

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

24 aprile 2019

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$|z + 2\bar{z} - 1| = \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}} \right)^{32} + \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{71} + 2iz.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x) + x}{x^3}.$$

3. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \sqrt{\lg_{\frac{3}{4}} \left(\sqrt{\ln^2 x + 1} - \sqrt{\ln^2 x - 1} \right)}.$$

4. Studiare la funzione

$$g(x) = \sqrt{\left| e^{\frac{x}{x-1}} - e \right|}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$h(x) = \frac{1 + \ln^4 x}{x(1 + \ln x)(1 + \ln^2 x)}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in senso improprio in $]0, \frac{1}{10}]$, in $[\frac{1}{10}, \frac{1}{e}[$ e in $[1, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = a + ib$ poichè

$$\left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}} \right)^{32} = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) 32 + i \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) 32 = \cos \frac{\pi}{8} \cdot 32 + i \sin \frac{\pi}{8} \cdot 32 = 1$$

$$\left(\frac{1-i}{1+i} \right)^{71} = \left(\frac{(1-i)^2}{1-i^2} \right)^{71} = \left(\frac{1+i^2-2i}{2} \right)^{71} = (-i)^{71} = -1 \cdot i^{71} = -1 \cdot (i^4)^{17} \cdot i^3 = -1 \cdot (-i) = i$$

l'equazione diventa

$$|a+ib+2a-2bi-1| = 1+i+2ai-2b \Leftrightarrow$$

$$|3a-1+i(-b)| = 1-2b+i(1+2a) \Leftrightarrow \sqrt{(3a-1)^2+b^2} = 1-2b+i(1+2a) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{(3a-1)^2+b^2} = 1-2b \\ 2a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ \sqrt{\left(-\frac{3}{2}-1\right)^2+b^2} = 1-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2b \geq 0 \\ b^2 + \frac{25}{4} = 1+4b-4b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b \leq \frac{1}{2} \\ 3b^2 - 4b - \frac{21}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b \leq \frac{1}{2} \\ b_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{67}}{3} = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{67}}{3} < \frac{1}{2} \text{ acc} \\ \frac{2+\sqrt{67}}{3} > \frac{1}{2} \text{ Non acc} \end{cases} \end{cases}$$

L'equazione ha una sola soluzione

$$z = -\frac{1}{2} + i \frac{2-\sqrt{67}}{3}$$

2. Poichè
per $x \rightarrow 0$?

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^4 + o(x^4) \sim 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \sim x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

da cui

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{1+x^2} - x) &\sim \ln\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - x\right) \sim \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 \end{aligned}$$

quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} - x) + x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6}x^3}{x^3} = \frac{1}{6}$$

3. $\lg_{\frac{3}{2}}(\sqrt{\ln^2 x + 1} - \sqrt{\ln^2 x - 1}) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{\ln^2 x + 1} - \sqrt{\ln^2 x - 1} \leq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\ln^2 x + 1} > \sqrt{\ln^2 x - 1} \\ \sqrt{\ln^2 x + 1} \leq \sqrt{\ln^2 x - 1} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln^2 x + 1 \geq 0 & \forall x > 0 \\ \ln^2 x - 1 \geq 0 & \ln x \geq 1 \\ \ln^2 x + 1 > \ln^2 x - 1 & \forall x > 0 \\ \ln^2 x + 1 \leq 1 + \ln^2 x - 1 + 2\sqrt{\ln^2 x - 1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x \geq 1 \\ \sqrt{\ln^2 x - 1} \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x \geq 1 \\ \ln^2 x \geq \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln^2 x \geq \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq -\frac{\sqrt{5}}{2} \vee \ln x \geq \frac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$0 < x \leq e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}} \vee x \geq e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}$ $ID =]0, e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}}] \cup [e^{\frac{\sqrt{5}}{2}}, +\infty)$

4. ID: $|e^{\frac{x}{x-1}} - 1| \geq 0 \Rightarrow \forall x \neq 1$ $ID = \mathbb{R} - \{1\}$

g non e' m' pars m' dispari poiche' il modulo non e' simmetrico rispetto all'origine.

$\begin{cases} x \neq 0 \\ y = \sqrt{|e^{\frac{x}{x-1}} - 1|} = \sqrt{e-1} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{|e^{\frac{x}{x-1}} - e|} = 0 \Rightarrow \frac{x}{x-1} = 1 \Rightarrow x = x-1 \quad \emptyset \end{cases}$

$(0, \sqrt{e-1})$ m'ca l'asimptotica as g'asse y
 $y \geq 0 \quad \forall x \in ID \quad \text{cioe' } \forall x \neq 1$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{|e^{\frac{x}{x-1}} - e|} = +\infty$ poiche' $\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{x-1}} = e \cdot e^y = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{|e^{\frac{x}{x-1}} - e|} = \sqrt{e}$ poiche' $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{x}{x-1}} = e \cdot e^y = 0$

Dunque $x = 1$ As. Verticale solo a sinistra

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{|e^{\frac{x}{x-1}} - e|} = 0$ poiche' $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x}{x-1} = 1 \quad y = 0 \text{ As. or. a } \pm \infty$

$y' = \frac{1}{2\sqrt{|e^{\frac{x}{x-1}} - e|}} \cdot \frac{e^{\frac{x}{x-1}} - e}{|e^{\frac{x}{x-1}} - e|} \cdot e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{x-1-x}{(x-1)^2}$ $ID(y') = \mathbb{R} - \{1\} = ID(g)$
A p's angolari o curv.

Poiche' $e^{\frac{x}{x-1}} \geq e \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x > 1$ segue da

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{e^{\frac{x}{x-1}} - e}} \cdot e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} & \text{se } x > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{e - e^{\frac{x}{x-1}}}} \cdot e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

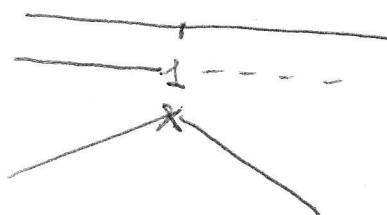
(3)

Quindi

$$y' > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{e^{\frac{x}{x-1}} - e}} \cdot e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{e - e^{\frac{x}{x-1}}}} \cdot e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} > 0 \end{cases}$$

+ + - + + +

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \emptyset \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ \forall x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x < 1$$



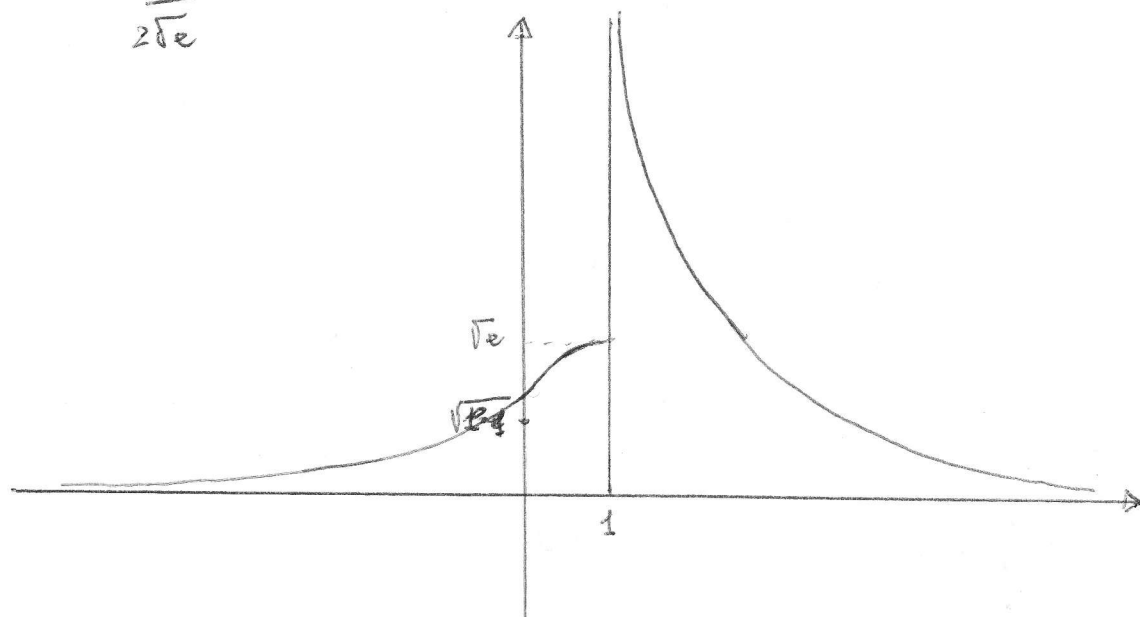
Non conviene calcolare y'' perché

troppo lunga! Per capire la concavità, studiamo $\lim_{x \rightarrow 1^-} y'$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\sqrt{e - e^{\frac{x}{x-1}}}} \cdot e^{\frac{x}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \quad \text{per gli ordini}$$

↓ ↓ ↗ +∞ con ord. 2

$\frac{1}{2\sqrt{e}}$ 0 molto velocemente



N.B. Poiché la funzione arriva con tangente orizzontale al punto $(1, \sqrt{e})$, dovrà avere un flesso per $x < 1$.

5.1) Posto $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$ e' integrale di Riemann

$$\int \frac{1+t^4}{(1+t)(1+t^2)} dt = \int \left(t-1 + \frac{2}{(1+t)(1+t^2)} \right) dt$$
$$= \frac{t^2}{2} - t + \int \left(\frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} \right) dt$$
$$\frac{t^4}{t^4+t^3+t^2+t} + 1 \quad \frac{t^3+t^2+t+1}{t-1}$$
$$\begin{array}{r} t^4+t^3+t^2+t \\ -t^3-t^2-t+1 \\ \hline -t^3-t^2-t-1 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$= \frac{t^2}{2} - t + \int \frac{1}{t+1} dt + \int \frac{-t}{t^2+1} dt + \int \frac{1}{t^2+1} dt$$
$$= \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| - \frac{1}{2} \ln(t^2+1) + \arctan t + C$$
$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-B \\ C=-B \\ -2B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}$$
$$= \frac{\ln^2 x}{2} - \ln x + \ln \frac{\ln x + 1}{\sqrt{\ln^2 x + 1}} + \arctan \ln x + C$$

it) ID(R): $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq -1 \end{cases} \Rightarrow ID =]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty[$

Per di' $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln^4 x}{x(1 + \ln x)(1 + \ln^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow +\infty \text{ ord } 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{\downarrow -\infty \text{ ord esponente piccolo}} = +\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ con ord > 1

$\Rightarrow f$ non e' integ. in s.i. in $]0, \frac{1}{e^{-1}}[$.

Per di' $\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} \frac{1 + \ln^4 x}{x(1 + \ln x)(1 + \ln^2 x)} = \lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} \underbrace{\frac{1 + \ln^4 x}{x(1 + \ln^2 x)}}_{\downarrow \frac{2}{e^{-1} \cdot 2} = e} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 + \ln x}}_{\downarrow -\infty} = -\infty$

studio ordine di ∞ di $\frac{1}{1 + \ln x}$

anzi di infinitesimo di $1 + \ln x$

Essendo $\lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} \frac{1 + \ln x}{x - e^{-1}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow (e^{-1})^-} \frac{1}{x} = e$, f e' un infinito di ordine 1 e quindi non e' integ. in s.i. in $[\frac{1}{e^{-1}}, \frac{1}{e^{-1}}]$.

Per di' $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln^4 x}{x(1 + \ln x)(1 + \ln^2 x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\downarrow 0 \text{ con ord } 1} \cdot \underbrace{\ln x}_{\downarrow +\infty \text{ con ord } e^{-1}} = 0$ con ord < 1 ma $> 1 - \epsilon$ $\forall \epsilon \in]0, 1[$.

il criterio di integrabilita' in s.i. non si puo' applicare! Bisogna fare i conti e calcolare l'integrale in s.i. applicando la definizione.

$$\int_1^{+\infty} h(x) dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^y h(x) dx = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln^2 y}{2} - \ln y + \ln \frac{\ln y + 1}{\sqrt{\ln^2 y + 1}} + \operatorname{arctg} \ln y - \ln 1 - \operatorname{arctg} \ln 1 \right] = +\infty. \quad (5)$$

per di $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \frac{\ln y + 1}{\sqrt{\ln^2 y + 1}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln \frac{\ln y}{\ln y} = \ln 1 = 0$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} \ln y = \lim_{z \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} z = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 y}{2} - \ln y = +\infty \quad \text{per gli ordini}$$

Si conclude perciò che h non è integrabile in s.v. in $[1, +\infty)$.