Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

19 febbraio 2026

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso
$$z^2 - 2iz - 1 + i = (\cos\pi + i\sin\pi)^{65} + \left(\frac{\cos\pi + i\sin\pi}{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}}\right)^{15}.$$

2. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)}.$$

3. Per ognuna delle seguenti funzioni:
$$y = \sin^2|x|, \qquad y = \frac{\sqrt[7]{x^3}\cdot x^2\sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}, \qquad y = \log_{x+1}\left(x^2 + x + 2\right),$$

   a) trovare il dominio;

   b) calcolare la derivata, precisando se ci sono punti di non derivabilità.

4. Studiare (non è richiesto lo studio della derivata seconda) e disegnare il grafico approssimativo della funzione
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}.$$

5. Calcolare
$$\int f(x)dx$$
   dove f è la funzione del punto precedente (suggerimento: porre $\sqrt{x^2-2x} = x + t$).
   Dire poi, giustificando le risposte, se la funzione $\frac{1}{f}$ è integrabile in senso improprio in $[-1, 0[$ e in $[4, +\infty)$.

Svolgimento

1. Poiché $(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)^{65} = (-1)^{65} = -1$

$$\left(\frac{\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi}{\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}\right)^{15} = \cos 15\cdot\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}15\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \cos 10\pi + i\operatorname{sen}10\pi = 1,$$

l'equazione diventa: $z^2 - 2iz + 1 + i = -\cancel{1} + \cancel{1} \iff$

$z_{1/2} = i + \sqrt{\cancel{i^2} + \cancel{1} - i} = i + \sqrt{-i}$ dove

$$\sqrt{-i} = \left\{\cos\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{3/2\,\pi + 2k\pi}{2}\right\} = \pm\left(-\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}\right).$$

L'equazione ha quindi 2 soluzioni in $\mathbb{C}$ date da

$$z_1 = i - \frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2} = -\frac{\sqrt2}{2} + \left(1 + \frac{\sqrt2}{2}\right)i$$

$$z_2 = i + \frac{\sqrt2}{2} - i\frac{\sqrt2}{2} = \frac{\sqrt2}{2} + \left(1 - \frac{\sqrt2}{2}\right)i.$$

2. Poiché $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$ segue che

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) \cong -\frac{x^2}{2}$$

e quindi

$$\ln(\cos 2x) = \ln\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)\right) \cong -2x^2$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\ln(\cos 2x)} = \lim_{x\to0}\frac{-\frac{x^2}{2}}{-2x^2} = \lim_{x\to0}\frac{\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}} = \frac14.$$

3. La funzione $y = \operatorname{sen}^2|x|$ è definita su $\mathbb{R}$.

$$y' = 2\operatorname{sen}|x|\cdot\cos|x|\cdot\frac{x}{|x|} \qquad \forall x \neq 0$$

Si nota però che $\displaystyle\lim_{x\to0^-} y'(x) = \lim_{x\to0^-} -2\operatorname{sen}(-x)\cos(-x) = 0$

$$\lim_{x\to0^+} y'(x) = \lim_{x\to0^+} 2\operatorname{sen}x\cos x = 0$$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to0} y'(x) = 0$ Dunque la funzione è derivabile anche in $x=0$ con $y'(0) = 0$. Dunque f è derivabile in $\mathbb{R}$.

N.B. Si ottiene il risultato anche osservando che $y = \operatorname{sen}^2|x| = \operatorname{sen}^2 x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

$$y = \frac{\sqrt[7]{x^3} \cdot x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt[5]{x^4}}$$ ID: $\mathbb{R}-\{0\}$

Prima di derivare, conviene semplificare l'espressione della funzione:

$$y = x^{3/7} \cdot x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-4/5} = x^{3/7+2+\frac{1}{3}-4/5} = x^{\frac{206}{105}}.$$

Segue che $y' = \frac{206}{105} x^{\frac{206}{105}-1} = \frac{206}{105} x^{\frac{101}{105}}$. $ID(y') = ID(y)$ $\nexists$ pti di non derivabilità

$$y = \log_{x+1}(x^2+x+2)$$ ID $\begin{cases} x^2+x+2>0 & \Delta<0 \quad \forall x \\ x+1>0 & x>-1 \\ x+\cancel{1} \neq \cancel{1} & x \neq 0 \end{cases}$

$ID =]0,1[\cup]1,+\infty)$ Per la regola del cambio di base di un logaritmo, si ha $\log_{x+1}(x^2+x+2) = \frac{\ln(x^2+x+2)}{\ln(x+1)}$

e quindi

$$y' = D\,\frac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x+1)} = \frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}\ln(x+1) - \frac{\ln(x^2+x+1)}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$$ $ID(y') = ID(y)$ $\nexists$ punti di non derivabilità

4. $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$ ID: $x^2-2x \geq 0 \iff x \leq 0 \vee x \geq 2$

$ID = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

f non è pari né dispari poiché il suo dominio non è simmetrico risp. a 0

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in ID$ poiché $\sqrt{x} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$f(x) = 0 \iff x^2-2x=0 \iff x=0 \vee x=2$ (0,0) (2,0) interс. con assi

asintoti: $\nexists$ as. verticali poiché $\nexists$ pti di accum. al finito che $\notin ID$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} = +\infty+\infty = +\infty \\ &\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\underset{\downarrow\,+\infty}{x^2}(1-\underset{\downarrow\,0}{\tfrac{2}{x}})} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nexists \text{ as. orizzontali}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \underset{\downarrow\,\pm1}{\frac{|x|}{x}} \underset{\downarrow\,1}{\underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{x}}}} = \pm 1$$

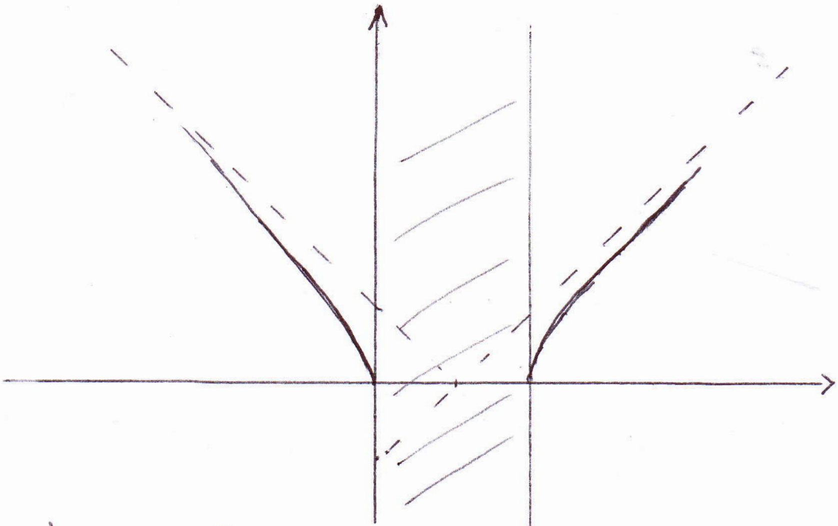
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}-2x-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-2\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{2}{2} = 1 \qquad y = -x+1 \quad \text{as. ob. a } -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-2x} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-2x}+x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1\right)} = -1 \qquad y = x-1 \quad \text{as. ob. a } +\infty$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-2x}}(2x-2) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$



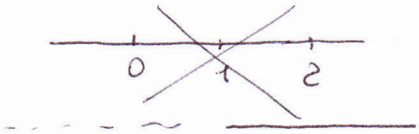
$ID(y') = (-\infty, 0[\cup]2, +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^-} y' = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} y' = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

La funzione ha due pti di semicuspide in $x = 0$ e $x = 2$, G_f parte o arriva con tangente verticale.

$y' > 0 \iff x > 1$



f cresce in $[2, +\infty)$

decresce in $(-\infty, 0]$

5. Posto $\sqrt{x^2-2x} = x + t$ si ha $\cancel{x^2} - 2x = \cancel{x^2} + 2tx + t^2 \Rightarrow x = -\frac{t^2}{2(t+1)}$

e quindi $dx = -\frac{1}{2}\frac{2t(t+1) - t^2 \cdot 1}{(t+1)^2}dt = -\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}dt$.

Poiché $\sqrt{x^2-2x} = x + t = -\frac{t^2}{2(t+1)} + t = \frac{t^2+2t}{2(t+1)}$ l'integrale diventa

$$\int \sqrt{x^2-2x}\,dx = \int \frac{t^2+2t}{2(1+t)} \cdot \left(-\frac{t^2+2t}{2(t+1)^2}\right)dt = -\frac{1}{4}\int \frac{(t^2+2t)^2}{(t+1)^3}dt = -\frac{1}{4}\int \frac{\left((t+1)^2-1\right)^2}{(t+1)^3}dt$$

$$\underset{b}{=} -\frac{1}{4}\int \frac{(u^2-1)^2}{u^3}du = -\frac{1}{4}\int\left(\frac{u^4}{u^3} - \frac{2u^2}{u^3} + \frac{1}{u^3}\right)du = -\frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2} - 2\ln|u| - \frac{1}{2u^2}\right] + c$$

posto $t + 1 = u \rightarrow dt = du$

$$= -\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)^2}{8} + \frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-2x}-x+1\right| - \frac{1}{8\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)^2} + c.$$

N. B.

La seconda sostituzione $t+1=u$ permette di semplificare molto i conti. Se non si fa questa sostituzione bisogna fare la divisione tra polinomi e poi applicare Hermite.

$$\int \frac{(t^2+2t)^2}{(t+1)^3}dt = \int \frac{t^4+4t^3+4t^2}{t^3+3t^2+3t+1}dt =$$

$$\begin{array}{l|l} t^4 \quad 4t^3 \quad 4t^2 & t^3+3t^2+3t+1 \\ \hline t^4+3t^3+3t^2+t & t+1 \\ // \quad t^3+t^2-t & \\ \quad t^3+3t^2+3t+1 & \\ \hline // \quad -2t^2-4t-1 & \end{array}$$

$$\int\left(t+1-\frac{2t^2+4t+1}{(t+1)^3}\right)dt = \frac{t^2}{2}+t-\int\frac{2t^2+4t+1}{(t+1)^3}dt$$

dove applicando Hermite si ha che

$$\frac{2t^2+4t-1}{(t+1)^3} = \frac{A}{t+1}+\frac{d}{dt}\frac{Bt+C}{(t+1)^2} = \frac{A}{t+1}+\frac{B(t+1)^{\cancel{2}}-(Bt+C)2\cancel{(t+1)}}{(t+1)^{\cancel{4}\,3}} \Rightarrow$$

$$2t^2+4t-1 = A(t+1)^2+Bt+B-2Bt-2C \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ 2A-B=4 \\ A+B-2C=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=0 \\ C=3/2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$I = -\frac{1}{4}\int\frac{(t^2+2t)^2}{(t+1)^3}dt = -\frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}+t-\int\left(\frac{2}{t+1}+\frac{d}{dt}\frac{3/2}{(t+1)^2}\right)dt\right] = -\frac{t^2}{8}-\frac{t}{4}+\frac{1}{2}\ln|t+1|-\frac{3}{8(t+1)^2}+c$$

$$= -\frac{\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)^2}{8}-\frac{\sqrt{x^2-2x}-x}{4}+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x^2-2x}-x+1\right|-\frac{3}{8\left(\sqrt{x^2-2x}-x+1\right)^2}+c.$$

(il risultato sembra diverso da quello trovato in precedenza, ma la primitiva ottenuta differisce dalla precedente per una costante).

Considero ora $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$ definita e continua in $(-\infty,0[\ \cup\ ]2,+\infty)$.

Poiché $\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}} = +\infty$ con ord $\frac{1}{2}<1 \Rightarrow 1/f$ integ. in s.i. in $[1,0[$

trascuro infinitesimo di ord. maggiore

Poiché $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}} = 0$ con ordine $1 \Rightarrow \frac{1}{f}$ non è int. in s.i. in $[4,+\infty)$.

trascuro infinito di ordine minore