Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

9 novembre 2026

1. Risolvere la seguente equazione

$$iz^6 - (1-i)z^3 - 1 = 0$$

e disegnarne le radici nel nel campo complesso.

2. Calcolare il campo di esistenza della funzione

$$y = \frac{\left(\ln \arctan x - \ln \frac{\pi}{4}\right)^{-\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{\log_{0,5}^2 x^2 + \log_{0,5} |x| - 3}}.$$

3. Studiare, al variare di $\alpha \in R$, continuità e derivabilità della funzione

$$y = \begin{cases} \alpha & x \leq 0 \\ (\tan x)^{\tan x} & -0 < x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

e scrivere, quando possibile, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \sqrt{e^{-3x} - e^{-4x}}.$$

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) dire se è integrabile in senso improprio in $[-1, 0[$, in $]0, 1]$ e in $[1, +\infty[$.

Svolgimento

1. Posto $z^3 = w$ l'equazione diventa $iw^2 - (1-i)w - 1 = 0$ che ha soluzioni

$$w_{1/2} = \frac{1-i \pm \sqrt{(1-i)^2 + 4i}}{2i} = \frac{(1-i) \pm \sqrt{(1+i)^2}}{2i} = \frac{1-i \pm (1+i)}{2i} = \begin{cases} \frac{2}{2i} = -2i \\ \frac{-2i}{2i} = -1 \end{cases}$$

$$z^3 = -i \Rightarrow z = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \left\{ \cos \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \;\middle|\; k \in \{0,1,2\} \right\}$$

$$= \left\{ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right), \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}, \cos\frac{7}{6}\pi + i \operatorname{sen}\frac{7}{6}\pi \right\}.$$

$$z^3 = -1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi} = \left\{ \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{3} \;\middle|\; k \in \{0,1,2\} \right\}$$

$$= \left\{ \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}, \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi, \cos\frac{5}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{3}\pi \right\}.$$

L'equazione ha 6 radici complesse che in forma algebrica sono date da

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad i, \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -1, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

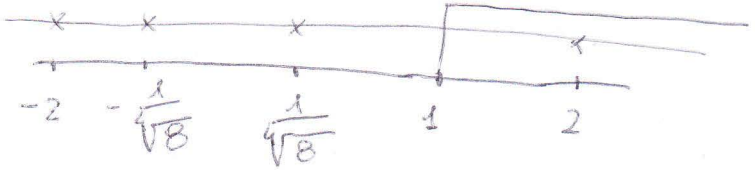
2. $$\begin{cases} \ln \operatorname{arctg} x - \ln \frac{\pi}{4} > 0 \\ \log^2_{\frac{1}{2}} x^2 + \log_{\frac{1}{2}} |x| - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln \operatorname{arctg} x > \ln \frac{\pi}{4} \\ (2 \log_{\frac{1}{2}} |x|)^2 + \log_{\frac{1}{2}} |x| - 3 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \operatorname{arctg} x > \frac{\pi}{4} \Rightarrow x > \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \\ 4 \log^2_{\frac{1}{2}} |x| + \log_{\frac{1}{2}} |x| - 3 \neq 0 \end{cases} \qquad (\log_{\frac{1}{2}} |x|)_{\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{8} = \begin{cases} \frac{-1-7}{8} = -1 \\ \frac{-1+7}{8} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} |x| \neq -1 \Rightarrow |x| \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \Rightarrow |x| \neq 2 \Rightarrow x \neq \pm 2$$

$$\log_{\frac{1}{2}} |x| \neq \frac{3}{4} \Rightarrow |x| \neq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4}} \Rightarrow |x| \neq \sqrt[4]{\frac{1}{8}} \Rightarrow x \neq \pm \sqrt[4]{\frac{1}{8}}$$

$$\begin{cases} x > \frac{\pi}{2} \\ x \neq \pm 2, \quad x \neq \pm \sqrt[4]{\frac{1}{8}} \end{cases}$$



$$ID =]1, 2[\cup]2, +\infty).$$

3. La funzione è continua per $x < 0$ (perché costante) e per $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$ perché composta di funzioni continue. Studiamo la continuità in $x = 0$.

Poiché $\lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^-} \alpha = \alpha$ mentre

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln(\operatorname{tg} x)} = \lim_{\substack{t\to 0^+ \\ \operatorname{tg} x = t}} e^{t \ln t} = e^0 = 1$$

essendo $\lim_{t\to 0^+} t \ln t = 0$ per gli ordini, segue che la funzione è continua in $x = 0 \iff \lim_{x\to 0^-} y(x) = \lim_{x\to 0^+} y(x) = y(0)$ cioè $\iff \alpha = 1$.

La funzione è derivabile per $x < 0$ e per $x \in]0, \frac{\pi}{4}[$. In $x = 0$ non è derivabile se $\alpha \neq 1$ perché non è continua. Vediamo se è derivabile per $\alpha = 1$. Poiché $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-1}{x} = 0$ mentre

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{e^{\operatorname{tg} x \ln \operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x \ln \operatorname{tg} x}}_{*} \cdot \frac{\operatorname{tg} x \ln \operatorname{tg} x}{x} = 0$$

essendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\operatorname{tg} x \ln \operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x \ln \operatorname{tg} x} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ (con $t = \operatorname{tg} x \ln \operatorname{tg} x$)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x \ln \operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \ln \operatorname{tg} x = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

Segue che la funzione non è derivabile in $x = 0$ ma ha un pto angoloso essendo $y'_-(0) = 0 \wedge y'_+(0) = +\infty$. Segue che $\nexists$ retta tangente al grafico in $x = 0$ ma $\exists$ una retta tangente a sinistra che eq. $y = 1$ e una retta tangente a destra di equazione $x = 0$.

4. $f(x) = \sqrt{e^{-3x} - e^{-4x}}$ ID: $e^{-3x} - e^{-4x} \geq 0 \Rightarrow e^{-3x} \geq e^{-4x}$

$\Rightarrow -3x \geq -4x \Rightarrow x \geq 0$

ID $= [0, +\infty)$ La funzione non è pari né dispari (ID non è simmetrico rispetto all'origine).

$\begin{cases} x=0 \\ y=\sqrt{1-1}=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ \sqrt{e^{-3x}-e^{-4x}}=0 \end{cases} \Rightarrow e^{-3x}=e^{-4x} \Rightarrow -3x=-4x \Rightarrow x=0$

$(0,0)$ unica intersezione con gli assi

$f(x)\geq 0 \iff \sqrt{e^{-3x}-e^{-4x}}\geq 0 \quad \forall x\geq 0.$

$\nexists$ asintoti verticali (perché $\nexists$ pti di accumulazione del dominio in cui f può tendere a $\pm\infty$).

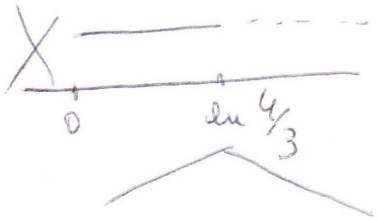
$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{e^{-3x}-e^{-4x}}=0 \qquad y=0$ As. orizzontale a $+\infty$

$y'=\frac{1}{2\sqrt{e^{-3x}-e^{-4x}}}\left(-3e^{-3x}+4e^{-4x}\right) \qquad \forall x\in D$ s.t. $e^{-3x}-e^{-4x}>0 \Rightarrow x>0$

Poiché $\lim_{x\to 0^+} y' = \lim_{x\to 0^+} \frac{-3e^{-3x}+4e^{-4x}}{2\sqrt{e^{-3x}-e^{-4x}}} = \frac{1}{0^+}=+\infty$ il grafico di f parte dall'origine con retta tangente verticale $x=0$ (e quindi rivolta verso il basso)

$y'>0 \iff -3e^{-3x}+4e^{-4x}>0 \Rightarrow e^{-3x}\left(-3+4e^{-x}\right)>0 \iff e^{-x}>\frac{3}{4}$

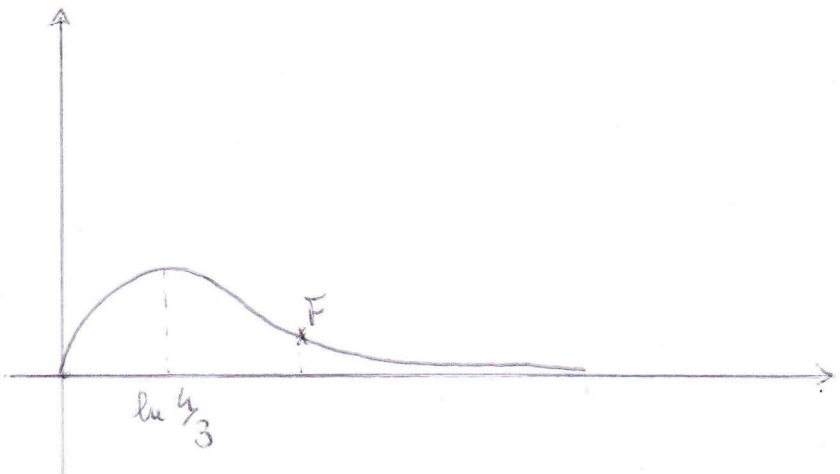
$-x>\ln 3/4 \Rightarrow x<-\ln 3/4$ cioè $x<\ln 4/3$



$\begin{cases} x=\ln 4/3 \\ y=\sqrt{e^{-3\ln 4/3}-e^{-4\ln 4/3}}=\sqrt{e^{\ln(\frac{4}{3})^{-3}}-e^{\ln(\frac{4}{3})^{-4}}} \end{cases}$

$=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^3-\left(\frac{3}{4}\right)^4}=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(1-\frac{3}{4}\right)}=\sqrt{\frac{3^3}{4^4}}=\frac{3\sqrt{3}}{16}$

Evito di studiare la derivata 2ª perché so intuisce che c'è un flesso di ascissa > ascissa del max assunto



5. i) $\int \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} dx = \int \frac{t^6}{e^t}(-3t^{-4})dt$ posto $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = t \Rightarrow$

$x = t^{-3}$, $dx = -3t^{-4}dt$

$= -3\int t^2 e^{-t} dt = 3\int t^2 D(e^{-t})dt \overset{P.P.}{=} 3\left[t^2 e^{-t} - \int 2t e^{-t} dt\right] =$

$= 3\left[t^2 e^{-t} + 2\int t\, D(e^{-t})dt\right] = 3\left[t^2 e^{-t} + 2\left(te^{-t} - \int e^{-t} dt\right)\right] = (3t^2 + 2t + 1)e^{-t} + c$

$= \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1\right) e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} + c.$

ii) In $[-1, 0[$ g è continua e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} = \frac{1}{0 \cdot e^{-\infty}} = \frac{1}{0} = +\infty$

con ord grande quindi $> \alpha > 1$

Segue che g non è integrabile in s.i. in $[-1, 0[$.

In $]0, 1]$ g è continua e $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} = \frac{1}{0 \cdot e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$ con ord

Segue che g è integrabile in s.i. in $]0, 1]$. per ordini < 1

In $[1, +\infty)$ g è continua e $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$ con ordine $2 > 1$

$x^2 \to +\infty$, $e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x}}} \to e^0 = 1$

Segue che g è integrabile in s.i. in $[1, +\infty)$.