

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

12 novembre 2025

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$i \left| -z^2 + 2|z|^2 - \bar{z}^2 \right| + 4z = 1 - i^{2027}.$$

2. Calcolare gli asintoti della funzione

$$y = (1-x) \sqrt{\frac{3-x}{1-x}}.$$

3. Determinare il dominio della funzione

$$y = \log_{0,5} \left(1 - \left| \frac{x+2}{3-2x} \right| \right)^\pi.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3\sqrt[3]{x} - 1}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{2}{3 + \sqrt{e^x + 1}}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $(-\infty, 0]$, in $[0, 2]$ e in $[4, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = x + iy$ che $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$,
 $|z|^2 = x^2 + y^2$, $| -z^2 + 2|z|^2 - \bar{z}^2 | = |4y^2| = 4y^2$.
 Poiché $i^{2023} = i^{2024} \cdot i^3 = (i^4)^{506} \cdot (-i) = -i$, l'equazione diventa

$$i4y^2 + 4x + 4yi = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 1 \\ 4y^2 + 4y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

l'equazione ha 2 soluzioni $z_1 = \frac{1}{4} + \frac{-2+\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = \frac{1}{4} - \frac{2+\sqrt{2}}{2}i$.

2. ID: $\frac{3-x}{1-x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (3-x)(1-x) \geq 0 \\ 1-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x < 1 \vee x \geq 3$

Asintoti Verticali

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sqrt{\frac{3-x}{1-x}} = 0 \cdot (+\infty) = 0 \quad \text{per gli ordini} \quad \nexists \text{ A.V.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{+}} (1-x) \sqrt{\frac{3-x}{1-x}} = +\infty \quad \nexists \text{ As. obliquo}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{+}} \frac{(1-x) \sqrt{\frac{3-x}{1-x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{+}} \frac{1-x}{x} \sqrt{\frac{3-x}{1-x}} = -1$$

eventuale coeff. angolare
di asintoto obliquo
per $x \rightarrow \pm \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \mp \infty} (1-x) \sqrt{\frac{3-x}{1-x}} + x = +\infty - \infty \quad \text{f.i.} \quad \text{Distinguiamo i casi } x \rightarrow -\infty \text{ e } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1-x) \sqrt{\frac{3-x}{1-x}} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{(1-x)^2(3-x)}{1-x}} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 3} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{-\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \cdot \left(-\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)(-x) =$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{-\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \cdot \left(4 - \frac{3}{x}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

perché $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{\frac{1}{2}} - 1}{y} = \frac{1}{2}$

$$y = -x + 2 \quad \text{As. obl.} \quad a = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) \sqrt{\frac{3-x}{1-x}} + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} - \sqrt{\frac{(1-x)(3-x)}{1-x}} + x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 3} + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + x =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x \sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - 1 \right) =$$

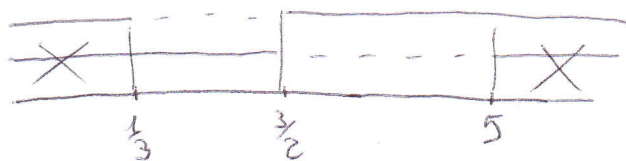
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} - \frac{\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{-\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} \left(-\frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \cdot x = -\frac{1}{2}(-4) = 2$$

$\frac{1}{2}$

questo $y = -x + 2$ As. obl.
 $a \pm \infty$

$$3. \left(1 - \left|\frac{x+2}{3-2x}\right|\right) > 0 \Leftrightarrow 1 - \left|\frac{x+2}{3-2x}\right| > 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x+2}{3-2x}\right| < 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x+2}{3-2x} < 1$$

$$\begin{cases} \frac{x+2+3-2x}{3-2x} > 0 \\ \frac{x+2-3+2x}{3-2x} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5-x}{3-2x} > 0 \\ \frac{3x-1}{3-2x} < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < \frac{3}{2} \vee x > 5 \\ x < \frac{1}{3} \vee x > \frac{3}{2} \end{cases}$$



$$x < \frac{1}{3} \vee x > 5$$

$$4. ID: \sqrt[3]{x} \neq 1 \quad \sqrt[3]{x} \neq \frac{1}{3} \quad x \neq \frac{1}{27} \quad ID = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{27}\right\}$$

Poiché il dominio non è simmetrico rispetto a 0, f non è né pari né dispari.

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \quad (0,0) \text{ unica intersezione con gli assi}$$

$$\begin{aligned} f(x) > 0 & \quad N > 0 & \quad \sqrt[3]{x^2} > 0 & \quad \forall x \neq 0 & \quad f(x) > 0 & \quad \forall x > \frac{1}{27} \\ & \quad D > 0 & \quad \sqrt[3]{x} > 1 & \quad x > \frac{1}{27} & & \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{27}\right)^+} f(x) = \frac{\frac{1}{9}}{0^+} = +\infty \quad x = \frac{1}{27} \quad \text{As. verticale completo}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{(\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x}} = \pm \infty \quad \nexists \text{ As. obl.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^{2/3}}{x(3\sqrt[3]{x}-1)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}(3\sqrt[3]{x}-1)} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad (3)$$

A as. obliqui per $x \rightarrow \pm \infty$.

$$y' = \frac{\frac{2}{3} x^{-1/3} (3\sqrt[3]{x}-1) - x^{2/3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}}{(3\sqrt[3]{x}-1)^2} = \frac{2 - 2\sqrt[3]{x} - 1}{(3\sqrt[3]{x}-1)^2} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}}{(3\sqrt[3]{x}-1)^2}$$

$$ID: x \neq 0 \wedge x \neq \frac{1}{27}$$

$$ID(y') = ID(y) - \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}}{(3\sqrt[3]{x}-1)^2} = +\infty$$

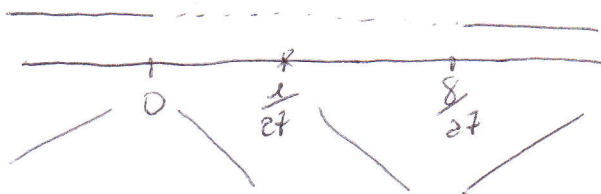
$x=0$ pto cuspidale

$$f'_-(0) = +\infty$$

$$f'_+(0) = -\infty$$

$$y' > 0 \quad 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \quad \frac{3\sqrt[3]{x}-2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} < 0 \vee \sqrt[3]{x} > \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x < 0 \vee x > \frac{8}{27}$$

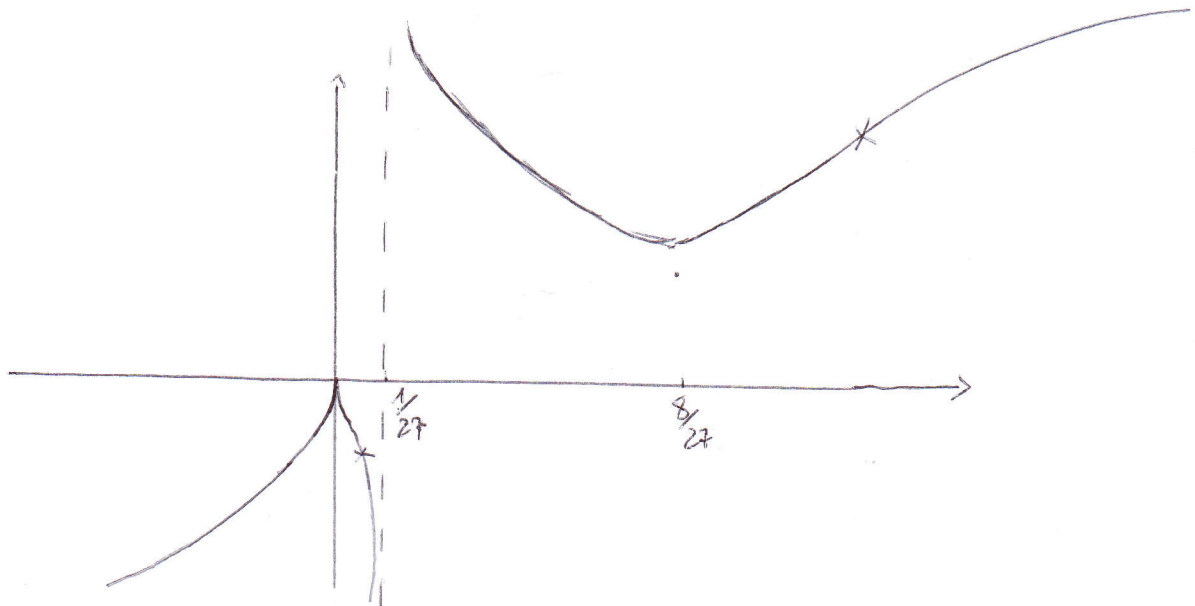


La funzione cresce in $(-\infty, 0]$ e in $[\frac{8}{27}, +\infty)$

decrece in $[0, \frac{1}{27}]$ e in $[\frac{1}{27}, \frac{8}{27}]$

$$M \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$m \begin{cases} x = \frac{8}{27} \\ y = \frac{4}{9} \end{cases}$$



Per brevità si omette lo studio del segno di y'' . Poiché $f'_+(0) = +\infty$ e $x = \frac{1}{27}$ A. V. tra 0 e $\frac{1}{27}$ c'è di sicuro un flesso. In realtà si può verificare l'esistenza di un altro flesso dopo il minimo poiché per $x \rightarrow +\infty$ $f(x)$ si comporta come $\frac{x^2/3}{\sqrt[3]{x}} \approx \sqrt[3]{x}$ (converge all'infinito).

5. $\int \frac{2}{3 + \sqrt{e^x + 1}} dx = \int \frac{2}{3+t} \cdot \frac{2t}{t^2-1} dt$ posto $\sqrt{e^x + 1} = t \Rightarrow e^x = t^2 - 1$
 $x = \ln(t^2 - 1) \Rightarrow dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$
 $= \int \frac{4t}{(t+3)(t-1)(t+1)} dt =$

poiché $\frac{4t}{(t+3)(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{t+1} = \frac{A(t^2-1) + B(t+3)(t+1) + C(t+3)(t-1)}{(t+3)(t^2-1)}$
 $\Rightarrow A(t^2-1) + B(t+3)(t+1) + C(t+3)(t-1) = 4t$
Se $t=1$ Se $t=-1$ Se $t=-3$
 $8B=4 \Rightarrow B=\frac{1}{2}$ $-2C=-4 \Rightarrow C=2$ $8A=-12$
 $A=-\frac{3}{2}$

$= \int \frac{-\frac{3}{2}}{t+3} dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1} dt + \int \frac{2}{t+1} dt = -\frac{3}{2} \ln|t+3| + \frac{1}{2} \ln|t-1| + 2 \ln|t+1| + C$
 $= -\frac{3}{2} \ln(\sqrt{e^x + 1} + 3) + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{e^x + 1} - 1) + 2 \ln(\sqrt{e^x + 1} + 1) + C$

ii) la funzione è definita in $\mathbb{R}$ ed è ivi continua.

In $(-\infty, 0]$ lim $f(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow f$ non è integ. in s.i. in $(-\infty, 0]$
In $[0, 2]$ f è integ. in senso classico perché cont. in intervallo chiuso e limitato
In $[4, +\infty)$ lim $f(x) = 0$ con ordine comunque grande quindi > 1 . Segue che f è integ. in s.i.