Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

13 maggio 2026

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso
$$z^2 = \mathrm{Re}(z) + i\,(\mathrm{Im}(z))^2 - |z|\,.$$

2. Calcolare eventuali asintoti della funzione
$$y = \arctan\left(\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\cos\frac{1}{x}\right).$$

3. Data la funzione
$$y = x^\alpha \sin|x|\,,$$
studiarne la derivabilità al variare di $\alpha \in Z$ e calcolare poi, quando ha senso, l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$.
(Se si è in difficoltà, considerare solo i casi $\alpha = 1$, $\alpha = 0$ e $\alpha = -1$).

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione
$$f(x) = \ln\left|\frac{x^3 - x}{x^2+1}\right|.$$

5. Calcolare
$$\int \ln\left|\frac{x^3 - x}{x^2+1}\right| dx.$$
Dire poi, giustificando le risposte, se la funzione è integrabile in $]0,1[$ e in $]1,+\infty[$.

Svolgimento

1. Posto $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, l'equazione diventa

$$(x+iy)^2 = x + iy^2 - \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = x + iy^2 - \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x - \sqrt{x^2+y^2} \\ 2xy = y^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = x - \sqrt{x^2+y^2} \\ y(2x-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = x - \sqrt{x^2} \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -3x^2 = x - \sqrt{5x^2} \\ y = 2x \end{cases}$$

$$x^2 = x - \sqrt{x^2} \Rightarrow x^2 = x - |x| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = \cancel{x} - \cancel{x} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x^2 = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 0 \vee \begin{cases} x < 0 \\ x(x-2) = 0 \end{cases}$$

$x = 0 \vee x = 2$ non accett.

Il I° sistema ha dunque solo la soluzione $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$-3x^2 = x - \sqrt{5x^2} \Rightarrow 3x^2 + x - |x|\sqrt{5} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x(3x+1-\sqrt{5}) = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x(3x+1+\sqrt{5}) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 0 \vee x = \frac{\sqrt{5}-1}{3} \text{ acc.} \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x = 0 \vee x = -\frac{\sqrt{5}+1}{3} \text{ acc} \end{cases}$$

($x=0$: acc. ma già trovata; non acc)

Il 2° sistema ha 2 soluzioni $z = \frac{\sqrt{5}-1}{3} + 2\frac{\sqrt{5}-1}{3}i$ e $z = -\frac{\sqrt{5}+1}{3} - 2\frac{\sqrt{5}+1}{3}i$.

L'equazione ha in tutto 3 soluzioni: $z = 0$, $z = \frac{\sqrt{5}-1}{3}(1+2i)$ e $z = -\frac{\sqrt{5}+1}{3}(1+2i)$.

2. I.D. $\begin{cases} x^2 + 2x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$ $\quad x \leq -2 \vee x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\cos\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg} 0 = 0 \quad \text{poiché}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\cos\frac{1}{x} = 0$$ essendo prodotto di una funzione infinitesima per una limitata.

∄ asintoti verticali.

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\cos\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{poiché}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x} + x}\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+x}\cos\frac{1}{x} = 1$$

mentre $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\left(\sqrt{x^2+2x} - x\right)\cos\frac{1}{x}\right) = \operatorname{arctg}(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$ poiché

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+\cancel{2x}} - x\right)\cos\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2} - x\right)\cos\frac{1}{x} = +\infty.$$

Segue che la funzione ha 2 asintoti orizzontali di equazione

$y = \frac{\pi}{4}$ per $x \to +\infty$, $\quad y = \frac{\pi}{2}$ per $x \to -\infty$.

3. $ID(y) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{se } \alpha \in \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\} \\ \mathbb{R}^* & \text{se } \alpha \in -\mathbb{N}^* = \{-1,-2,-3,\dots\} \end{cases}$

$y' = \alpha x^{\alpha-1} \operatorname{sen}|x| + x^{\alpha} (\cos|x|) \cdot \frac{x}{|x|} \quad \forall x \neq 0$

Studio la derivabilità in $x = 0$ solo se $\alpha \in \mathbb{N}$ (se $\alpha \in -\mathbb{N}^*$ non ha senso vedere se la funzione è derivabile in $x=0$ perché $0 \notin ID(y)$). Se $\alpha > 0$ si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^{\alpha} \operatorname{sen}|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x^{\alpha-1} \operatorname{sen}|x| = \lim_{x \to 0} x^{\alpha-1} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}|x|}{|x|}}_{\downarrow \, 1} \cdot |x| = 0$$

perché $\lim_{x \to 0^{\pm}} x^{\alpha-1}|x| = \lim_{x \to 0^{\pm}} x^{\alpha-1}(\pm x) = 0$

e quindi la funzione è derivabile anche in $x = 0$ con $y'(0) = 0$.
Se invece $\alpha = 0$ si ha che $f(x) = \operatorname{sen}|x|$ e

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}|x|}{x} \nexists \quad \text{perché} \quad \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{\operatorname{sen}(\pm x)}{x} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \pm \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \pm 1.$$

Dunque la funzione è derivabile nel suo dominio se $\alpha \neq 0$ mentre è derivabile tranne che in $x = 0$ se $\alpha = 0$. Inoltre se $\alpha > 0$

$y = 0$ eq. retta tangente al grafico in $x = 0$, mentre se $\alpha = 0$

$y = x$ eq. retta tg. al grafico da destra in $x = 0$

$y = -x$ " " da sinistra in $x = 0$.

4. ID: $\left| \frac{x^3 - x}{x^2+1} \right| > 0 \iff \frac{x^3 - x}{x^2+1} \neq 0 \iff x^3 - x \neq 0 \iff x \neq 0 \wedge x \neq \pm 1$

$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in ID \Rightarrow f$ pari

Intersezioni con asse x:

$$\begin{cases} y=0 \\ y=\ln\left|\frac{x^3-x}{x^2+1}\right| \end{cases} \Rightarrow \left|\frac{x^3-x}{x^2+1}\right|=1 \Rightarrow \frac{x^3-x}{x^2+1}=1 \vee \frac{x^3-x}{x^2+1}=-1 \Rightarrow$$

$x^3-x^2-x-1=0 \vee x^3+x^2-x+1=0$ le 2 eq. di 3° grado non hanno radici in $\mathbb{Q}$ e quindi non si sanno risolvere. Saltiamo perciò studio delle intersezioni con asse x e della positività: lo dedurremo poi una volta disegnato il grafico.

Asintoti verticali: $\lim_{x\to0} \ln\left|\frac{x^3-x}{x^2+1}\right| = \ln 0^+ = -\infty$ $\quad x=0$ A.V. completo

$\lim_{x\to1} \ln\left|\frac{x^3-x}{x^2+1}\right| = \ln 0^+ = -\infty$ $\quad \lim_{x\to-1} \ln\left|\frac{x^3-x}{x^2+1}\right| = \ln 0^+ = -\infty$ $\quad x=1 \wedge x=-1$ A.V. completi

Asintoti orizzontali: $\lim_{x\to\pm\infty} \ln\left|\frac{x^3-\cancel{x}}{x^2+\cancel{1}}\right| = \lim_{x\to\pm\infty}\ln|x| = +\infty$ con ord. molto lento

f non ha asintoti ~~orizzontali~~ né obliqui poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ per gli ordini

$$y' = \frac{\cancel{x^2+1}}{x^3-x}\cdot\frac{(3x^2-1)(x^2+1)-2x(x^3-x)}{(x^2+1)^{\cancel{2}}} = \frac{x^4+4x^2-1}{(x^3-x)(x^2+1)} \quad \forall x \in ID(y)$$

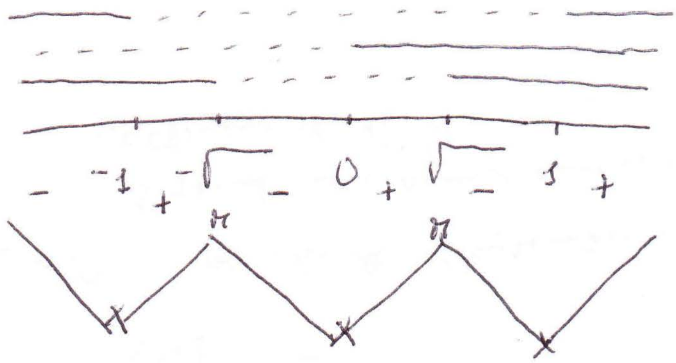
$y'>0 \iff \frac{x^4+4x^2-1}{x^3-x}>0$ $\quad N>0 \quad x^4+4x^2-1>0 \quad x^2<-2-\sqrt5 \vee x^2>-2+\sqrt5$

$\emptyset$

$x<-\sqrt{\sqrt5-1} \vee x>\sqrt{\sqrt5-1}$

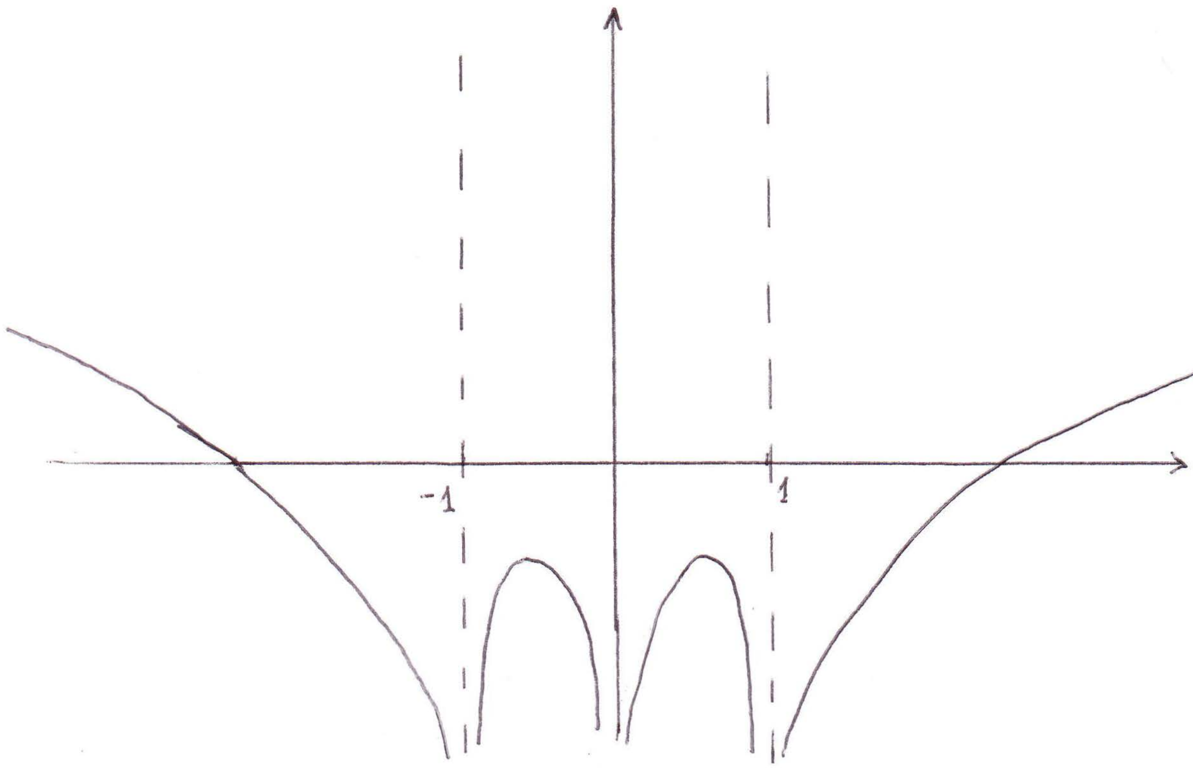
$D>0 \quad x(x^2-1)>0 \quad x>0$

$x<-1 \vee x>1$



$$\begin{cases} x=\pm\sqrt{\sqrt5-1} \\ y=\ln\left|\frac{\pm\sqrt{\sqrt5-1}\,(\sqrt5-1-1)}{\sqrt5-\cancel{1}+\cancel{1}}\right|<0 \end{cases}$$

Non studio segno della derivata seconda.



Dal grafico si evince che ci sono 2 intersezioni α_1 e α_2 con l'asse x.
Inoltre la funzione è positiva per $x < \alpha_1$ e $x > \alpha_2$, negativa altrove.

5. $\int \ln\left|\frac{x^3-x}{x^2+1}\right| dx = \int \left(\ln|x^3-x| - \ln(x^2+1)\right)dx = \int \ln|x|\,dx + \int \ln|x-1|\,dx + \int \ln|x+1|\,dx - \int \ln(x^2+1)\,dx = x \ln\frac{|x|}{x^2+1} + (x-1)\ln|x-1| + (x+1)\ln|x+1| - x + 2\,\mathrm{arctg}\,x + c$

essendo $\int \ln|x|\,dx \overset{P.P}{=} x\ln|x| - \int \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = x\ln|x| - x + c$

$\int \ln|x-1|\,dx \overset{PP}{=} x\ln|x-1| - \int \frac{x}{x-1}\,dx = x\ln|x-1| - \int\left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx = (x-1)\ln|x-1| - x + c$

$\int \ln|x+1|\,dx \overset{PP}{=} x\ln|x+1| - \int \frac{x}{x+1}\,dx = x\ln|x+1| - \int\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = (x+1)\ln|x+1| - x + c$

$\int \ln(x^2+1)\,dx \overset{PP}{=} x\ln(x^2+1) - 2\int\frac{x^2}{x^2+1}\,dx = x\ln(x^2+1) - 2\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x\ln(x^2+1) + 2\,\mathrm{arctg}\,x - 2x + c.$

In $]0,1[$ f è integrabile e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ con ordine comunque piccolo e quindi $< \alpha < 1$.

In $]1,+\infty)$ f non è integrabile perché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e quindi

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_1^2 f(x)\,dx}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\int_2^{+\infty} f(x)\,dx}_{= +\infty} = +\infty$$