

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

11 marzo 2026

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$|z - 1| + i^9 = (\cos \pi + i \sin \pi)^{64} + z.$$

2. Trovare gli asintoti della funzione

$$y = \ln |\ln x| + \frac{1}{\ln x}.$$

3. Data la funzione

$$y = \log_{x^2+1} (2^x - 1),$$

scrivere, se esiste, l'equazione della retta tangente nel punto del grafico di ascissa $x_0 = 1$.

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

5. Calcolare

$$\int \arctan x^2 dx.$$

Dire poi, giustificando le risposte, se la funzione è integrabile in $[-1, 0]$ e in $[4, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $i^9 = (i^2)^4 \cdot i = i$ e $(\cos \pi + i \sin \pi)^{64} = \cos 64\pi + i \sin 64\pi =$
 $= \cos 0 + i \sin 0 = 1$
 l'equazione diventa

$|z-1| + i = 1+z$ e posto $z = x+iy$ si ha $z-1 = x-1+iy$ e quindi

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + i = 1+x+iy \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 1+x \\ 1=y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=1 \\ \sqrt{x^2-2x+2} = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-2x+2 = x^2+2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 4x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \end{cases} \text{ acc.$$

Dunque l'equazione ha una sola soluzione $z = \frac{1}{4} + i$

2. $y = \ln|\ln x| + \frac{1}{\ln x}$

ID: $\begin{cases} |\ln x| > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \ln x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad \text{ID} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln|\ln x| + \frac{1}{\ln x} = \ln|+\infty| + \frac{1}{-\infty} = +\infty + 0 = +\infty \quad x=0 \text{ A.V. non esiste}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln|\ln x| + \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln|y| + \frac{1}{y} = -\infty + (-\infty) = -\infty \quad x=1 \text{ A.V. da destra}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln|\ln x| + \frac{1}{\ln x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln|y| + \frac{1}{y} = -\infty + \infty = +\infty \quad \text{per gli ordini + principio di Stolz, infiniti}$

(perché $\ln y \rightarrow -\infty$ se $y \rightarrow 0^+$ con ord comunque lento
 mentre $\frac{1}{y} \rightarrow +\infty$ con ord 1) $x=1$ A.V. completo

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln|\ln x| + \frac{1}{\ln x} = \lim_{xy \rightarrow +\infty} \ln|y| + \frac{1}{y} = +\infty + 0 = +\infty \quad \text{As. or. 22.}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|\ln x| + \frac{1}{\ln x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln|\ln x|}{x} + \frac{1}{x \ln x} = 0 \quad \text{per gli ordini}$

perché $\ln |\ln x| \rightarrow +\infty$ con ordine comunque piccolo e quindi minore di $1 = \text{ord } x$.

3) Se f è derivabile in x_0 , la retta tangente al grafico in $P_0(x_0, f(x_0))$ ha equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Perché $y = \log_{x^2+1}(2^x - 1) = \frac{\ln(2^x - 1)}{\ln(x^2 + 1)}$ è definita per $\begin{cases} 2^x - 1 > 0 & x > 0 \\ x^2 + 1 > 0 & \forall x \\ \ln(x^2 + 1) \neq 0 & x \neq 0 \end{cases}$

con $y'(x) = \frac{\frac{1}{2^x - 1} \cdot 2^x \ln 2 \cdot \ln(x^2 + 1) - \frac{2x}{x^2 + 1} \ln(2^x - 1)}{\ln^2(x^2 + 1)} \quad \forall x > 0$, segue che

f è derivabile in $x_0 = 1$ con $y'(1) = \frac{2 \ln^2 2 - 0}{\ln^2(2)} = 2$.

Inoltre $y(1) = \frac{\ln 1}{\ln 2} = 0$ e quindi l'eq. retta tangente è

$y - 0 = 2(x - 1)$ cioè $y = 2x - 2$.

4. $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^2}$ ID: $x \neq 0$ f non è né pari né dispari

$f(x) > 0 \quad \forall x \in \text{ID}$ $\nexists$ intersezioni con gli assi

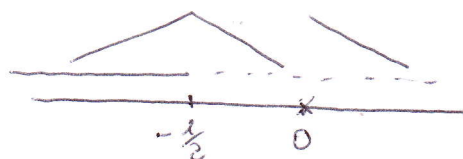
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \frac{e^0}{\pm \infty} = \frac{1}{\pm \infty} = 0 \quad y = 0 \quad \text{As. orizz. a } \pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \frac{e^{+\infty}}{0} = \frac{\infty}{0} = \infty$ per gli ordini (perché $e^x \rightarrow 0$ per $x \rightarrow -\infty$ molto velocemente)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \frac{e^{+\infty}}{0^+} = +\infty^+$ $x = 0$ As. Vert. a sinistra

$y' = \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^3}\right) \cdot x^2 - 2x e^{\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \frac{-e^{\frac{1}{x^2}}(1 + 2x)}{x^4} \quad \forall x \neq 0$

$y' > 0 \Leftrightarrow 1 + 2x < 0 \quad x < -\frac{1}{2}$



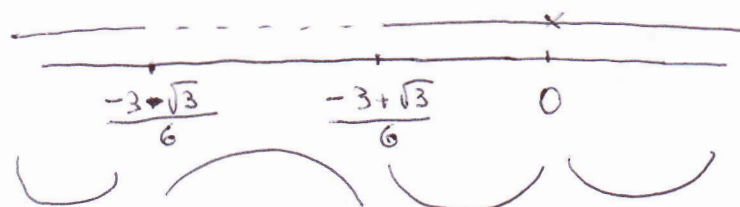
$M \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4e^2} \end{cases}$

f crescente per $x < -\frac{1}{2}$, decrescente per $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ e per $x > 0$

$y'' = \frac{-\left[e^{\frac{1}{x^2}} \left(-\frac{1}{x^3}\right)(1 + 2x) + 2e^{\frac{1}{x^2}} x\right] x^4 + 4x^3 e^{\frac{1}{x^2}}(1 + 2x)}{x^8} = e^{\frac{1}{x^2}} \frac{6x^2 + 6x + 1}{x^6} \quad \forall x \neq 0$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x + 1 > 0 \quad x_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{6}$$

$$x < \frac{-3-\sqrt{3}}{6} \vee x > \frac{-3+\sqrt{3}}{6}, x \neq 0$$



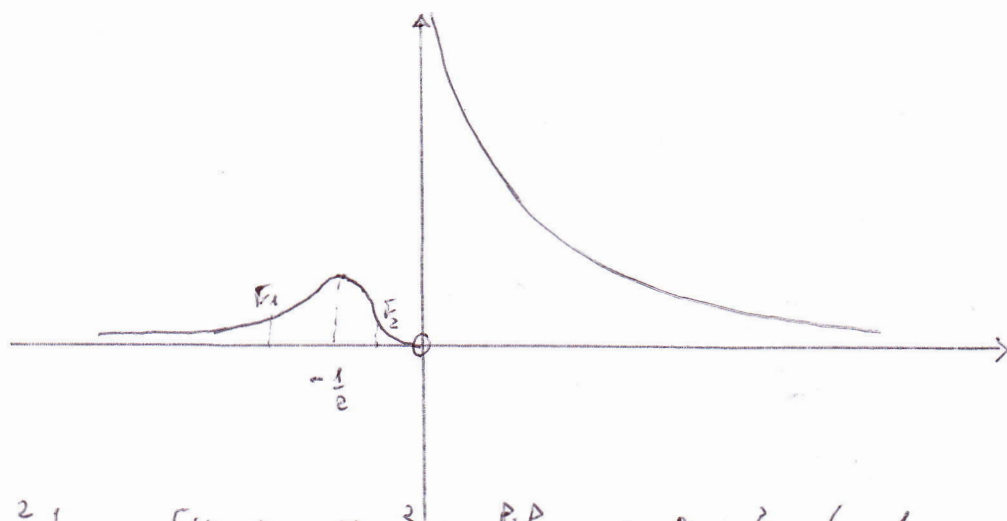
f convessa in $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{3}}{6})$ e

in $(\frac{-3+\sqrt{3}}{6}, 0)$ e in $(0, +\infty)$

f concava in $(\frac{-3-\sqrt{3}}{6}, \frac{-3+\sqrt{3}}{6})$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} y' = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} \cdot (1+2x) = \frac{0}{0} = 0 \text{ per gli ordini}$$

Segue che f tende a 0 per $x \rightarrow 0^-$ con tangente orizzontale



$$\begin{aligned} 5. \int \arctg x^2 dx &= \int (D_x) \arctg x^2 dx \stackrel{P.A.}{=} x \arctg x^2 - \int x \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x^2 dx \\ &= x \arctg x^2 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x + 1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg(\sqrt{2}x - 1) + C \end{aligned}$$

perché $2 \int \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2 \int \left(\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right) dx$ dove $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

$$\frac{x^2}{1+x^4} = \frac{x^2}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D)x^2 + (A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D)x + B+D}{x^4+1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ -\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D=1 \\ A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D=0 \\ B+D=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=-C \\ B=-D \\ 2\sqrt{2}C=1 \\ 2\sqrt{2}D=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-C=-\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ B=D=0 \end{cases}$$

Dunque

$$2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2x + \sqrt{2} - \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{2x - \sqrt{2} + \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx$$

$$= +\frac{1}{2\sqrt{2}} \left[-\int \frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx + \sqrt{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx + \int \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \sqrt{2} \int \frac{1}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} dx \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[-\ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + 2\sqrt{2} \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} + 2\sqrt{2} \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{2}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) + \frac{2}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) + c.$$

La funzione è continua su tutto $\mathbb{R}$, e quindi lo è su $[-1, 0]$ intervallo chiuso e limitato. Segue che la funzione è integrabile in senso classico in $[-1, 0]$.

La funzione è continua su $[4, +\infty)$ ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x^2 = \frac{\pi}{2} \neq 0$

$\Rightarrow$ la funzione non è integrabile in senso improprio in $[4, +\infty)$.