# Corso di laurea in Chimica
# Esame - Esonero di
# ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

**28 gennaio 2026**

1. Risolvere la seguente equazione

$$z^4 - (2+i)z^2 = i^{2027} + \frac{(\cos 20\pi + i \sin 20\pi)^5}{\cos 15\pi + i \sin 15\pi}$$

   e disegnarne le soluzioni nel piano complesso.

2. Studiare il dominio di

$$y = \left( \frac{\sqrt{2x+3} - x}{8^x - 4^{2x+2} - 2^x - 4} \right)^{\sqrt{5}} + \frac{\arctan x}{\sin x}$$

3. Determinare eventuali asintoti della funzione

$$y = |x-1| + \sqrt[3]{x^3 - 1}.$$

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della seguente funzione

$$f(x) = x \ln(|x| - 1)^2.$$

5. Data la funzione $f$ dell'esercizio precedente,

   i) calcolarne l'integrale indefinito;

   ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $[0, 1[$, in $]1, 2]$ e in $[2, +\infty[$.

**N.B. Chi ha superato il primo esonero deve fare solo gli esercizi 3, 4 e 5.**

# Svolgimento

1. Poiché $i^{2027} = i^{2024} \cdot i^3 = (i^4)^{506} \cdot i^2 \cdot i = -1$

$$\frac{(\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi)^5}{\cos 15\pi + i \operatorname{sen} 15\pi} = \cos(100-15)\pi + i \operatorname{sen}(100-15)\pi = \cos(\cancel{8k\pi}+\pi) + i \operatorname{sen}(\cancel{8k\pi}+\pi) = -1$$

l'equazione diventa $z^4 - (2+i)z^2 + 1 + i = 0$ biquadratica

Posto $w = z^2$ l'equazione $w^2 - (2+i)w + 1 + i = 0$ ha soluzioni

$$w_{1/2} = \frac{2+i \pm \sqrt{(2+i)^2 - 4(1+i)}}{2} = \frac{2+i \pm \sqrt{\cancel{4}+i^2+\cancel{4i}-\cancel{4i}-\cancel{4}}}{2} = \frac{2+i \pm i}{2} = \begin{cases} 1 \\ 1+i \end{cases}$$

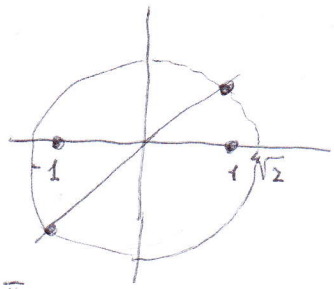
$z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1$ (inutile usare la formula della radice quadrata in $\mathbb{C}$)

$$z^2 = 1+i \Rightarrow z = \sqrt{1+i} = \sqrt{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)} = \left\{\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right) \middle| k \in \{0,1\}\right\}$$

$$\rho = \sqrt{2} \qquad \begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Per $k=0$: $z_0 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$

$k=1$: $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9}{8}\pi + i \operatorname{sen}\frac{9}{8}\pi\right) = -z_0$




L'equazione ha 4 radici complesse $\pm 1$ e $\pm\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$.

2. $$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x+3} - x}{8^x - 4^{2x+2} - 2^x - 4} \geq 0 \\ \operatorname{sen} x \neq 0 & x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2x+3 \geq 0 & x \geq -3/2 \end{cases}$$

Studio il segno della frazione nel suo dominio cioè per $x \geq -3/2$.

$N \geq 0$ $\quad \sqrt{2x+3} \geq x \iff \begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ 2x+3 \geq x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -3/2 \\ x \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x - 3 \leq 0 \end{cases}$

$x_{1/2} = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$

$\iff -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \vee \begin{cases} x > 0 \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

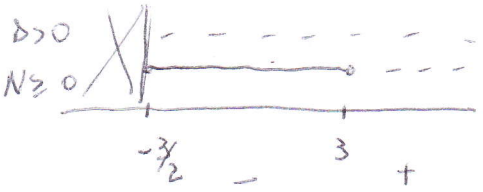
$\iff -3/2 \leq x \leq 0 \vee 0 < x \leq 3 \iff -\frac{3}{2} \leq x \leq 3$

$D > 0$ $\quad 8^x - 4^2 \cdot 4^{2x} - 2^x - 4 > 0$ Si vede facilmente che il denominatore è sempre $< 0$ perché l'unico termine positivo $8^x$ è

più piccolo di $16\cdot 4^x$ per $x > -4$ e quindi anche per $x \geq -\frac{3}{2}$ essendo

$$2^{3x} - 16\cdot 4^x = 2^{3x}(1-16\cdot 2^x) < 0 \iff 1-16\cdot 2^x < 0 \iff 2^x > \frac{1}{16} = 2^{-4} \Rightarrow x > -4.$$

Applicando la regola del segno per $x \geq -\frac{3}{2}$ si ha




$x \geq 3$

Conclusione: la funzione è definita per

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x \neq k\pi \quad k \geq 1 \end{cases}$$

3. La funzione è definita e continua in $\mathbb{R}$, perciò $\nexists$ As. Verticali.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x+1+\sqrt[3]{x^3-1} = +\infty-\infty$$

Ricordo che per Taylor $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$ per $x \to 0$ e quindi per $x \to +\infty$ $\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{1/3} = 1-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1-x+x\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to-\infty} 1+x\left[\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1+x\left(\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{3x^2}+x\cdot o\left(\frac{1}{x^3}\right) = 1$$

$y = 1$ As. orizz. a $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} x-1+\sqrt[3]{x^3-1} = +\infty+\infty = +\infty$$

$\nexists$ as. orizz. a $+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1+\sqrt[3]{x^3-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{\cancel{x}\sqrt[3]{1-\frac{1}{x^3}}}{\cancel{x}}\right) = 1+1 = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-2x = \lim_{x\to+\infty} -x-1+\sqrt[3]{x^3-1}-2x = \lim_{x\to+\infty} x\left[\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{1/3}-1\right]-1$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{3x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)-1 = -1$$

$y = 2x-1$ As. obl. a $+\infty$

4. ID: $(|x|-1)^2 > 0 \iff |x|-1 \neq 0 \iff |x| \neq 1 \iff x \neq \pm 1$ $\quad$ ID $= \mathbb{R}-\{-1,1\}$

Poiché ID è simmetrico rispetto all'origine, verifico se $f$ è pari o dispari

$f(-x) = -x\ln(|-x|-1)^2 = -x\ln(|x|-1)^2 = -f(x) \Rightarrow f$ dispari

Studio $f$ per $x \geq 0$ e poi ne ribalto il grafico rispetto all'origine.

Dunque studio $f(x) = x \ln (x-1)^2$ per $x \geq 0 \wedge x \neq 1$

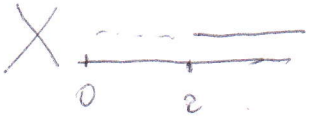
Intersezioni con assi: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \cdot 0 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x \ln (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \vee (x-1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$

$x^2 - 2x = 0$

$(0,0)$ $(2,0)$ intersezioni

Positività: $x \ln (x-1)^2 > 0 \Rightarrow x > 0$ $\ln (x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x > 0$

$x < 0 \vee x > 2$



$f(x) > 0$ per $x > 2$

Asintoti: $\lim_{x \to 1} x \ln (x-1)^2 = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$ $x = 1$ As. vert. completo

$\lim_{x \to +\infty} x \ln (x-1)^2 = +\infty (+\infty) = +\infty$ $\nexists$ as. orizz. a $+\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} \ln (x-1)^2}{\cancel{x}} = +\infty$ $\nexists$ as. obliqui a $+\infty$

$y' = D(x \ln (x-1)^2) = \ln (x-1)^2 + \frac{2x \cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}} = \ln (x-1)^2 + \frac{2x}{x-1}$ $\forall x > 0$, $x \neq 1$

Calcolo $\lim_{x \to 0^+} y' = \lim_{x \to 0^+} \ln (x-1)^2 + \frac{2x}{x-1} = 0 \Rightarrow D_+ f(0) = 0$

Per simmetria anche $D_- f(0) = 0$ cioè $f$ ha in $x = 0$ pto a tangente orizz.

Non si riesce a studiare precisamente la disequazione

$y' = \ln (x-1)^2 + \frac{2x}{x-1} > 0$ N.B. Si vede facilmente che $y' < 0$ se $0 < x < 1$ (perché somma di due termini entrambi $< 0$)

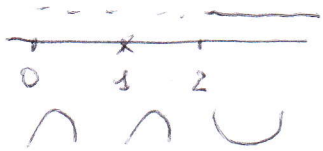
$y' > 0$ se $x > 2$ (somma di due termini $> 0$)

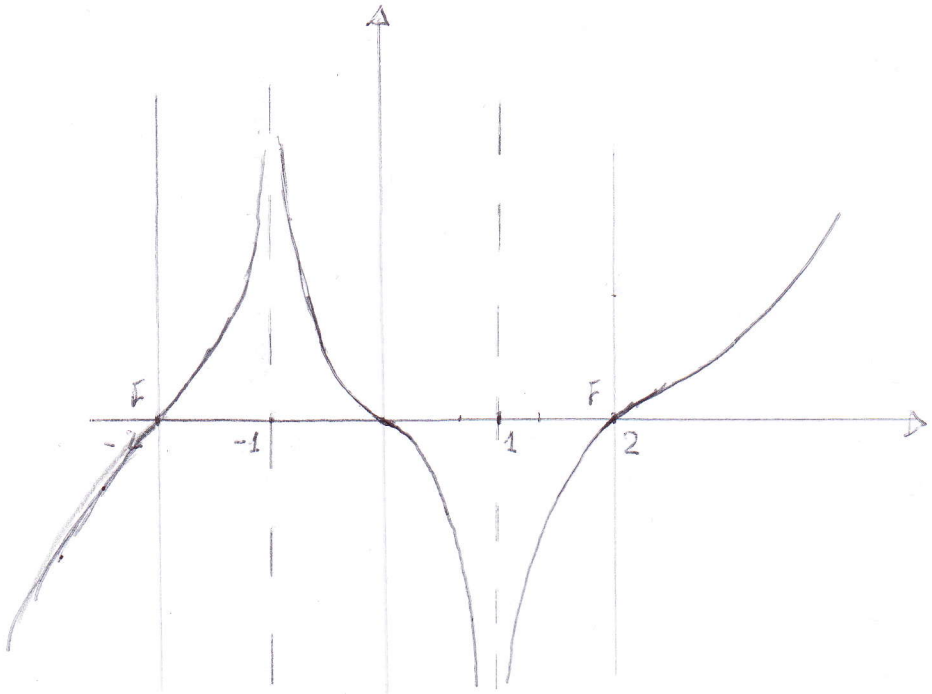
non si sa cosa accade se $1 < x < 2$.

Si riesce però a dedurre dal contesto l'andamento della funzione.

$y'' = \frac{1}{(x-1)^2} 2(x-1) + 2 \frac{-1}{(x-1)^2} = 2 \frac{x-2}{(x-1)^2}$ $y'' > 0$ se $x > 2$

$F(2,0)$






5. i) $\int x \ln(|x|-1)^2 dx \overset{P.P.}{=} \frac{x^2}{2} \ln(|x|-1)^2 - \int \frac{x^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{(|x|-1)^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{2}\cancel{(|x|-1)} \cdot \frac{x}{|x|} dx$

Distinguo casi $x \geq 0 \vee x < 0$ (se si è in difficoltà, basta studiare caso $x \geq 0$)

- $\int \frac{x^2}{|x|-1} \cdot \frac{x}{|x|} dx = \int \frac{x^2}{x-1} dx = \int \left(\frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right) dx = \int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right) dx = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c_1$ se $x \geq 0$

- $\int \frac{x^2}{|x|-1} \cdot \frac{x}{|x|} dx = \int \frac{x^2}{-x-1}(-1) dx = \int \frac{x^2}{x+1} dx = \int \left(x-1+\frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c_2$ se $x < 0$

Dunque
$$\int f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \ln(x-1)^2 - \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + c_1 & \text{se } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{2} \ln(+x+1)^2 - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + c_2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

ii) Poiché $f$ è continua in $[0,1[$ e $\lim_{x \to 1^-} x \ln(x-1)^2 = -\infty$ con ordine lento (e quindi $\leq \alpha < 1$) $f$ è integ. in s.i. in $[0,1[$.

Stessa considerazione in $]1,2]$: $f$ integ. in s.i. perché continua e $\lim_{x \to 1^+} x \ln(x-1)^2 = -\infty$ con ordine lento

In $[2,+\infty)$ invece $f$ non è integ. in s.i. perché $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \neq 0$ e quindi $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.