Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

18 settembre 2026

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$iz^4 + 2z^2 - 2i = 0.$$

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[15]{1-\tan x}-1}{\sin x}, \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[15]{1-\tan x}-1}{\sin x}.$$

3. Dire per quali valori di $\alpha \in R$ la funzione

$$y = x^{\alpha}\,|\arctan x|$$

è derivabile e scrivere, quando possibile, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \left|\ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x}\right)\right|.$$

5. Dire se la funzione del punto precedente è integrabile in senso improprio in $]0,1[$ e in $[2,+\infty[$.

6. Calcolare

$$\int \sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}}\,dx.$$

Svolgimento

1. Posto $z^2 = w$ si ottiene $iw^2 + 2w - 2i = 0$ e quindi

$$w_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2i^2}}{i} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{i} = \frac{-1 \pm i}{i} = -\frac{1}{i} \pm 1 = -\frac{i^2}{i^2} \pm 1 = \pm 1 + i$$

$$w^2 = 1+i \Rightarrow w = \sqrt{1+i} = \sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)} = \left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right) \,/\, k \in \{0,1\}\right\}$$

$$= \left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right), \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9}{8}\pi\right)\right\} = \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{8}\right)$$

$$w^2 = -1+i \Rightarrow w = \sqrt{-1+i} = \sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\tfrac{3}{4}\pi\right)} = \pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3}{8}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{8}\pi\right).$$

L'equazione ha 4 radici complesse a due a due opposte.

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[15]{1-\mathrm{tg}\,x} - 1}{\mathrm{sen}\,x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{(1-\mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{15}} - 1}{-\mathrm{tg}\,x}}_{\to \frac{1}{15}} \underbrace{\frac{1}{-\cos x}}_{\to -1} = -1$$

(N.B. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\mathrm{tg}\,x)^{\frac{1}{15}} - 1}{-\mathrm{tg}\,x} \underset{t=-\mathrm{tg}\,x}{=} \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\frac{1}{15}} - 1}{t} = \frac{1}{15}$)

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[15]{1-\mathrm{tg}\,x} - 1}{\mathrm{sen}\,x} \nexists$ perché la funzione è periodica di periodo π (essendo $\mathrm{tg}\,x$ π-periodica e $\mathrm{sen}\,x$ 2π-per.)

3. Prima di vedere se la funzione è derivabile in $x=0$, osservo che è definita in $x=0$ per $\alpha > 0$ (per $\alpha = 0$ l'espressione 0^0 non ha senso mentre per $x<0$ x^α avrebbe senso solo per alcuni valori di α e non $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$). Studio perciò la derivabilità in $x=0$ solo nel caso $\alpha > 0$. Poiché in tal caso $f(0) = 0$, si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha |\mathrm{arctg}\,x|}{x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} \underbrace{\left|\frac{\mathrm{arctg}\,x}{x}\right|}_{\to 1} \cdot |x|$$

$$= \lim_{x\to 0^\pm} \pm x^\alpha \cdot 1 = 0 = 0$$

Dunque f è derivabile in $x=0$ $\forall\, \alpha > 0$ e $f'(0) = 0$. Segue che la retta tangente in $x=0$ ha equazione $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = 0$.

4. Basta studiare la funzione $y = \ln \frac{e^x-1}{e^x}$ e poi fare il valore assoluto, cioè ribaltare il suo grafico rispetto all'asse x.

$y = \ln \frac{e^x-1}{e^x}$ ID: $\frac{e^x-1}{e^x} > 0 \iff e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$

$ID =]0, +\infty)$ f non è né pari né dispari poiché il suo dominio non è simmetrico rispetto a 0

$\nexists$ intersezione con asse y poiché $0 \notin ID$

$\nexists$ inters. con asse x poiché $\ln \frac{e^x-1}{e^x} = 0 \iff \frac{e^x-1}{e^x} = 1 \iff e^x - 1 = e^x \quad -1 = 0$ $\emptyset$

$\ln \frac{e^x-1}{e^x} > 0 \iff \frac{e^x-1}{e^x} > 1 \iff e^x - 1 > e^x \iff -1 > 0$ $\emptyset$

La funzione è sempre ste. negativa nel suo dominio

$\lim_{x \to 0^+} \ln \frac{e^x-1}{e^x} = \lim_{y \to 0^+} \ln y = -\infty$ $\quad y = \frac{e^x-1}{e^x}$ $\quad x = 0$ As. vert.

$\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{e^x-1}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{e^x}\right) = \ln 1 = 0$ $\quad y = 0$ As. orizz. a $+\infty$

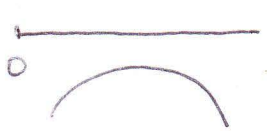
$y' = \frac{e^x}{e^x-1} \cdot \frac{e^x \cdot e^x - e^x(e^x-1)}{e^{2x}} = \frac{e^x}{(e^x-1)e^x} = \frac{1}{e^x-1}$ $\quad \forall x > 0$

$y' > 0 \iff e^x - 1 > 0 \Rightarrow x > 0$



f sempre crescente nel suo dominio

$y'' = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2}$ $\quad \forall x > 0$ $\quad y'' > 0 \iff \frac{e^x}{(e^x-1)^2} < 0$ $\emptyset$



f sempre concava nel suo dominio

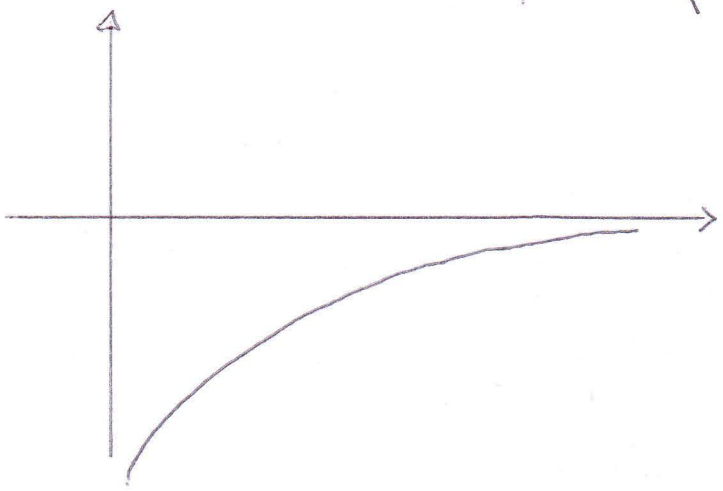


Grafico di $y = \ln \frac{e^x-1}{e^x}$

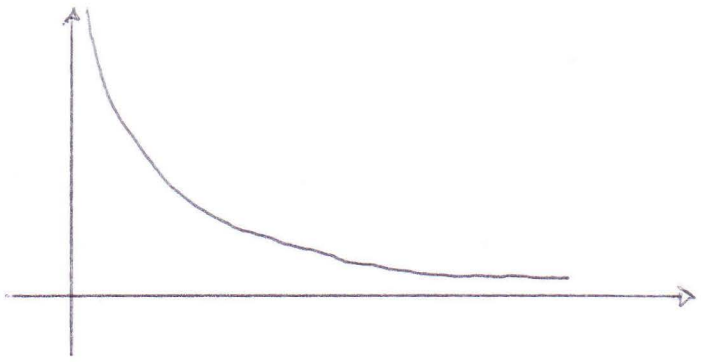


Grafico di

$$y = \left| \ln \frac{e^x - 1}{e^x} \right|$$

5. Per studiare l'integrabilità di f in $]0,1[$ e in $[2,+\infty)$ posso non considerare il valore assoluto poiché l'ordine di infinito o infinitesimo non cambia.

In $]0,1[$ $\quad y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x}$ è continua, limitata e quindi integr. in un intorno di 1 mentre per $x \to 0^+$ occorre studiare l'ordine di infinito.

Poiché $\ln x$ per $x \to 0^+$ è infinito di ordine comunque lento e quindi di ordine $< \alpha < 1$, la funzione è integrabile in un intorno di 0 e quindi è integrabile in $]0,1[$.

In $[2,+\infty)$ la funzione è continua e per $x \to +\infty$ è un infinitesimo di ordine comunque grande (poiché $\ln \frac{e^x - 1}{e^x} = \ln(1 - e^{-x}) \sim -e^{-x}$ che va a 0 per $x \to +\infty$ molto velocemente) e quindi di ord $> \alpha > 1$. Segue che f è integ. anche in $[2,+\infty)$.

6. Posto $\sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}} = t \Rightarrow \frac{e^x}{1+e^x} = t^2 \Rightarrow x = \ln \frac{t^2}{1-t^2}$

Segue che $dx = \frac{1-t^2}{t^2} \frac{2t(1-t^2) - t^2(-2t)}{(1-t^2)^2} dt = \frac{2t}{t^2(1-t^2)} dt = \frac{2}{t(1-t^2)} dt$

e quindi

$$\int \sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}}\, dx = \int t \cdot \frac{2\,dt}{t(1-t^2)}\, dt = \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + c$$

$$= \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + c = \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}}}{1 - \sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}}} \right| + c$$