

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

14 ottobre 2025

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$iz^4 - 2z^2 - 2i = 0.$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \left[\log_{10} \left(\left| \frac{x-2}{x+1} \right| - 3 \right) \right]^{\sqrt{2}}.$$

3. Calcolare gli asintoti della funzione:

$$y = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}.$$

4. Data

$$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2 - 1},$$

a) studiare la funzione e disegnarne il grafico approssimativo (non è richiesto lo studio della derivata seconda);

b) dire, giustificando le risposte, se f è integrabile in senso improprio in $[0, 1)$, in $(1, 2]$ e in $[2, +\infty)$

5. Calcolare

$$\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + x + \sqrt{x}} dx.$$

Svolgimento

1. Posto $t = z^2$ si ha $i + t - 2t - 2i = 0$ e quindi

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+2i^2}}{i} = \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{i} = \frac{1 \pm i}{i} = \pm 1 + \frac{1}{i} = \pm 1 - i$$

$$z^2 = 1 - i \Rightarrow z = \sqrt{1-i} = \sqrt{\sqrt{2}(\cos \frac{7}{4}\pi + i \sin \frac{7}{4}\pi)} \\ = \left\{ \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{7}{4}\pi + 2k\pi}{2} \right) \mid k \in \{0, 1\} \right\}$$

per $k=0$ $z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{7}{8}\pi + i \sin \frac{7}{8}\pi \right)$

$k=1$ $z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{7}{8}\pi + \pi \right) + i \sin \left(\frac{7}{8}\pi + \pi \right) \right) = -z_0$

$$z^2 = -1 - i \Rightarrow z = \sqrt{-1-i} = \sqrt{\sqrt{2}(\cos \frac{5}{4}\pi + i \sin \frac{5}{4}\pi)} \\ = \left\{ \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{2} \right) \mid k \in \{0, 1\} \right\}$$

per $k=0$ $z_0 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5}{8}\pi + i \sin \frac{5}{8}\pi \right)$

$k=1$ $z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \left(\frac{5}{8}\pi + \pi \right) + i \sin \left(\frac{5}{8}\pi + \pi \right) \right) = -z_0$

L'equazione di 4° grado ha 4 soluzioni a 2 a 2 opposte date da $\left\{ \pm \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right), \pm \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5}{8}\pi + i \sin \frac{5}{8}\pi \right) \right\}$.

2. $\log_{10} \left(\left| \frac{x-2}{x+1} \right| - 3 \right) \geq 0 \Rightarrow \left| \frac{x-2}{x+1} \right| - 3 \geq 1 \Rightarrow \left| \frac{x-2}{x+1} \right| \geq 4 \Rightarrow$

$$\frac{x-2}{x+1} \leq -4 \vee \frac{x-2}{x+1} \geq 4 \Rightarrow \frac{x-2+4x+4}{x+1} \leq 0 \vee \frac{x-2-4x-4}{x+1} \geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{5x+2}{x+1} \leq 0 \vee \frac{-3x-6}{x+1} \geq 0 \Rightarrow -1 < x \leq -\frac{2}{5} \vee -2 \leq x < -1$$

$$\Rightarrow -2 \leq x \leq -\frac{2}{5} \wedge x \neq -1$$

$$D = [-2, -1[\cup]-1, -\frac{2}{5}]$$

3. ID: $\frac{x^3}{x+3} \geq 0 \Rightarrow \begin{array}{l} N \geq 0 \quad x \geq 0 \\ D > 0 \quad x > -3 \end{array}$

$$\begin{array}{c} \text{---} x \text{---} \\ \text{---} -3 \text{---} 0 \text{---} + \\ + \quad 3 \quad - \quad 0 \quad + \end{array}$$

$$ID = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \sqrt{\frac{-27}{0^-}} = +\infty \quad x = -3 \quad \text{A.V. a destra}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \sqrt{\frac{x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} |x| = +\infty \quad \text{As. ob.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1 \quad (\text{eventuale coeff. angolare ds asintoto obliquo})$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{\frac{x}{x+3}} - 1 \right) \left(\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1 \right)}{\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{x}{x+3} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{3x}{x+3}}{\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1} = -\frac{3}{2} \quad y = x - \frac{3}{2} \\ &\quad \text{as. ob. a } +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} + x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-\sqrt{\frac{x}{x+3}} + 1 \right) \left(1 + \sqrt{\frac{x}{x+3}} \right)}{1 + \sqrt{\frac{x}{x+3}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(1 - \frac{x}{x+3} \right)}{1 + \sqrt{\frac{x}{x+3}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x}{x+3}}{1 + \sqrt{\frac{x}{x+3}}} = \frac{3}{2} \quad y = -x + \frac{3}{2} \\ &\quad \text{as. ob. a } -\infty \end{aligned}$$

L. ID: $\begin{cases} x^2 - 1 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \quad x \neq \pm 1 \quad \text{ID} = \mathbb{R} - \{\pm 1\} \quad f(-x) \neq \pm f(x) \quad f \text{ ne' pari ne' dispari}$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=-e^{-1} \end{cases} \quad (0, -\frac{1}{e}) \quad \begin{cases} y=0 \\ \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-1} = 0 \end{cases} \quad \phi$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-1} > 0 \Leftrightarrow x^2-1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

↓
poiche' la fun. espon. e' sempre > 0

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-1} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{0^+} = +\infty \quad \Rightarrow x = -1 \quad \text{As. verticale completa}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-1} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-1} = \frac{e^{-\infty}}{0^-} = \frac{0}{0} = 0 \quad \text{per gli ordini e' prolungabile a destra in 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-1} = \frac{e^{+\infty}}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \quad x=1 \quad \text{As. vert. solo da sinistra}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x^2-1} = \frac{e^0}{+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$y \neq 0 \quad \text{Annot. a } \pm \infty$$

$$y' = \frac{e^{\frac{1}{x-1}} \left(-\frac{1}{(x-1)^2} \right) (x^2-1) - 2x e^{\frac{1}{x-1}}}{(x^2-1)^2} = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x^2-1)^2} \left[-\frac{x^2-1}{(x-1)^2} - 2 \right] = \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x^2-1)^2} \left[-\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} - 2 \right]$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x^2-1)^2} \left(\frac{-2x^2+x-1}{x-1} \right) \quad \forall x \neq \pm 1 \quad \text{ID}(y') = \text{ID}(y)$$

A pi angolari ed cuspidali ma conviene comunque calcolare $\lim_{x \rightarrow 1^-} y'$ per studiare più precisamente il comportamento di f vicino a 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} \left(\frac{-2x^2+x-1}{x-1} \right) = \frac{0}{0} = 0 \quad \text{sempre per gli ordini}$$

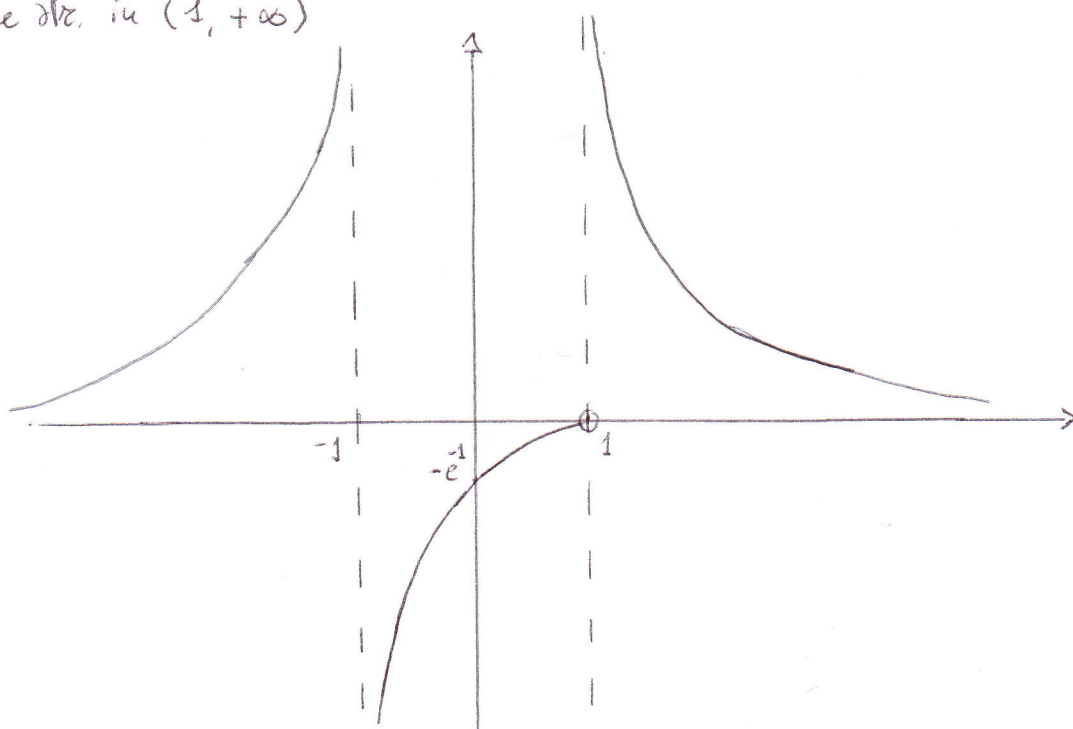
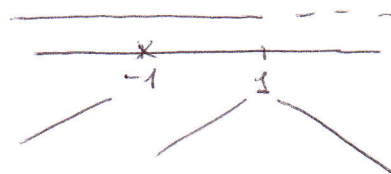
Dunque per $x \rightarrow 1^-$ la funzione tende a 0 con la sua derivata prima quindi con tangente orizzontale.

$$y' > 0 \Rightarrow \frac{2x^2 - x + 1}{x-1} < 0 \quad \begin{matrix} N > 0 & 2x^2 - x + 1 > 0 & \forall x \text{ (poich\'e } \Delta < 0) \\ D > 0 & x > 1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow y' > 0 \quad \text{per } x < 1 \text{ e } x \neq -1$$

f cresce str. in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, 1)$

decresce str. in $(1, +\infty)$



b) In $[0, 1)$ f è continua e convergente per $x \rightarrow 1^-$, quindi è integrabile in senso improprio (e in senso classico)

(4)

In $(1, 2]$ f è continua ma non è integrabile in senso improprio essendo

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} = +\infty \quad \text{con ordine grande e quindi } \alpha > 1.$$

In $[2, +\infty)$ f è continua e $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} = \frac{1}{\infty} = 0$ con ordine $2 > 1$ e quindi è integrabile in senso improprio.

5.
$$\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+t}{1+t^2+t} \cdot 2t dt$$

$\sqrt{x} = t \quad x = t^2$
 $dx = 2t dt$

$$= 2 \int \frac{t^2+t}{t^2+t+1} dt = 2 \int \left[1 - \frac{1}{t^2+t+1} \right] dt = 2t - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$
$$= 2\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{3}} + C \quad \text{perché}$$

$$\int \frac{1}{t^2+t+1} dt = \int \frac{4}{4t^2+4t+4} dt = \int \frac{4}{(2t+1)^2+3} = 4 \int \frac{1}{3 \left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]} dt$$
$$= \frac{4}{3} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} \left[\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right)^2 + 1 \right]} dt = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C.$$