

Corso di laurea in Chimica

ESAME di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

9 dicembre 2025

1. Risolvere la seguente equazione-nel campo complesso

$$2z^2 + 2\bar{z} + (\sqrt{3} - i)^2 z = 2 \left(\frac{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}} \right)^{20}.$$

2. Determinare il dominio della seguente funzione

$$y = \ln \left(\lg_{0,5} (x^3 - x) - \lg_{0,5} |x^3 - 1| \right),$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[10]{x+2} - \sqrt[10]{x+1}}{\sqrt[10]{x} \sqrt{\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)^2}}$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = x + \ln \frac{x^2}{|x-1|}$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1}$$

i) determinare l'integrale indefinito,

ii) dire, giustificando la risposta, se è integrabile in $(-\infty, -1]$, in $]0, 1]$ e in $[2, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = a + ib$ si ha

$$z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

$$\bar{z} = a - ib$$

$$(\sqrt{3} - i)^2 z = (3 - 1 - 2\sqrt{3}i)(a + ib) =$$

$$2(1 - \sqrt{3}i)(a + ib) = 2(a + \sqrt{3}b + ib - \sqrt{3}ai)$$

Poiché $\left(\frac{\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}}{\cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}} \right)^{20} = \cos 20\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{10}\right) + i \sin 20\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{10}\right) = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

l'equazione diventa

$$2(a^2 - b^2 + 2abi) + 2(a - ib) + 2(a + \sqrt{3}b + ib - \sqrt{3}ai) = 2$$

$$a^2 - b^2 + 2abi + 2a - ib + ib - \sqrt{3}ai = 1 \quad (\Rightarrow)$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 2a + \sqrt{3}b = 1 \\ 2ab - \sqrt{3}a = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow a(2b - \sqrt{3}) = 0 \rightarrow a = 0 \vee b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ -b^2 + \sqrt{3}b = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow b^2 - \sqrt{3}b + 1 = 0 \quad \Delta < 0 \quad \emptyset \quad \text{nessuna soluzione}$$

$$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 - \frac{3}{4} + 2a + \frac{3}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow a^2 + 2a - \frac{1}{4} = 0 \quad \Delta = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_{1,2} = -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{L'equazione ha 2 soluzioni } -1 \pm \frac{\sqrt{5}}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. $\lg_{0,5}(x^3 - x) - \lg_{0,5}|x^3 - 1| > 0 \Rightarrow \lg_{0,5}(x^3 - x) > \lg_{0,5}(x^3 - 1) \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^3 - x > 0 \\ |x^3 - 1| > 0 \\ |x^3 - 1| > x^3 - x \end{cases} \quad \begin{cases} x(x^2 - 1) > 0 \\ x^3 \neq 1 \\ |x^3 - 1| > x^3 - x \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} x(x^2 - 1) > 0 \quad x > 0 \quad x < -1 \vee x > 1 \\ \hline -1 < x < 0 \vee x > 1 \end{array}$$

$$|x^3 - 1| > x^3 - x \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} x^3 - 1 \geq 0 \\ x^3 - 1 > x^3 - x \end{cases} \vee \begin{cases} x^3 - 1 < 0 \\ -x^3 + 1 > x^3 - x \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ 2x^3 - x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$x > 1 \vee \begin{cases} x < 1 \\ (x-1)(2x^2 + 2x + 1) < 0 \end{cases} \rightarrow x < 1$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \vee x > 1 \\ x > 1 \vee x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

$$D =]-1, 0[\cup]1, +\infty[$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[10]{x+2} - \sqrt[10]{x+1}}{\sqrt[10]{x} \sqrt{(1-\cos \frac{1}{x})^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[10]{x} (\sqrt[10]{1+\frac{2}{x}} - \sqrt[10]{1+\frac{1}{x}})}{\sqrt[10]{x} |1-\cos \frac{1}{x}|} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{(1+2y)^{\frac{1}{10}} - (1+y)^{\frac{1}{10}}}{\frac{1}{2} y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{10} y - \frac{1}{10} y}{\frac{1}{2} y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{2}{10} \frac{1}{y} = +\infty$$

$1 - \cos \frac{1}{x} \geq 0 \quad \forall x \neq 0$

$1 - \cos y \sim \frac{1}{2} y^2$ $(1+2y)^\alpha \sim 1 + \alpha \cdot 2y$ (e meno di infinitesimi di ordine superiore)
 $(1+y)^\alpha \sim 1 + \alpha y$

4 ID: $\frac{x^2}{|x-1|} > 0$ $N > 0 \quad x^2 > 0 \Rightarrow x \neq 0$ $ID = \mathbb{R} - \{0, 1\}$
 $D > 0 \quad |x-1| > 0 \Rightarrow x \neq 1$

f non può essere né pari né dispari poiché ID non è simmetrico
 Perché $\emptyset \neq ID$ non ci sono intersezioni con asse y
 Non si sa qualcosa interse con asse x e positiva.

$\lim_{x \rightarrow 0} x + \ln \frac{x^2}{|x-1|} = 0 + \ln 0^+ = -\infty \quad x=0 \quad A.V.$

$\lim_{x \rightarrow 1} x + \ln \frac{x^2}{|x-1|} = 1 + \ln(+\infty) = +\infty \quad x=1 \quad A.V.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln \frac{x^2}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln \frac{x^2}{x-1} = +\infty + \ln(+\infty) = +\infty \quad \nexists A.L. \text{ o } a+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln \frac{x^2}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \ln \frac{x^2}{x-x} = +\infty + \ln(+\infty) = -\infty + \infty = -\infty$

per gli ordini $\nexists$ as. as. e $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x + \ln \frac{x^2}{|x-1|}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 1 + \frac{\ln \frac{x^2}{|x-1|}}{x} = 1 \quad (\text{eventuale coeff. as.})$
 $\rightarrow 0$ su gli ordini

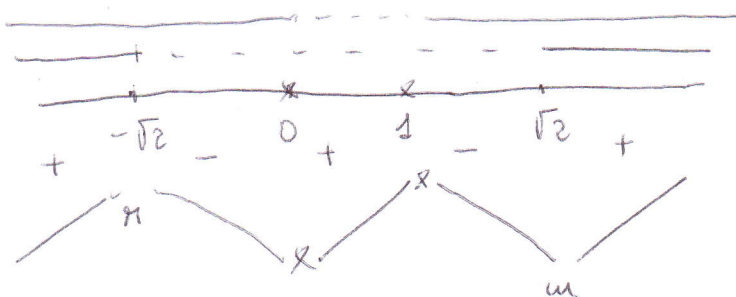
$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x + \ln \frac{x^2}{|x-1|} - x = +\infty \quad \nexists$ as. obbligo per $x \rightarrow \pm \infty$

$y' = D(x + \ln x^2 - \ln |x-1|) = D(x + 2 \ln |x| - \ln |x-1|)$

$= 1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 - x + 2x - 2 - x}{x(x-1)} = \frac{x^2 - 2}{x(x-1)}$

$ID(y') = ID(y)$

$y' > 0 \quad \frac{x^2 - 2}{x(x-1)} > 0$ $N > 0 \quad x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}$
 $D > 0 \quad x < 0 \vee x > 1$



f cresce st. per $x < -\sqrt{2}$, per $0 < x < 1$
e per $x > \sqrt{2}$

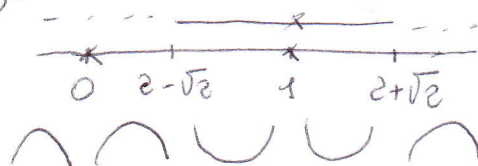
f decresce st. in $]-\sqrt{2}, 0[$ e in $]1, \sqrt{2}[$

$$m \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = f(\sqrt{2}) \end{cases}$$

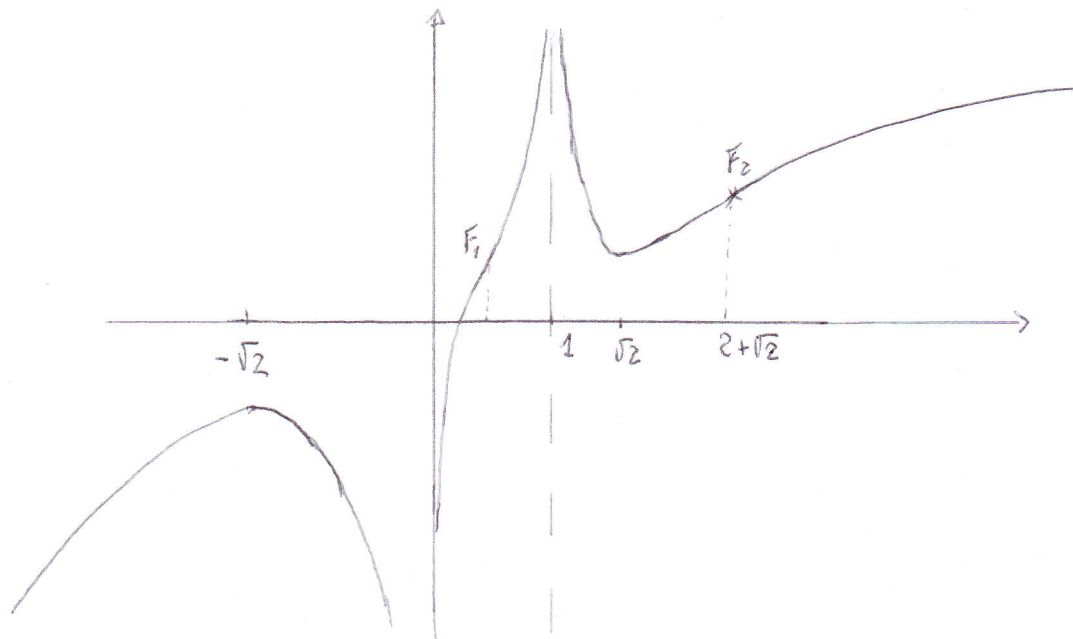
$$M \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = f(-\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$$

$$y'' = 0 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} \right) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{-x^2 + 4x - 2}{x^2(x-1)^2}$$

$$y'' > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 2 > 0 \quad 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2} \wedge x \neq 1$$



f convessa in $]2 - \sqrt{2}, 1[$ e in $]4, 2 + \sqrt{2}[$



5. Posto $e^x = t \Rightarrow x = \ln t \Rightarrow x = \frac{1}{t} dt$ e' integrale di Jorda

$$\int \frac{t^3}{t^3 - t^2 - t + 1} \frac{dt}{t} = \int \frac{t^2}{(t^2 - 1)(t + 1)} dt = \int \frac{t^2}{(t - 1)(t + 1)^2} dt$$

Per Heurte $\exists A, B, C$ univocamente determinate t.c.

$$\frac{t^2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{d}{dt} \frac{C}{t-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} - \frac{C}{(t-1)^2} = \frac{A(t^2-1) + B(t-1)^2 - C(t+1)}{(t-1)^2(t+1)}$$

$$\text{Dunque } A(t^2-1) + B(t-1)^2 - C(t+1) = t^2 \Rightarrow \text{se } t=1 \quad \begin{cases} -2C=1 \\ 4B=1 \\ +A+B+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=-\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{4} \\ A=-\frac{3}{4} \end{cases}$$

quindi

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1} dx = \int \left(\frac{-\frac{3}{4}}{t-1} + \frac{\frac{1}{4}}{t+1} + \frac{d}{dt} \frac{-\frac{1}{2}}{t-1} \right) dt = -\frac{3}{4} \ln|t-1| + \frac{1}{4} \ln|t+1| +$$

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{t-1} + C = -\frac{3}{4} \ln(e^x - 1) + \frac{1}{4} \ln(e^x + 1) - \frac{1}{2(e^x - 1)} + C$$

(4)

ii) la funzione e definita e continua $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1 \neq 0$

e cioè $(e^x - 1)^2(e^x + 1) \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$ Dunque $ID(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

Perché $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{3x}}{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1} = \frac{0}{1} = 0$ con ordine molto grande e quindi $\alpha > 1 \Rightarrow$

g integ. in s.i. in $(-\infty, -1]$.

Perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x}}{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{3x}}{(e^x - 1)^2(e^x + 1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{con ord. } 2 > 1$$

(poiché $e^x - 1 \sim x$ per $x \rightarrow 0$) $\Rightarrow g$ non è integ. in s.i. in $]0, 1]$.

Perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{e^{3x} - e^{2x} - e^x + 1} = 1 \neq 0 \Rightarrow g \text{ non è integ. in s.i. in } [2, +\infty).$$