Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

8 aprile 2026

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$2\bar{z} - 2|z|^2 - 6z^2 + 2i^{360} = \left(\frac{\cos\frac{2}{5}\pi + i\sin\frac{2}{5}\pi}{\cos\frac{3}{5}\pi + i\sin\frac{3}{5}\pi}\right)^{15}.$$

2. Trovare l'insieme di definizione della funzione

$$y = \arctan\sqrt{e^{x^2-1} - 1} + \arcsin(2x - 3).$$

3. Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x} - 1 - 2x - \frac{x^2}{2}}{x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{2x} - 1 - 2x - \frac{x^2}{2}}{x - \sin x}, \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{e^{2x} - 1 - 2x - \frac{x^2}{2}}{x - \sin x}.$$

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{x\log|x|}{1 + \log|x|}.$$

5. Calcolare

$$\int x\log x\log(x\log x)(\log x + 1)\,dx.$$

Dire poi, giustificando le risposte, se la funzione è integrabile in $[-1, 0]$, in $]1, 2]$ e in $[4, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $i^{360} = (i^4)^{90} = 1^{90} = 1$,

$$\left(\frac{\cos\left(\frac{2}{5}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{2}{5}\pi\right)}{\cos\left(\frac{3}{5}\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{3}{5}\pi\right)}\right)^{15} = \cos\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\right)\cdot 15 + i\,\text{sen}\left(\frac{2}{5}\pi - \frac{3}{5}\pi\right)15 = \cos(-3\pi) + i\,\text{sen}(-3\pi) = -1$$

posto $z = x + iy$ e quindi $|z|^2 = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, l'equazione diventa

$$2x - 2yi - 2x^2 - 2y^2 - 6(x^2 - y^2 + 2xyi) + 3 = 0 \iff$$

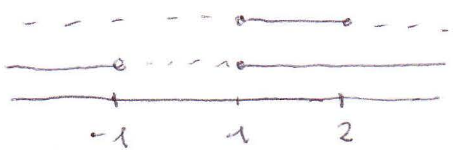
$$\begin{cases} -8x^2 + 4y^2 + 2x + 3 = 0 \\ -2y - 12xy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x^2 - 4y^2 - 2x - 3 = 0 \\ y(1 + 6x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{"} \quad \text{"} \\ y = 0 \lor x = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8x^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} \cancel{8}^{2}\cdot\frac{1}{\cancel{36}_{9}} - 4y^2 + \frac{1}{3} - 3 = 0 \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{1/2} = \frac{1 \pm 5}{8} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{matrix} \right. \\ y = 0 \end{cases} \lor \begin{cases} 4y^2 = \frac{2}{9} + \frac{1}{3} - 3 < 0 \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases} \quad \emptyset \text{ (perché } y \in \mathbb{R}!)$$

Dunque l'equazione ha solo 2 radici reali $z_1 = -\frac{1}{2}$ e $z_2 = \frac{3}{4}$.

2. $$\begin{cases} e^{x^2-1} - 1 \geq 0 \\ -1 \leq 2x - 3 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x^2-1} \geq e^0 \\ 2 \leq 2x \leq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \lor x \geq 1 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$



I D = $[1, 2]$

3. Poiché $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$ segue che

$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^2)$ mentre $\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$,

Segue che $$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x - x^2/2}{x - \text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{2x} + 2x^2 - \cancel{1} - \cancel{2x} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^4)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3/2\, x^2}{\frac{x^3}{6}} = \lim_{x\to 0} \frac{9}{x} \;\nexists \quad \text{perché } \lim_{x\to 0^+} \frac{9}{x} = +\infty, \; \lim_{x\to 0^-} \frac{9}{x} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{2x} - \cancel{1} - \cancel{2x} - \cancel{x^2/2}}{x - \cancel{\text{sen}\, x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x} = +\infty$$ perché $e^{2x} \to +\infty$ con ordine comunque grande

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1-2x-\frac{x^2}{2}}{x-\operatorname{sen}x}\underset{\uparrow}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{x^{\cancel{2}}}{2}}{\cancel{x}}=\lim_{x\to-\infty}-x=+\infty$$

trascuro le quantità limitate e $2x$ che ha ordine di infinito più piccolo di $-\frac{x^2}{2}$

4. ID: $\begin{cases}|x|>0\\ 1+\log|x|\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ \log|x|\neq -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ |x|\neq e^{-1}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ x=\pm e^{-1}\end{cases}$

$ID=\mathbb{R}-\{0, e^{-1}, -e^{-1}\}$

Poiché ID è simmetrico rispetto a 0 e $f(-x)=-\frac{x\log|x|}{1+\log|x|}=-f(x)$ $\forall x\in ID$, f è dispari. Posso studiarla per $x>0$ e ribaltare poi G_f rispetto all'origine.

$\nexists$ intersezioni con asse y (perché $0\notin ID$)

$\begin{cases}y=0\\ x\log|x|=0\end{cases} \Rightarrow x=0$ non acc. $\vee$ $\log|x|=0 \Rightarrow x=\pm 1$ $(1,0)$ $(-1,0)$

$f(x)>0$ (per $x>0$) $\Rightarrow \frac{x\log x}{1+\log x}>0 \Rightarrow \log x<-1 \vee \log x>0 \Rightarrow 0<x<e^{-1} \vee x>1$

0 + e^{-1} − 1 +

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x\log x}{1+\log x}=\frac{0\cdot(-\infty)}{-\infty}\underset{\uparrow}{=}\frac{0}{-\infty}=0$$

per gli ordini

f prolungabile per continuità in $x=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\log x}{1+\log x}=\frac{+\infty}{+\infty}=+\infty$$ perché ord$(x\log x)>$ ord $\log x$ $\nexists$ As. orizz.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{1+\log x}\underset{\uparrow}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{\log x}=1$$ (eventuale coeff. angolare di as. obliquo)

trascuro al denominatore la costante 1 risp. a $\log x$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\log x}{1+\log x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x\log x}-x-\cancel{x\log x}}{1+\log x}=-\infty$$ per gli ordini

$\nexists$ as. obliqui

$$\lim_{x\to(e^{-1})^+}\frac{x\log x}{1+\log x}=\frac{-e^{-1}}{0^+}=-\infty \qquad \lim_{x\to(e^{-1})^-}\frac{x\log x}{1+\log x}=\frac{-e^{-1}}{0^-}=+\infty$$

$x=e^{-1}$ A. verticale a dx e a sinistra

$$y' = \frac{(\log x + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}})(1+\log x) - \cancel{x}\log x \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{(1+\log x)^2} = \frac{(1+\log x)^2 - \log x}{(1+\lg x)^2} = \frac{\log^2 x + \log x + 1}{(1+\log x)^2}$$

Poiché il numeratore ha $\Delta < 0$, è sempre >0 per $x>0$

il denominatore è >0 $\forall x>0$, $x \neq e^{-1}$ quindi

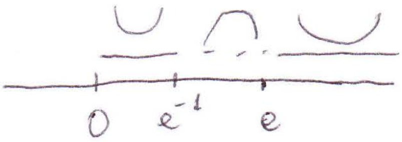
$y'>0$ $\forall x \in]0, e^{-1}[\cup]e^{-1}, +\infty) \Rightarrow f$ str. cresc. in $]0, e^{-1}[$ e in $]e^{-1}, +\infty)$.

N.B. $\lim_{x\to 0} y' = \lim_{x\to 0} \frac{\lg^2 x}{\lg^2 x} = 1$

$$y'' = \frac{(2\lg x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x})(1+\log x)^2 - 2(1+\log x)\frac{1}{x}(\log^2 x + \log x + 1)}{(1+\log x)^4}$$

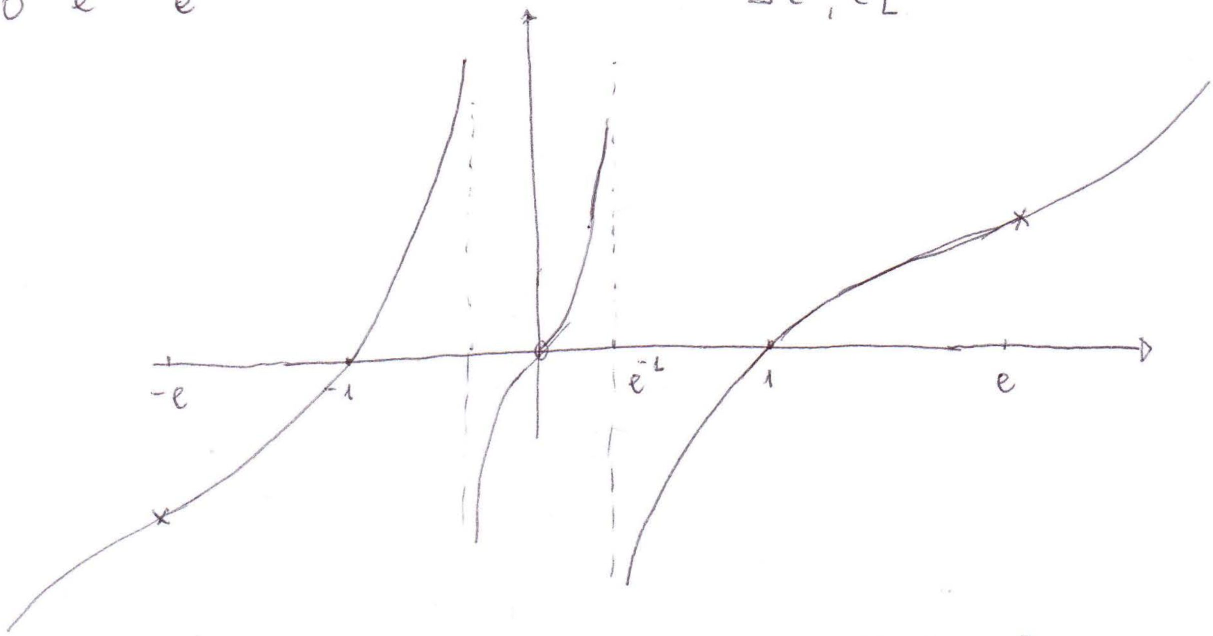
$$\frac{(\lg x+1)(2\cancel{\log x} + 1 + \cancel{2\lg^2 x} + \cancel{\lg x} - \cancel{2\lg^2 x} - 2\cancel{\lg x} - 2)}{x(1+\log x)^4} = \frac{(\lg x+1)(\lg x - 1)}{x(1+\lg x)^4}$$

$y''>0$ $\lg x < -1 \vee \lg x > 1 \iff 0 < x < e^{-1} \vee x > e$



f convessa in $]0, e^{-1}[$ e in $]e, +\infty)$

concava in $]e^{-1}, e[$



5. Posto $t = x\log x \Rightarrow dt = (\lg x + 1)dx$ e l'integrale diventa

$$\int t \log t \, dt \overset{P.P.}{=} \frac{t^2}{2}\lg t - \frac{1}{2}\int t^{\cancel{2}}\frac{1}{\cancel{t}}\,dt = \frac{t^2}{2}\lg t - \frac{t^2}{4} + c = \frac{(x\log x)^2}{2}\left(\log(x\log x) - \frac{1}{2}\right) + c$$

Poiché la funzione è definita per $\begin{cases} x>0 \\ x\log x > 0\end{cases} \Rightarrow x > 1$

in $[-1, 0]$ non è integrabile perché non è definita in $]1, 2]$ è integrabile perché continua e convergente per $x \to 1$. Infatti:

$$\lim_{x \to 1} x \log x \log(x \log x)(1 + \log x) = 1 \cdot 0 \cdot \log(0)(1) = 0 \cdot (-\infty) = 0$$

per gli ordini essendo $\lim_{x \to 0} x \log x = 0 \cdot (-\infty) = 0$,

$$\lim_{x \to 0} x \log x \log(x \log x) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t = x \log x}} t \log t = 0$$

in $[4, +\infty)$ non è integrabile perché

$$\lim_{x \to +\infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{x}} \, \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\log x}} \, \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{\underline{\log(x \log x)}}} \, \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{(\log x + 1)}} = +\infty.$$