definizione della seguente funzione

$$f(x) = \log \sqrt{\frac{2 \log^2 x^2 - \log_x e}{4^{2x} + 4^x - 2^{x-1}}}.$$

3. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{|x-3|}{e^{x-1}}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

4. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\log(x^3 + x) - \log(x^3 - x) \right) (2x + 1) \cos x.$$

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{\tan \frac{x}{2}}{2 \sin x + \cos x},$$

i) calcolare l'insieme delle primitive,

ii) dire, giustificando le risposte, se è integrabile in senso classico o in senso improprio in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e in $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi[$.

Solgimento

1. Divido per 3 ambo i membri dell'equazione e ricordo che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$:

$$z^4 \cdot |z|^2 + 12i + 2z^4 + 6|z|^2 i = 0 \quad (\Rightarrow)$$

$$z^4 (|z|^2 + 2) + 6i (|z|^2 + 2) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad (|z|^2 + 2)(z^4 + 6i) = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$|z|^2 + 2 = 0 \quad \text{impossibile poiché } |z| \geq 0 \quad \vee \quad z^4 = -16i \quad (\Leftrightarrow)$$

$$z = \sqrt[4]{-16i} = \sqrt[4]{16 \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi \right)} = \left\{ 2 \left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{4} \right) \right\}$$

$k \in \{0, 1, 2, 3\}$

L'equazione ha 4 soluzioni

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{3}{8}\pi + i \sin \frac{3}{8}\pi \right)$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{7}{8}\pi + i \sin \frac{7}{8}\pi \right)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{11}{8}\pi + i \sin \frac{11}{8}\pi \right)$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{15}{8}\pi + i \sin \frac{15}{8}\pi \right).$$

2. $\sqrt{\frac{2 \lg^2 x^2 - \lg x e}{4^{2x} + 4^x - 2^{x-1}}} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{2 \lg^2 x^2 - \lg x e}{4^{2x} + 4^x - 2^{x-1}} > 0$ da studiare in

$$N > 0 \quad 2 \lg^2 x^2 - \lg x e > 0$$

Essendo $\lg^2 x^2 = (\lg x^2)^2 = (2 \lg |x|)^2 = 4 \lg^2 x$

$$\lg x e = \frac{\lg e}{\lg x} = \frac{1}{\lg x}$$

La disuguaglianza diventa:

$$8 \lg^2 x - \frac{1}{\lg x} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{8 \lg^3 x - 1}{\lg x} > 0 \quad N > 0 \quad \lg x > \frac{1}{2}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \lg x < 0 \vee \lg x > \frac{1}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad 0 < x < 1 \vee x > \sqrt{e}.$$

$$D > 0 \quad 4^{2x} + 4^x - 2^{x-1} > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad (2^2)^{2x} + (2^2)^x - \frac{1}{2} \cdot 2^x > 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$2 \cdot 2^{4x} + 2 \cdot 2^{2x} - 2^x > 0 \quad \text{Ponendo } 2^x = t \text{ la disuguaglianza diventa}$$

$$2t^4 + 2t^2 - t > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad t(2t^3 + 2t - 1) > 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad \text{poiché } t = 2^x > 0$$

$$2t^3 + 2t - 1 > 0 \quad \text{Poiché il trinomio non ha radici intere né}$$

razionali, bisogna usare il metodo grafico per studiare le diseg.

In realtà si vede subito che per $x > 0$: $2^x > 1$ e quindi

$$2 \cdot 2^{3x} + 2 \cdot 2^x - 1 > 2 + 2 - 1 > 0 \quad \forall x > 0$$

(2)

Logo, essendo $D > 0 \quad \forall x > 0$, si conclude che

$$ID =]0, 1[\cup]\sqrt{e}, +\infty)$$

$$3. f(x) = \frac{|x-3|}{e^{x-1}}$$

$$ID = \mathbb{R}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad (3, 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3e \end{cases} \quad (0, 3e)$$

2 asintoti verticali poiché f è continua in $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x-3|}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{e^{x-1}} = 0 \quad \text{poiché } o_2d \ e^x \gg o_2d \ x$$

$y = 0$ As. orizz. destra

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x-3|}{e^{x-1}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad \text{2 as. orizz. sinistre}$$

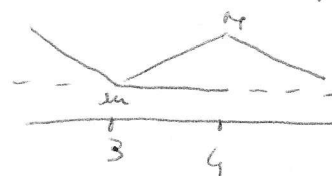
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+3}{x} \cdot \frac{1}{e^{x-1}} = -\infty \quad \text{2 as. oblique sinistre}$$

$$y' = \frac{\frac{x-3}{|x-3|} e^{x-1} - |x-3| e^{x-1}}{(e^{x-1})^2} = \frac{(x-3) - (x-3)^2}{|x-3|(e^{x-1})^2} e^{x-1} = \frac{(x-3)(4-x)}{|x-3| e^{x-1}} \quad \forall x \neq 3$$

$$ID(y') = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$y' > 0 \Leftrightarrow (x-3)(4-x) > 0 \Leftrightarrow 3 < x < 4$$

$$\text{in } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{M } \begin{cases} x = 4 \\ y = e^{-3} \end{cases}$$



$$\text{Poiché } \lim_{x \rightarrow 3^-} y' = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4-x}{e^{x-1}} = -\frac{1}{e^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} y' = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4-x}{e^{x-1}} = \frac{1}{e^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{pt. angoloso}$$

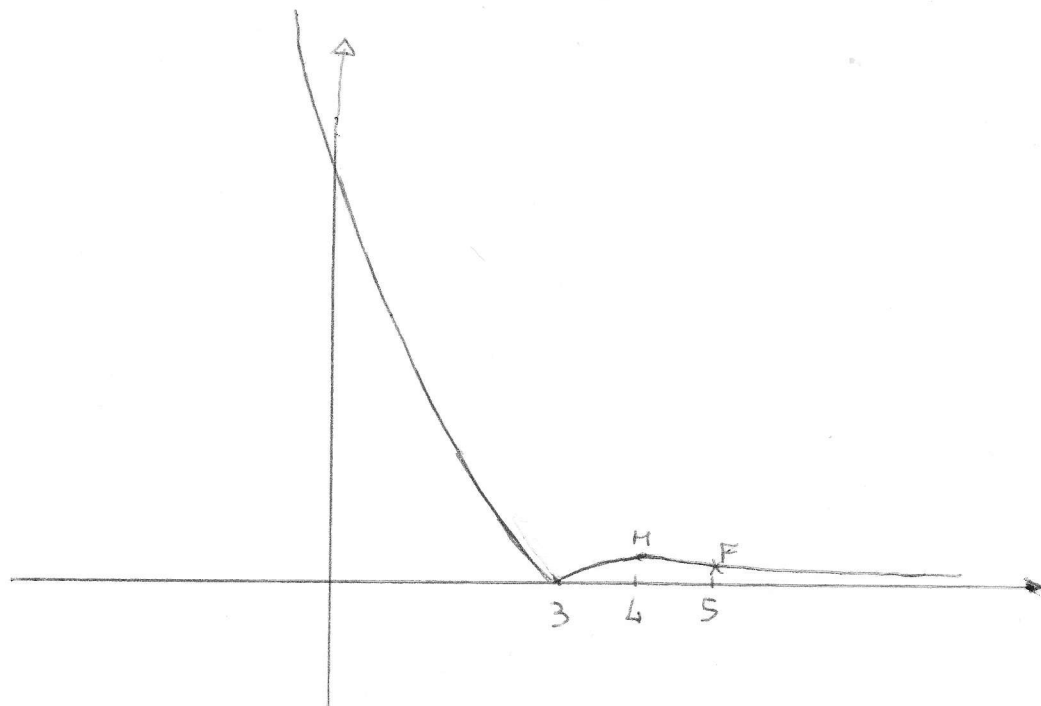
$$y'' = \begin{cases} D\left(\frac{4-x}{e^{x-1}}\right) = \frac{5-x}{e^{x-1}} & \text{se } x < 3 \\ D\left(\frac{4-x}{e^{x-1}}\right) = \frac{x-5}{e^{x-1}} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

segue da

$$y'' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 3 \\ 5-x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 3 \\ x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 3 \vee x > 5$$



La funzione ha 2 pt. di flesso



4. Per una proprietà dei logaritmi, il limite diventa

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lg \frac{x^3+x}{x^3-x} \right) (2x+1) \cos x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\lg \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)}_{\downarrow 1} \underbrace{(2x+1)}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\cos x}_{\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lg \left(1 + \frac{2}{x^2-1} \right)}{\frac{2}{x^2-1}} \cdot \frac{2}{x^2-1} \cdot (2x+1) \cos x = 0 \end{aligned}$$

poiché $\cos x$ è una funzione limitata ma

$$\frac{\lg \left(1 + \frac{2}{x^2-1} \right)}{\frac{2}{x^2-1}} \cdot \frac{2(2x+1)}{x^2-1} \rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

5. Posto $t = \lg \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

e l'integrale diventa

$$\int \frac{\lg \frac{x}{2}}{2 \sin x + \cos x} dx = \int \frac{t}{\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = -2 \int \frac{t}{t^2 - 4t - 1} dt$$

Poiché $t^2 - 4t - 1 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5} \quad \exists A, B \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\frac{t}{t^2 - 4t - 1} = \frac{A}{t - 2 - \sqrt{5}} + \frac{B}{t - 2 + \sqrt{5}} = \frac{(A+B)t + A(\sqrt{5}-2) + B(-\sqrt{5}-2)}{t^2 - 4t - 1}$$

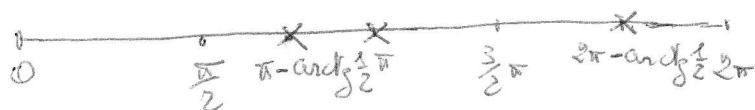
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ (\sqrt{5}-2)A - (\sqrt{5}+2)B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=1-A \\ (\sqrt{5}-2)A - \sqrt{5}-2 + (\sqrt{5}+2)A=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5} \\ B = 1 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases} \quad \text{L'integrale di } f_2$$

$$\begin{aligned} I &= -2 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \lg |t-2-\sqrt{5}| + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \lg |t-2+\sqrt{5}| + C \right. \\ &= -2 \left[\frac{1}{2} \lg (|t-2-\sqrt{5}| |t-2+\sqrt{5}|) + \frac{\sqrt{5}}{5} \lg \left| \frac{t-2-\sqrt{5}}{t-2+\sqrt{5}} \right| \right] + C \\ &= -\lg |t^2-4t-1| + 2 \frac{\sqrt{5}}{5} \lg \left| \frac{t-2-\sqrt{5}}{t-2+\sqrt{5}} \right| + C \\ &= -\lg \left| r g^2 \frac{x}{2} - 4 r g \frac{x}{2} - 1 \right| - \frac{2\sqrt{5}}{5} \lg \left| \frac{r g \frac{x}{2} - 2 - \sqrt{5}}{r g \frac{x}{2} - 2 + \sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

ii) Studio $ID(\mathbb{R})$: $\begin{cases} \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2 \operatorname{sen} x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pi + 2k\pi \\ r g x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow x \neq -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi \end{cases}$

In $[0, 2\pi]$:



La funzione non è definita per $x = \pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

per $x = \pi$

per $x = 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$

Segue che R è continua e quindi integ. in senso classico in $[0, \frac{\pi}{2}]$ mentre per vedere se è integ. in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ non studio se tende per $x \rightarrow \alpha$ con $\alpha = 2\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ ma calcolo direttamente e' integrale. Sia

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} R(x) dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\alpha} R(x) dx + \int_{\alpha}^{2\pi} R(x) dx \quad \text{Se 1° integrale, posto } t = r g \frac{x}{2} \text{ dunque:}$$

(essendo $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+r g^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$)

$$-2 \int_{r g \frac{3\pi}{2}}^{r g \frac{\alpha}{2}} \frac{dr}{t^2-4t-1} \quad \text{da disporre perche } r g \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}} = -\sqrt{5}+2$$

Dunque R non è int. in s.i. in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

$$+ \frac{t}{t^2-4t-1} = \frac{t}{t^2-4t-1} = \frac{t}{(\sqrt{5}+2)(t-2-\sqrt{5})(t-2+\sqrt{5})} \rightarrow \infty \text{ con ord } 1$$