

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

18 febbraio 2019

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$z^3 + |z|(|z|^2 + 2) + z\bar{z} = 0.$$

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln\left(1 + x + \frac{1}{x^2}\right) + 2 \ln x - x^3}{\sin^2 x - x^2}.$$

3. Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \ln_2 \left(\ln_{\frac{1}{2}} (4^{-x} + 2^{-x} - 1) - 3x \right).$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \ln_{\frac{1}{2}} \left| \frac{x}{3 - \sqrt{x^2 + 1}} \right|$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{\tan x}{\cos x (2 - \sin^2 x)}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ e in $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ (specificare se si tratta di integrabilità in senso classico o in senso improprio) e calcolare gli integrali che hanno senso in tali intervalli.

Soluzioni

1. Posto $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ l'equazione diventa

$$\rho^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) + \rho(\rho^2 + 2) + \rho^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho[\rho^2 \cos 3\theta + \rho^2 + 2 + \rho + i\rho^2 \sin 3\theta] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\rho = 0 \vee \rho^2 \cos 3\theta + \rho^2 + 2 + \rho + i\rho^2 \sin 3\theta = 0 \Leftrightarrow$$

$$z = 0 \vee \begin{cases} \rho^2 \cos 3\theta + \rho^2 + 2 + \rho = 0 \\ \rho^2 \sin 3\theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \rho = 0 \text{ (già risolto)} \vee \sin 3\theta = 0$$

$$\text{Il sistema diventa } \begin{cases} 2\rho^2 + \rho + 2 = 0 \\ 3\theta = 0 + 2k\pi \end{cases} \vee \begin{cases} -\rho^2 + \rho^2 + 2 + \rho = 0 \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Il 1° sistema è impossibile perché $\Delta < 0$, il 2° pure perché

$\rho = -2$ non acc ($\rho \geq 0$) e quindi l'equazione ha solo la soluzione

$$z = 0.$$

2. Perché

$$\lg(1+x+\frac{1}{x^2}) + 2\lg x = \lg[(1+x+\frac{1}{x^2})x^2] = \lg(x^2+x^3+1)$$

e usando Taylor, il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lg(1+x^3+x^2) - x^3}{(\sin x - x)(\sin x + x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x^3 - x^3}{(x - \frac{x^3}{3!} - x)(x + x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-\frac{x^4}{3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{3}{x^2} = -\infty.$$

$$3. \log_{\frac{1}{2}}(4^{-x} + 2^{-x} - 1) - 3x > 0 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(4^{-x} + 2^{-x} - 1) > \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^{3x}$$

$$\Leftrightarrow 0 < 4^{-x} + 2^{-x} - 1 < (\frac{1}{2})^{3x} \Leftrightarrow \begin{cases} (2^{-x})^2 + 2^{-x} - 1 > 0 \\ (2^{-x})^3 - (2^{-x})^2 - 2^{-x} + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Posto } 2^{-x} = t: \begin{cases} t^2 + t - 1 > 0 \\ t^3 - t^2 - t + 1 > 0 \end{cases}$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t^2(t-1) - (t-1) > 0$$

$$(t-1)(t^2-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \vee t > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ (t-1)^2(t+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow t \neq 1 \wedge t > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-x} \neq 1 \\ 2^{-x} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-x} < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2^{-x} > \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \vee x < \ln_{\frac{1}{2}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

poiché $\ln_{\frac{1}{2}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$, si ha $ID =]-\infty, 0[\cup]0, \ln_{\frac{1}{2}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2}[$.

$$4. ID: \left| \frac{x}{3-\sqrt{x^2+1}} \right| > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{3-\sqrt{x^2+1}} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 3-\sqrt{x^2+1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \sqrt{x^2+1} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2+1 \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x = \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \quad ID = \mathbb{R} - \{0, +2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\}$$

poiché $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in ID \Rightarrow f$ pari

posso studiare f per $x > 0, x \neq 2\sqrt{2}$ e poi abbozzare il grafico rispetto all'asse delle y .

Asintoti: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln_{\frac{1}{2}} \left| \frac{x}{3-\sqrt{x^2+1}} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln_{\frac{1}{2}} y = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2\sqrt{2}} \ln_{\frac{1}{2}} \left| \frac{x}{3-\sqrt{x^2+1}} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln_{\frac{1}{2}} y = -\infty$$

$y = \left| \frac{x}{3-\sqrt{x^2+1}} \right|$
 $x = 0$
 $x = 2\sqrt{2}$ As. Verticali

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln_{\frac{1}{2}} \left| \frac{x}{3-\sqrt{x^2+1}} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln_{\frac{1}{2}} \left| \frac{x}{3-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \right| = \lim_{y \rightarrow 1} \ln_{\frac{1}{2}} y = 0 \quad y = 0$$

As. orizz. dx

$$y' = \frac{1}{\ln_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{3-\sqrt{x^2+1}} \right)} \cdot \frac{3-\sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(3-\sqrt{x^2+1})^2}$$

$$ID(y') = ID(y)$$

$\nexists$ pti angoloso o cuspid.

$$= - \frac{3\sqrt{x^2+1} - x^2 - 1 + x^2}{x \ln 2 (3-\sqrt{x^2+1}) \sqrt{x^2+1}} = \frac{1-3\sqrt{x^2+1}}{x \ln 2 (3-\sqrt{x^2+1}) \sqrt{x^2+1}}$$

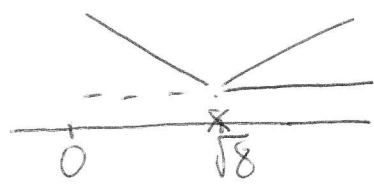
$$y' > 0 \Leftrightarrow (1-3\sqrt{x^2+1}) \cdot x (3-\sqrt{x^2+1}) > 0 \quad \text{poiché } x > 0 \text{ basta studiare}$$

$$1-3\sqrt{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1} < 1 \Leftrightarrow 9x^2+9 < 1 \quad \text{no}$$

$$3-\sqrt{x^2+1} > 0 \Leftrightarrow x^2+1 < 9 \Leftrightarrow x^2 < 8 \Leftrightarrow x < -\sqrt{8} \vee x > \sqrt{8}$$

conclusione: $y' > 0$ per $x > \sqrt{8}$ (perché $x > 0$)





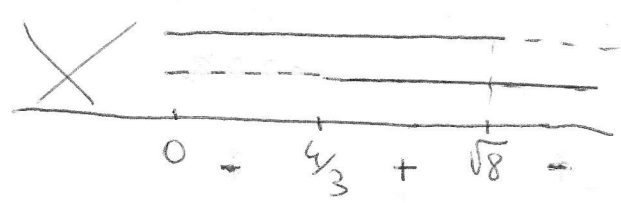
f decresce str. in $[0, \sqrt{8}]$
f cresce str. in $[\sqrt{8}, +\infty)$

Per completezza studio il segno di y' . Questo invece il segno di y'' perché troppo lungo il calcolo di y'' .

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \lim_{\epsilon} \left| \frac{x}{3 - \sqrt{x^2 + 1}} \right| > 0 \Leftrightarrow 0 < \left| \frac{x}{3 - \sqrt{x^2 + 1}} \right| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \pm\sqrt{8} \\ \frac{x}{3 - \sqrt{x^2 + 1}} < 1 \\ \frac{x}{3 - \sqrt{x^2 + 1}} > -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x - 3 + \sqrt{x^2 + 1}}{3 - \sqrt{x^2 + 1}} < 0 & \text{(I)} \\ \frac{x + 3 - \sqrt{x^2 + 1}}{3 - \sqrt{x^2 + 1}} > 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

(I) $N > 0$: $x - 3 + \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} > 3 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ x^2 + 1 > 9 + x^2 - 6x \end{cases} \begin{cases} x < 3 \\ x^2 + 1 \geq 0 \end{cases}$

$D > 0$: $3 - \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{8} < x < \sqrt{8} \quad x > 4/3$



Per $x > 0$: la (I) è verificata se $0 < x < 4/3 \vee x > \sqrt{8}$

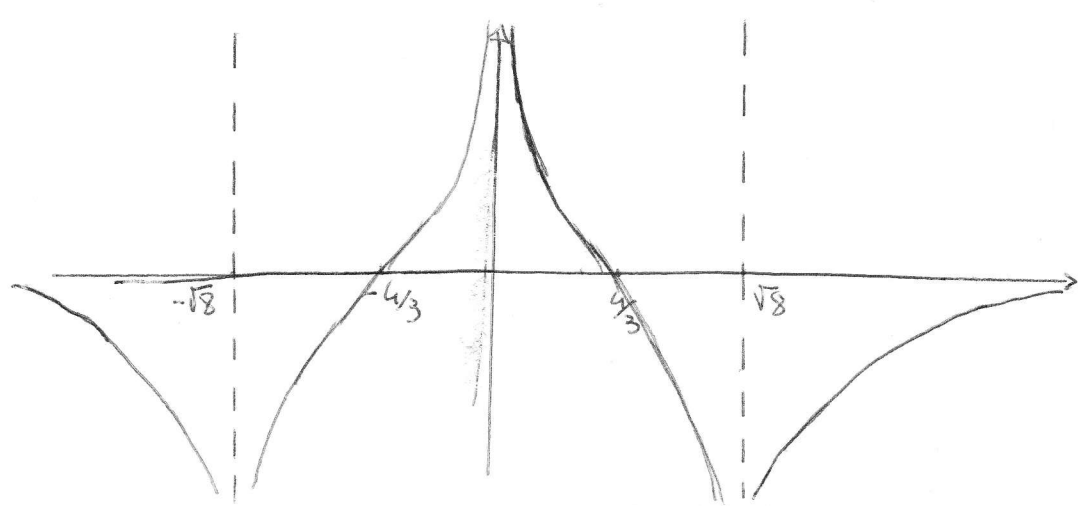
(II) $x + 3 - \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} < x + 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 > 0 \\ x^2 + 1 < x^2 + 9 + 6x \end{cases} \begin{matrix} x > 0 \\ \Leftrightarrow x > 0 \end{matrix}$

$3 - \sqrt{x^2 + 1} > 0 \Leftrightarrow -\sqrt{8} < x < \sqrt{8}$

Conclusioni: se $x > 0$ la (II) è verificata se $0 < x < \sqrt{8}$

Da qui

Per $x > 0$: $f(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 4/3$
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4/3$



(4)

$$5. i) \int \frac{\tan x}{\cos x (2 - \sin^2 x)} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x (2 - 1 + \cos^2 x)} dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x (1 + \cos^2 x)} dx$$

$$= - \int \frac{1}{t^2 (2 + t^2)} dt \quad \text{posto } \cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$$

Per la formula di Heaviside $\exists$ e sono indipendentemente determinate A, B, C, D s.t.

$$\frac{1}{t^2(1+t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} + \frac{D}{t} = \frac{A}{t} + \frac{Bt+C}{1+t^2} - \frac{D}{t^2} =$$

$$= \frac{At^3 + At + Bt^3 + Ct^2 - D - Dt^2}{t^2(1+t^2)} \quad \text{Dal principio di identità dei polinomi si ha}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-D=0 \\ A=0 \\ -D=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=-1 \\ D=-1 \end{cases} \quad \text{Quindi}$$

$$- \int \frac{1}{t^2(1+t^2)} dt = \int \left[\frac{1}{t^2+1} - \frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{t} \right) \right] dt$$

$$= -\arctan t + \frac{1}{t} + C = -\arctan \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$$

ii) Poiché g è definita e continua $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, segue che g è continua in $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ e quindi è ivi integrabile in senso classico con $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} g(x) dx = 0$ (poiché g dispari e l'intervallo di integrazione simmetrico rispetto a 0).

Però lim $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{\cos x (2 - \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x} = -\infty$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ -1

devo calcolare l'ordine di infinito.

Essendo $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos^2 x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos^2(y - \frac{\pi}{2})} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin^2 y} = +\infty$ con ord 2

$\downarrow$ $\downarrow$
 $y \rightarrow 0^+$ $y \rightarrow 0^+$

segue che g non è integrabile in senso improprio in $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ essendo infinito di ord 2 > 1 ma l'integrale improprio diverge negativamente.

ovvero $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 g(x) dx = -\infty$.