

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

13 luglio 2026

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^6 - (2 - i)z^3 + 1 - i = 0$$

e disegnarne le radici nel campo complesso.

2. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[10]{1 - \sin x} - 1}{\tan x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[10]{1 - \sin x} - 1}{\tan x}.$$

3. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$y = |x|^\alpha \tan x$$

è derivabile e scrivere, quando possibile, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{1 + \ln |x|}{x \ln |x|}.$$

Per lo studio della convessità, si consiglia di non studiare il segno della derivata seconda.

5. Dire se la funzione del punto precedente è integrabile in senso improprio in $]0, 1[$ e in $[2, +\infty[$.

6. Calcolare

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1 + \ln x}{\ln x}} dx.$$

Svolgimento

1. Posto $z^3 = w$ l'equazione diventa $w^2 - (2-i)w + 1-i = 0$ che ha

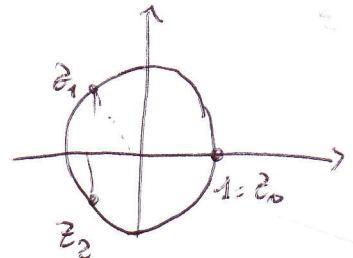
$$\text{soluzioni } w_{1/2} = \frac{2-i \pm \sqrt{(2-i)^2 - 4(1-i)}}{2} = \frac{2-i \pm \sqrt{4-4i+i^2-4+4i}}{2} = \frac{2-i \pm i}{2} = \begin{cases} 1 \\ 1-i \end{cases}$$

$$z^3 = 1 \Rightarrow z = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0 + i \sin 0} = \left\{ \cos \frac{0+2k\pi}{3} + i \sin \frac{0+2k\pi}{3} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

Per $k=0$: $z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$

$k=1$: $z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

$k=2$: $z_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$



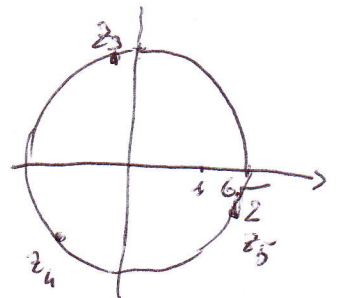
N.B. le tre radici cubiche di 1 sono vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1

$$z^3 = 1-i \Rightarrow z = \sqrt[3]{1-i} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)} = \left\{ \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

Per $k=0$ $z_3 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$

$k=1$ $z_4 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

$k=2$ $z_5 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$



N.B. le tre radici cubiche di $1-i$ sono vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[6]{2}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \sin x)^{1/10} - 1}{\sin x} \cdot \cos x = -\frac{1}{10}$ perché $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\alpha} - 1}{x} = \alpha$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[10]{1 - \sin x} - 1}{\lg x}$ $\nexists$ perché essendo $f(x) = \frac{\sqrt[10]{1 - \sin x} - 1}{\lg x}$ funzione periodica di periodo π , non ammette limite a $+\infty$.

3. Prima di tutto osservo che la funzione è definita in

$$D = \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad \text{se } \alpha > 0$$

$$D = \mathbb{R}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \quad \text{se } \alpha < 0$$

Poiché la derivata di $|x|^\alpha$ vale $\alpha |x|^{\alpha-2} \frac{x}{|x|} = \alpha |x|^{\alpha-1} \frac{|x|}{x} = \alpha \frac{|x|^\alpha}{x} \quad \forall x \neq 0$

mentre la derivata di $\lg x$ vale $\frac{1}{x \ln x} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$,
la funzione prodotto è sicuramente derivabile $\forall x \in D$ con $x \neq 0$.

Nel pto $x_0 = 0$ se $\alpha < 0$ la funzione non è definita e quindi non ha senso studiarne la derivabilità; se $\alpha = 0$ la funzione

si riduce a $y = \lg x$ che è derivabile in $x_0 = 0$ con $y'(0) = \frac{1}{\ln 0} = 1$;
se $\alpha > 0$ applicando la definizione di derivata si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^\alpha \lg x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} |x|^\alpha \frac{\lg x}{x} = 0 \quad \text{e quindi } y'(0) = 0.$$

$\downarrow \quad \quad \downarrow$
 $0 \quad \quad 1$

Poiché se f è derivabile in un pto $x_0 \in \text{dominio}$, l'equazione delle rette tangente è $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, si conclude che la retta tangente in $x_0 = 0$ esiste $\forall \alpha \geq 0$ e le equazioni

$$y = x \quad \text{se } \alpha = 0, \quad y = 0 \quad \text{se } \alpha > 0.$$

4. $f(x) = \frac{1 + \ln|x|}{x \ln|x|}$

$$D: \begin{cases} x \neq 0 \\ \ln|x| \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \end{cases} \quad D = \mathbb{R} - \{0, +1, -1\}$$

Poiché $f(-x) = \frac{1 + \ln|x|}{-x \ln|x|} = -f(x) \quad \forall x \in D$, la funzione è dispari.

Posso studiarla per $x > 0$ e poi, disegnato il grafico, ribaltarla rispetto

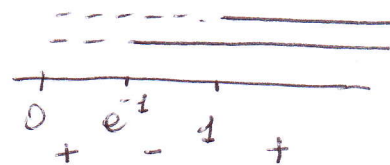
all'origine. D'ora in poi studio

(3)

$$y = \frac{1 + \ln x}{x \ln x} \quad \text{per } x > 0$$

Positiva: $N > 0 \quad \ln x > -1 \Rightarrow x > e^{-1}$

$D > 0 \quad x \ln x > 0 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$
($x > 0$)



f positiva per $x \in]0, e^{-1}[\cup]1, +\infty[$, negativa per $x \in]e^{-1}, 1[$

Intersezioni con asse y per $0 \notin D \quad \begin{cases} y = 0 \\ 1 + \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = e^{-1} \quad \begin{pmatrix} e^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$
intersezione con asse x

Asintoti verticali

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty$$

perché $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^-$ per gli ordini

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} = \frac{1}{0^\pm} = \pm \infty$$

$x = 0$
 $x = 1$ asintoti verticali

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{1}{x}}_0 \cdot \underbrace{\frac{1 + \ln x}{\ln x}}_1 = 0$$

$y = 0$ as. orizz. a $+\infty$

$$y' = \frac{\frac{1}{x}(x \ln x) - (1 + \ln x)(\ln x + x \cdot \frac{1}{x})}{(x \ln x)^2} = \frac{\ln x - 1 - \ln^2 x - 2 \ln x}{x^2 \ln^2 x} = -\frac{\ln^2 x + \ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$$

$$ID(y') = ID(y)$$

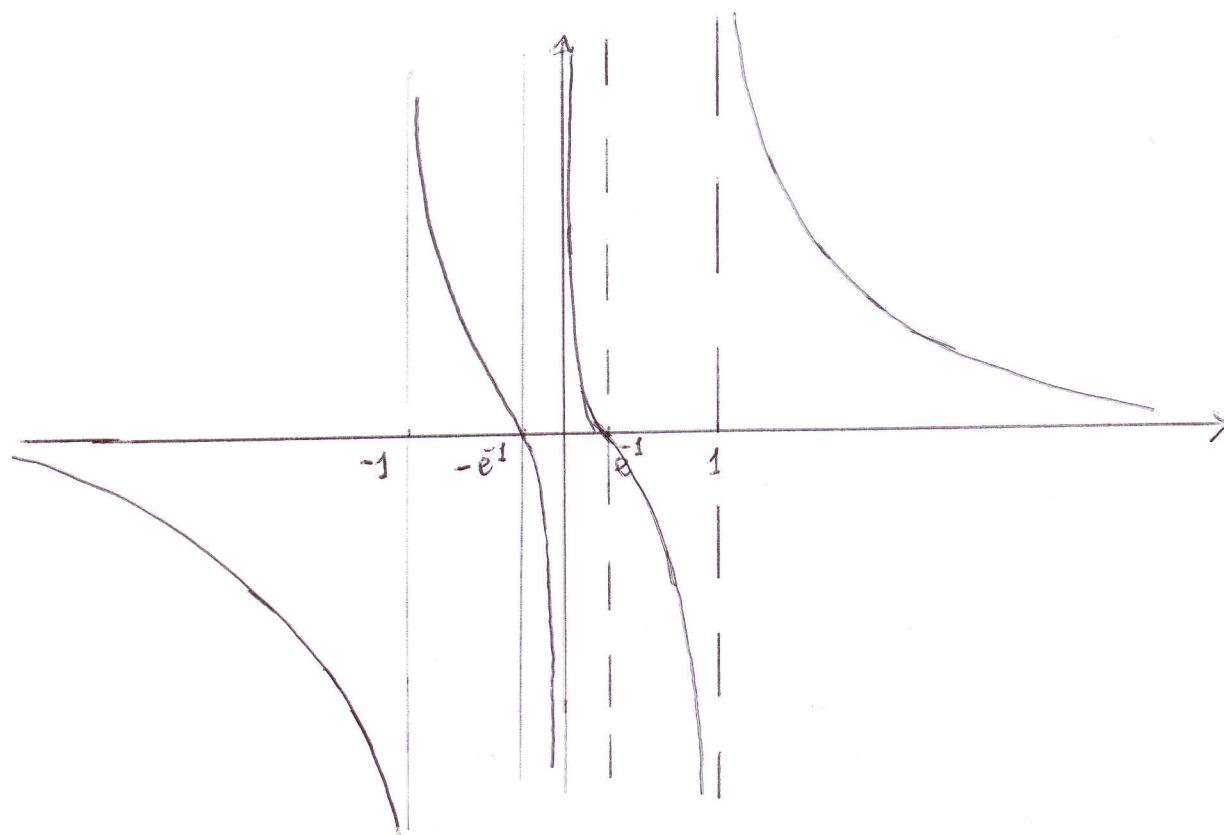
La funzione è sempre derivabile nel suo dominio

$$y' > 0 \Leftrightarrow \ln^2 x + \ln x + 1 < 0 \quad \emptyset$$



La funzione decresce in $]0, 1[$ e in $]1, +\infty[$.

Anche senza studiare il segno delle derivate seconde, si intuisce che esiste un flesso tra 0 e 1 e, per simmetria, un altro flesso tra -1 e 0.



5. Poiché f è continua in $]0, 1[$ ma divergente per $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow 1^-$, fissato un pto $c \in]0, 1[$ f sarà integrabile in s.i. in $]0, 1[$ se lo è in $]0, c]$ e in $[c, 1[$. In realtà

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \underbrace{\frac{1}{x \ln x}}_{\substack{\downarrow \\ -\infty \text{ con ord } < 1}} + \frac{1}{x} = -\infty + \infty = +\infty \quad \text{con ordine } 1$$

$\hookrightarrow +\infty \text{ con ord } 1$

(trascurato l'infinito più lento $\frac{1}{x \ln x}$) e quindi f non è integ. in s.i. in $]0, c]$ e perciò non è integ. in s.i. in $]0, 1[$.

Inoltre f non è integ. in s.i. in $[2, +\infty)$ perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} + \frac{1}{x} = 0 \quad \text{con ordine } \neq 1 \quad \left(\text{trascurato } \frac{1}{x \ln x} \text{ infinitesimale più veloce di } \frac{1}{x} \right).$$

(5)

$$6. \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+\ln x}{\ln x}} dx = \int \sqrt{\frac{1+t}{t}} dt =$$

$$\downarrow \text{poslo } \ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$$

$$\text{Poslo } z = \sqrt{\frac{1+t}{t}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{t} = z^2$$

$$\text{dés } t = \frac{1}{z^2-1} \Rightarrow dt = \frac{-2z dz}{(z^2-1)^2}$$

$$= \int z \cdot \frac{-2z}{(z^2-1)^2} dz = -2 \int \frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)^2} dz$$

Per Heurwite

$$\frac{z^2}{(z-1)^2(z+1)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{d}{dz} \frac{Cz+D}{z^2-1} =$$

$$= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C(z^2-1) - 2z(Cz+D)}{(z^2-1)^2} \quad \text{e quindi}$$

$$z^2 = A(z-1)(z+1)^2 + B(z+1)(z-1)^2 + Cz^2 - 2Dz - C$$

$$\text{Per } z=1: \quad 1 = 0 + 0 - C - 2D - C \Rightarrow 2C + 2D = -1$$

$$\Rightarrow 2C + 2D = -1$$

$$z=-1: \quad 1 = 0 + 0 - C + 2D - C \Rightarrow 2C - 2D = -1$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{2} \\ D = 0$$

$$z=0 \quad 0 = A + B + \frac{1}{2} \cdot 0 - 0 + \frac{1}{2}$$

$$A + B = -\frac{1}{2}$$

$$z=2 \quad 4 = 9A + 3B - 4C + 4D - C \Rightarrow 9A + 3B = -\frac{5}{2} - 4$$

$$\Rightarrow A = -\frac{5}{6} \\ B = \frac{1}{3}$$

$$= -2 \int \left(\frac{-\frac{5}{6}}{z-1} + \frac{\frac{1}{3}}{z+1} + \frac{d}{dz} \frac{-\frac{1}{2}z}{z^2-1} \right) dz$$

$$= -2 \left[-\frac{5}{6} \ln|z-1| + \frac{1}{3} \ln|z+1| - \frac{1}{2} \frac{z}{z^2-1} \right] + C$$

$$= +\frac{5}{3} \ln \left| \sqrt{\frac{1+\ln x}{\ln x}} - 1 \right| + \frac{2}{3} \ln \left(\sqrt{\frac{1+\ln x}{\ln x}} + 1 \right) + \ln x \sqrt{\frac{1+\ln x}{\ln x}} + C.$$