Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

22 giugno 2026

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} + \left(\frac{\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{14} + i\sin\frac{\pi}{14}}\right)^{14}.$$

2. Studiare il dominio della seguente funzione

$$y = \left[\arctan\left(\ln^2 x^2 - 2\ln|x| - 8\right)\right]^{-\pi}.$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}.$$

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\ln|e^x - 1|}.$$

   Per lo studio della convessità, si consiglia di non studiare il segno della derivata seconda ma di calcolare $\lim_{x\to 0} f'(x)$.

5. Dire se la funzione del punto precedente è integrabile in senso improprio in $[-1, 0[$, $]0, \ln 2[$ e in $[1, +\infty[$.

6. Calcolare

$$\int \frac{\tan^2 x + 2}{\tan^2 x - 5\tan x + 6}\,dx.$$

Svolgimento

1. Poiché $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{100} = \left[\frac{(1+i)^2}{(1-i^2)}\right]^{100} = \left(\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+2i}{1+1}\right)^{100} = i^{100} = (i^4)^{25} = 1$

mentre $\left(\frac{\cos\frac{\pi}{7} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{14} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{14}}\right)^{14} = \cos\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{14}\right)14 + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7} - \frac{\pi}{14}\right)14 = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$

l'equazione diventa $z^3 - 3z^2 + 4z - 2 = 0$ che ha $z = 1$ come radice.

Dividendo con Ruffini si ha

	1	-3	4	-2
1		1	-2	2
	1	-2	2	//

e quindi l'equazione diventa

$(z-1)(z^2 - 2z + 2) = 0$ che ha 3 radici $z = 1$ reale, $z = 1 \pm i$ complesse

poiché $z^2 - 2z + 2 = 0 \iff z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$.

2. ID: $\operatorname{arctg}(\ln^2 x^2 - 2\ln|x| - 8) > 0$ (perché la funzione potenza con esponente irrazionale negativo è definito per $x > 0$)

$\iff \ln^2 x^2 - 2\ln|x| - 8 > 0 \iff$ (poiché $\ln^2 x^2 = (\ln x^2)^2 = (2\ln|x|)^2 = 4\ln^2|x|$)

$4\ln^2|x| - 2\ln|x| - 8 > 0 \iff 2\ln^2|x| - \ln|x| - 4 > 0$

$(\ln|x|)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$ $\quad \ln|x| < e^{\frac{1-\sqrt{33}}{4}} \ \vee \ \ln|x| > e^{\frac{1+\sqrt{33}}{4}}$

quindi $0 < |x| < e^{\frac{1-\sqrt{33}}{4}} \ \vee \ |x| > e^{\frac{1+\sqrt{33}}{4}} \iff$

$-e^{\frac{1-\sqrt{33}}{4}} < x < 0 \ \vee \ 0 < x < e^{\frac{1-\sqrt{33}}{4}} \ \vee \ x < -e^{+\frac{1+\sqrt{33}}{4}} \ \vee \ x > e^{\frac{1+\sqrt{33}}{4}}$

$ID = \left(-\infty, -e^{\frac{1+\sqrt{33}}{4}}\right[\cup \left]-e^{\frac{1-\sqrt{33}}{4}}, 0\right[\cup \left]0, e^{\frac{1-\sqrt{33}}{4}}\right[\cup \left]e^{\frac{1+\sqrt{33}}{4}}, +\infty\right).$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - \operatorname{sen} x}{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{1} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\cancel{1} - \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5) - \cancel{1} + \cancel{\frac{x^2}{2}}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{\frac{x^4}{24}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{24}{2} \cdot \frac{1}{x^2} = +\infty$

4. $\ln|e^x-1| \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} |e^x-1|>0 \\ |e^x-1| \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x-1 \neq 0 & e^x \neq 1 & x \neq 0 \\ e^x-1 \neq 1 & e^x \neq 2 & x \neq \ln 2 \\ e^x-\cancel{1} \neq -\cancel{1} & \forall x & \end{cases}$

$ID = (-\infty, 0[\cup]0, \ln 2[\cup]\ln 2, +\infty)$

Poiché ID non è simmetrico rispetto all'origine, f non è né pari né dispari.

$f(x)>0 \iff \dfrac{e^x-1}{\ln|e^x-1|}>0$ $\quad N>0 \quad e^x-1>0 \quad e^x>1 \quad x>0$

$D>0 \quad \ln|e^x-1|>0 \iff |e^x-1|>1 \iff$

$e^x-\cancel{1}<-\cancel{1} \;\vee\; e^x-1>1$

$\emptyset \qquad x>\ln 2$

$+ \quad 0 \quad - \quad \ln 2 \quad +$

asintoti verticali

$\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\ln|e^x-1|} = \dfrac{0}{-\infty} = 0$ $\quad \nexists$ As. v. in $x=0$ $\quad$ f prolungabile per continuità in $x=0$

$\lim_{x\to(\ln 2)^\pm} \dfrac{e^x-1}{\ln|e^x-1|} = \dfrac{1}{(\ln 1)^\pm} = \dfrac{1}{0^\pm} = \pm\infty$ $\quad x=\ln 2$ As. vert.

Asintoti orizz.

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{\ln|e^x-1|} = \dfrac{-1}{\ln 1^-} = +\infty$ $\quad \nexists$ as. orizz a $-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{\ln|e^x-1|} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = +\infty$ $\quad$ per gli ordini perché ord e^x >> ord $\ln|e^x-\cancel{1}|$ = ord x = 1

$\nexists$ as. orizz. a $+\infty$

As. obliqui

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1}{\ln|e^x-1|} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

poiché $\lim_{x\to-\infty} x\ln|e^x-1| = -\infty \cdot 0 = \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\ln|e^x-1|}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{e^x}{e^x-1}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to-\infty} -\dfrac{x^2 e^x}{\underbrace{e^x-1}_{\to -1}} = +\infty \cdot 0^+ = 0^+$ $\quad$ per gli ordini poiché $x^2 e^x \to 0$ molto velocemente per $x\to-\infty$

$\nexists$ as. obliquo a $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - \cancel{1}}{\ln|e^x - \cancel{1}|}\cdot\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = +\infty$ per gli ordini

$\nexists$ as. ob. a $+\infty$

$$y' = \frac{e^x \ln|e^x-1| - \cancel{(e^x-1)}\cdot\frac{e^x}{\cancel{e^x-1}}}{\ln^2|e^x-1|} = \frac{e^x\left(\ln|e^x-1|-1\right)}{\ln^2|e^x-1|} \qquad ID(y') = ID(y)$$

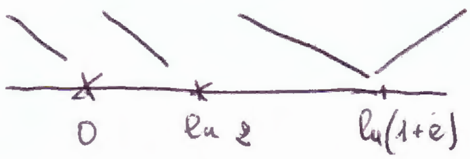
la funzione è sempre derivabile nel suo ID.

Inoltre $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\overset{1}{e^x}\,(\overset{-\infty}{\ln|e^x-1|}-1)}{\underbrace{\ln^2|e^x-1|}_{+\infty}} = 0$ perché $\operatorname{ord}(\ln|e^x-1|) < \operatorname{ord}(\ln^2|e^x-1|)$

Dunque per $x\to 0$ la funzione tende a 0 insieme alla sua derivata.
$x=0$ pto di flesso a tangente verticale per la funzione prolungata ponendola $=0$ per $x=0$.

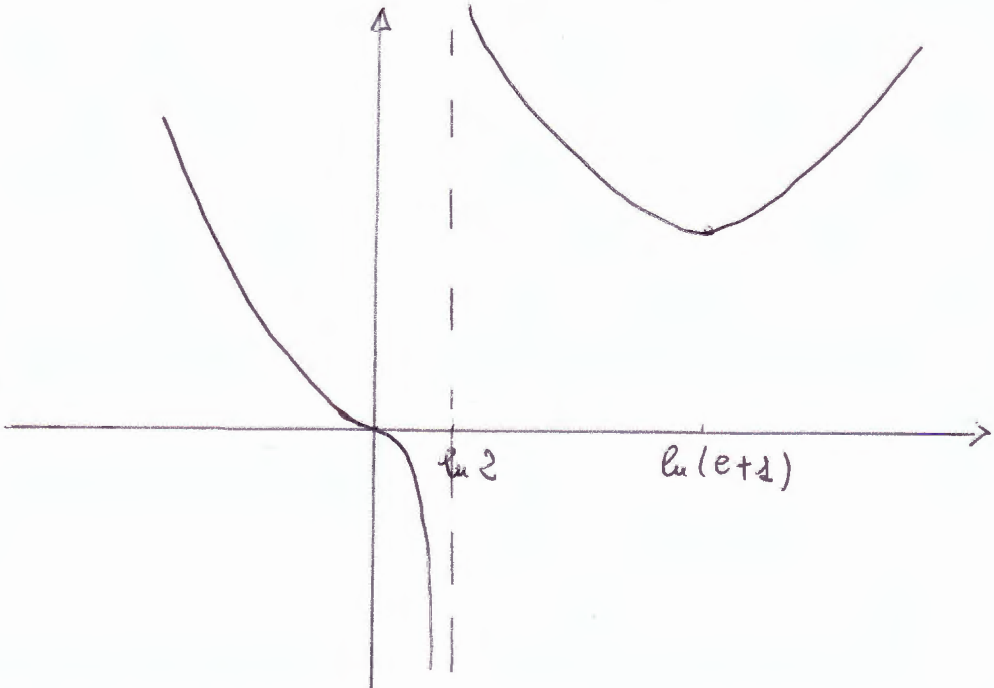
$y'>0 \iff \ln|e^x-1|>1 \iff |e^x-1|>e \iff \underbrace{e^x<1-e}_{<0 \text{ imposs}} \ \vee\ e^x>1+e$

$x>\ln(1+e)$



$m\begin{cases} x = \ln(1+e) \\ y = \frac{\cancel{1}+e-\cancel{1}}{\ln|\cancel{1}+e-\cancel{1}|} = e \end{cases}$

N.B. Per $x\to+\infty$ $f(x)$ è sempre rivolta verso l'alto perché si comporta grosso modo come e^x.



5. f è integrabile in $[-1,0[$ perché continua e prolungabile con continuità per $x\to 0$ essendo $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \in \mathbb{R}$.

Poiché f è continua in $]0,\ln 2[$ e prolungabile per continuità in 0, bisogna studiare il suo comportamento per $x\to \ln 2^-$.

Si noti che $\lim_{x \to \ln 2} \frac{e^x - 1}{\ln|e^x - 1|} = \frac{1}{\ln 1} = -\infty$ con ord. 1 (perché

$\lim_{x \to \ln 2} \ln|e^x - 1| = 0$ con ord 1 essendo $\lim_{x \to \ln 2} \frac{\ln|e^x-1|}{x - \ln 2} \overset{H}{=} \lim_{x \to \ln 2} \frac{e^x}{e^x - 1} = 2 \neq 0$)

e perciò f non è integr. in s.i. in $]0, \ln 2[$.

Infine f non è integr. in s.i. in $[1, +\infty)$ perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6. Posto $t = \operatorname{tg} x \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{1}{1+t^2} dt$ l'integrale diventa

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2}{\operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 6} dx = \int \frac{t^2 + 2}{(t^2 - 5t + 6)(t^2 + 1)} dt = \int \frac{t^2 + 2}{(t-2)(t-3)(t^2+1)} dt.$$

Per Hermite esistono $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{t^2 + 2}{(t-2)(t-3)(t^2+1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-3} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1} = \frac{A(t-3)(t^2+1) + B(t-2)(t^2+1) + (Ct+D)(t^2-5t+6)}{(t-2)(t-3)(t^2+1)}.$$

uguagliando i numeratori, si ha

$$\begin{array}{l} \text{per } t = 2 \\ t = 3 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} -5A = 6 \\ 10B = 11 \\ -3A + 2B + 6D = 2 \\ -4A - 2B + (C+D)2 = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{6}{5} \\ B = \frac{11}{10} \\ D = \frac{1}{10} \\ C = \frac{1}{10} \end{cases}$$

e l'integrale diventa

$$I = \int \left(\frac{-6/5}{t-2} + \frac{\frac{11}{10}}{t-3} + \frac{\frac{1}{10} t + \frac{1}{10}}{t^2 + 1} \right) dt$$

$$= -\frac{6}{5} \ln|t-2| + \frac{11}{10} \ln|t-3| + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\int \frac{2t}{t^2+1} dt}_{= \ln(t^2+1)} + \frac{1}{10} \underbrace{\int \frac{1}{t^2+1} dt}_{= \operatorname{arctg} t}$$

$$= -\frac{6}{5} \ln|\operatorname{tg} x - 2| + \frac{11}{10} \ln|\operatorname{tg} x - 3| + \frac{1}{20} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + \frac{1}{10} x + c.$$