Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

14 ottobre 2026

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$z^6 - 4i\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}z^3 - 2i\left(\frac{\cos\frac{\pi}{10}+i\sin\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}}\right)^5 z^3 = 3i^{2026}.$$

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln^3(1+\arcsin x)+x^3+1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^3(1+\arcsin x)+x^3+1-\cos x}{x^2+\sin^2 x}.$$

3. Studiare,al variare di $\alpha < 0$, continuità e derivabilità della funzione

$$y = \begin{cases} \frac{\sin x^\alpha}{x} & x > 0 \\ \frac{\arctan x}{\cos x} & x \le 0 \end{cases}$$

classificandone, se ci sono, i punti di discontinuità e di non derivabilità.

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \lg_{0,5}\left(x - \sqrt{x^2-4}\right)^2.$$

5. Dire se la funzione del punto precedente è integrabile in $]0,3[$, in $[2,4]$ e in $[4,+\infty)$ e calcolare, quando ha senso, l'integrale di f esteso ai suddetti intervalli.

Svolgimento

1. Poiché $i^{2026} = i^{2024} \cdot i^2 = (i^2)^{506} \cdot (-1) = -1$,

$$-4i\,\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = -4i\,\frac{(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3})^2-i^2} = -4i\,\frac{3-1-2\sqrt{3}i}{4} = -i(2-2\sqrt{3}i) = -2\sqrt{3}-2i,$$

$$-2i\left(\frac{\cos\frac{\pi}{10}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{10}}{\cos\frac{\pi}{5}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5}}\right)^5 = -2i\left(\cos\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{5}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{10}-\frac{\pi}{5}\right)\right)^5 = -2i\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2,$$

è equivalente alla $z^6 - 2(\sqrt{3}+i)z^3 - 2z^3 = -3 \iff$

$z^6 - 2(1+\sqrt{3}+i)z^3 + 3 = 0$ eq. bicuadratica in z. Posto $t = z^3$ si ha

$t^2 - 2(1+\sqrt{3}+i)t + 3 = 0$ $\quad \frac{\Delta}{4} = (1+\sqrt{3}+i)^2 - 3 = 1+3-1+2\sqrt{3}+2i+2\sqrt{3}i-3 =$

$= 2\sqrt{3} + i(2+2\sqrt{3})$

$t_{1/2} = 1+\sqrt{3}+i \pm \sqrt{2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})}$ Per calcolare la radice quadrata, scrivo $2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})$ in forma trigonom.

$\rho = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12+4+12+8\sqrt{3}} = 2\sqrt{7+2\sqrt{3}}$ Preso $\bar{\vartheta} \in [0, 2\pi[$,

$\cos\bar{\vartheta} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{7+2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7+2\sqrt{3}}}$ $\quad \mathrm{sen}\,\bar{\vartheta} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{7+\sqrt{3}}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{7+\sqrt{3}}}$

$$\sqrt{2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3})} = \left\{\sqrt{2\sqrt{7+2\sqrt{3}}}\left(\cos\frac{\bar{\vartheta}+2k\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\bar{\vartheta}+2k\pi}{2}\right) \mid k \in \{0,1\}\right\}$$

$$= \pm\sqrt[4]{28+8\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\bar{\vartheta}}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\bar{\vartheta}}{2}\right)$$ che non riesco a semplificare poiché $\bar{\vartheta}$ non è angolo noto.

Tornando nella posizione $t = z^3$ si hanno 6 radici complesse date da

$$z = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}+\sqrt[4]{28+8\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\bar{\vartheta}}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\bar{\vartheta}}{2}\right)}, \quad z = \sqrt[3]{1+\sqrt{3}-\sqrt[4]{28+8\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\bar{\vartheta}}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\bar{\vartheta}}{2}\right)}$$

che lasciamo indicate poiché non si può scrivere i numeri sotto radice in forma trigonometrica.

2. Poiché per $x \to 0$ $\quad \arcsin x \sim x$, $\quad \ln^3(1+\arcsin x) \sim \ln^3(1+x) \sim x^3$

$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $\quad \mathrm{sen}^2 x \sim x^2$

il primo limite diventa $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^3+\frac{1}{2}x^2}{2x^2} \overset{\text{trascuro infinitesimo di ord sup}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$

Non ha senso invece calcolare il limite per $x \to +\infty$ perché la funzione arcsen x è definita in $[-1,1]$ e quindi il dominio di $\ln^3(1+\arcsen x)$ è limitato e non ha senso vedere cose accade per $x \to +\infty$.

3. Poiché per $x > 0$ $\frac{\sen x^\alpha}{x}$ è sempre definita mentre per $x \le 0$ $\frac{\arctg x}{\cos x}$ è definita $\forall x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, segue che la funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in -\mathbb{N}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$. La funzione è continua (perché rapporto e/o composta di funzioni continue) $\forall x \neq 0$ ma è discontinua in $x=0$ essendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sen x^\alpha}{x} = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to +\infty} \cdot \sen x^\alpha \quad \nexists$$

$\nexists$ perché per $\alpha < 0$ $\lim_{x\to 0^+} \sen x^\alpha = \lim_{y \to +\infty} \sen y$ $\nexists$

mentre $\lim_{x\to 0^-} \frac{\arctg x}{\cos x} = 0$ $x=0$ discontinuità di II^a specie.

Inoltre la funzione è derivabile $\forall x \neq 0$ (per $x=0$ non è deriv. poiché non è continua) e risulta

$$y' = \begin{cases} \frac{(\cos x^\alpha)\alpha x^{\alpha-1} \cdot x - \sen x^\alpha}{x^2} = \frac{\alpha x^\alpha \cos x^\alpha - \sen x^\alpha}{x^2} & \text{se } x > 0 \\ \frac{\frac{1}{1+x^2}\cos x + (\arctg x)\cdot \sen x}{\cos^2 x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

4. ID. $(x - \sqrt{x^2-4})^2 > 0 \iff \begin{cases} x \neq \sqrt{x^2-4} \\ x^2 - 4 \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 \neq x^2 - 4 \\ x^2 - 4 \ge 0 \end{cases} \iff x \le -2 \vee x \ge 2$

$\begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \log_{\frac{1}{2}}(2)^2 = -\log_2 2^2 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ $\nexists$ intersezione y perché $0 \notin ID$

$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\log_2(\ )^2 \end{cases} \iff \log_2(\ )^2 = 0 \iff (x - \sqrt{x^2-4})^2 = 1 \iff x - \sqrt{x^2-4} = \pm 1$

$x - \sqrt{x^2-4} = 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 + 1 - 2x = x^2 - 4 \end{cases} \begin{cases} x \ge 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$ ecc. $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ unica intersez. con asse x

$x - \sqrt{x^2-4} = -1 \Rightarrow x + 1 = \sqrt{x^2-4} \Rightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2 + 2x + 1 = x^2 - 4 \end{cases} \begin{cases} x \ge -1 \\ x = -5/2 \end{cases}$ $\nexists$

$f(x) \geq 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x-\sqrt{x^2-4})^2 \geq 0 \Rightarrow 0 < (x-\sqrt{x^2-4})^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x-\sqrt{x^2-4} \leq 1$

$\begin{cases} x+1 \geq \sqrt{x^2-4} & 1^a \\ x-1 \leq \sqrt{x^2-4} & 2^a \end{cases}$

$1^a \Rightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \\ x^2+2x+1 \geq x^2-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq -2 \vee x \geq 2 \\ x \geq -\frac{5}{2} \end{cases} \quad \not\Rightarrow x \geq 2$

$2^a \Rightarrow \begin{cases} x-1 \leq 0 \\ x^2-4 \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2-2x+1 \leq x^2-4 \end{cases} \Rightarrow x \leq -2 \vee x \geq \frac{5}{2}$

$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \quad x \geq \frac{5}{2}$

$f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \geq \frac{5}{2}$

$f(x) \leq 0 \quad x \leq -2 \vee 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

<u>Asintoti</u> $\nexists$ as. verticali perché non ci sono punti in cui f può andare all'∞ ($\pm 2 \in ID$)

$\lim_{x \to -\infty} \log_{\frac{1}{2}}(x-\sqrt{x^2-4})^2 = \lim_{y \to -\infty} \log_{\frac{1}{2}} y^2 = -\infty$ posto $y = x-\sqrt{\ }$ $\quad \nexists$ as. or. a $-\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \log_{\frac{1}{2}}(x-\sqrt{x^2-4})^2 = \lim_{y \to 0} \log_{\frac{1}{2}} y^2 = +\infty$ $\quad \nexists$ as. or. a $+\infty$

perché $\lim_{x \to +\infty} x-\sqrt{x^2-4} = +\infty - \infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-x^2+4}{x+\sqrt{x^2-4}} = 0$

Perché $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ per gli ordini (essendo logaritmo un infinito molto lento per $x \to \pm\infty$ e per $x \to 0^+$)

$\nexists$ as obliqui a $\pm\infty$. Dunque la funzione non ha asintoti.

Studio della derivata prima

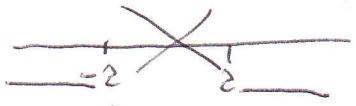
$f'(x) = D\left(2 \log_{\frac{1}{2}} |x-\sqrt{x^2-4}|\right) = \frac{2}{\log \frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-4})} \cdot \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}\right)$

$D \log_a |x| = \frac{1}{x \ln a}$ $\qquad \forall x \in ID(f) : x^2-4 > 0$

$= \frac{2}{-\log 2 (x-\sqrt{x^2-4})} \cdot \frac{\sqrt{x^2-4}-x}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{2}{\log 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ $\qquad ID(f') = ID(f) - \{\pm 2\}$

$\lim_{x \to -2^-} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 2^-} f'(x) = +\infty \qquad x = \pm 2$ pti di semicuspide

$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} > 0 \qquad x < -2 \vee x > 2$

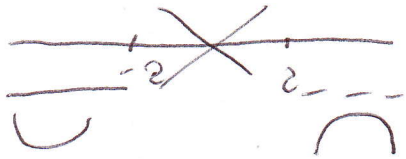


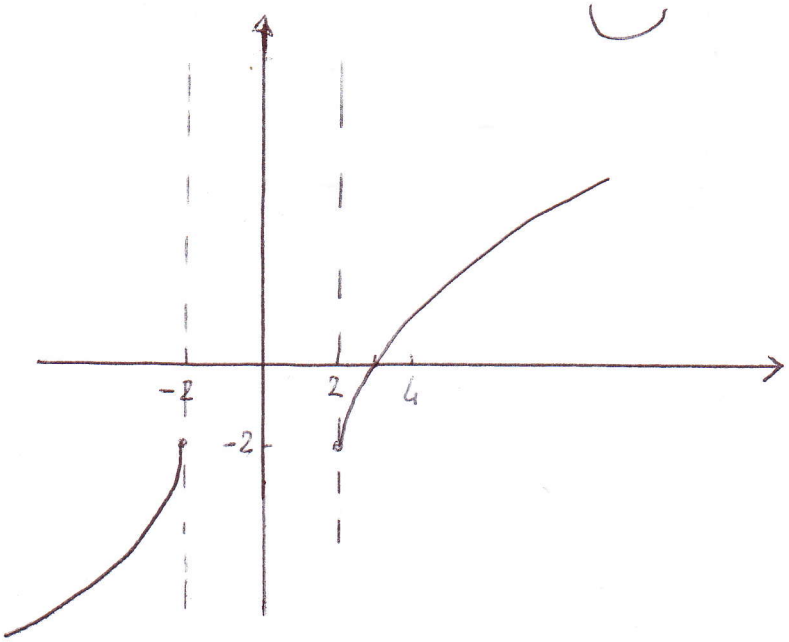
f cresc. in $(-\infty, -2]$ e in $[2, +\infty)$ $\quad (-2, -2)$ min rel $\quad (2, -2)$ max rel

Studio della derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2}{\lg 2} D \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{2}{\ln 2}\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2-4)^{-\frac{1}{2}-1}(2x) = -\frac{2x}{\lg 2 (\sqrt{x^2-4})^3}$$

$f''(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x < -2 \vee x > 2 \end{cases} \qquad x < -2$





5. f non è integrabile in $]0, 3]$ perché non è definita in tutto questo intervallo

f è integrabile s. R. in $[2, 4]$ perché continua in questo intervallo chiuso e limitato.

f non è integr. in s. i. in $[4, +\infty)$, pur essendo lì continua, perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Segue che $\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$. Per calcolare invece $\int_2^4 f(x)\,dx$ studio prima l'integrale indefinito.

$$\int \lg_{0,5}(x - \sqrt{x^2-4})^2\,dx \overset{P.P.}{=} x \lg_{0,5}(x-\sqrt{x^2-4})^2 - \int x \cdot \frac{2}{\lg 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$

$$= x \lg_{0,5}(x-\sqrt{x^2-4})^2 - \frac{1}{\lg 2}\int 2x (x^2-4)^{-\frac{1}{2}}\,dx = x \lg_{0,5}(x-\sqrt{x^2-4})^2 - \frac{1}{\lg 2}\frac{(x^2-4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$\int_2^4 f(x)\,dx = \left[x \lg_{0,5}(x-\sqrt{x^2-4})^2 - \frac{2}{\lg 2}\sqrt{x^2-4}\right]_2^4 = 8 \lg_{0,5}(4-\sqrt{12}) - \frac{2}{\lg 2}\cdot\sqrt{12} - 4.$$