

# Corso di laurea in Chimica

## Esame di

### ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

19 settembre 2025

1. Posto  $z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)$ , risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$z^2 = \operatorname{Im}(z) + 2i((\operatorname{Re}(z))^2 - |z|).$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{4 \cdot 2^{-|\sqrt{x^2-1}-x|} - 1}.$$

3. Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - \frac{x^2}{x+1} - x}{\arcsin^3 x}.$$

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right|.$$

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{\ln(1+x^3)}{x^2},$$

a) calcolarne l'integrale indefinito;

b) giustificando la risposta, dire se è integrabile in senso improprio in  $\left(-1; -\frac{1}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{2}; 0\right)$  e  $[1; +\infty)$ .

# Svolgimento

1. Posto  $z = x + iy$  l'equazione diventa

$$(x+iy)^2 = y + 2ix^2 - \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = y + 2ix^2 - \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = y - \sqrt{x^2+y^2} \\ 2xy = 2ix^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = y - \sqrt{x^2+y^2} \\ x(y-x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 = y - |y| \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{2}|x| \\ x = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 + y - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y < 0 \\ y^2 + y + y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ (1-\sqrt{2})x = 0 \\ y = x \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ (1+\sqrt{2})x = 0 \\ y = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

L'equazione ha due soluzioni  $z = 0$ ,  $z = -2i$

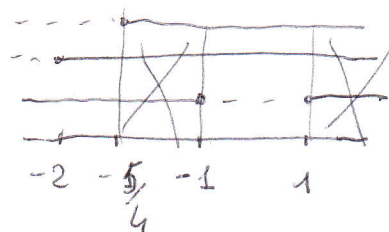
2.  $4 \cdot 2^{-|\sqrt{x^2-1}-x|} \geq 8 \Leftrightarrow 2^{2-|\sqrt{x^2-1}-x|} \geq 2^0 \Leftrightarrow$

$$2 - |\sqrt{x^2-1} - x| \geq 0 \Leftrightarrow |\sqrt{x^2-1} - x| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt{x^2-1} - x \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-1} \leq x+2 \\ \sqrt{x^2-1} \geq x-2 \end{cases} \quad \text{Risolviendo separatamente le 2 diseq. irrazionali  
si ha}$$

$$\sqrt{x^2-1} \leq x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \\ x^2-1 \leq x^2+4x+4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \geq -2 \\ x \geq -\frac{5}{4} \end{cases}$$



$$-\frac{5}{4} \leq x \leq -1 \vee x \geq 1$$

$$\sqrt{x^2-1} \geq x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ x^2-1 \geq x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \vee 1 \leq x < 2 \vee x \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$$

$$\begin{cases} -\frac{5}{4} \leq x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \leq -1 \vee x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow D = \left[-\frac{5}{4}, -1\right] \cup [1, +\infty)$$

3. Poiché il limite si presenta nella forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ , per Taylor si ha

$$\begin{aligned} e^x \cdot \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \end{aligned}$$

$$\arcsin^3 x = x^3 + o(x^3)$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - \frac{x^2}{x+1} - x}{\arcsin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{x} + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{x^2}{x+1} - \cancel{x}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{x+1} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x^4 + x^3 + o(x^3)}{3(x+1)x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 + \cancel{x^4} + o(\cancel{x^3})}{3(x+1)x^3} = \frac{4}{3}$$

4. D:  $\left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| > 0 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x} \neq 0 \Rightarrow e^x - 1 \neq 0 \Rightarrow e^x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| > 0 \Rightarrow \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| > 1 \Rightarrow \frac{e^x - 1}{e^x} < -1 \vee \frac{e^x - 1}{e^x} > 1$$

$$\Rightarrow e^x - 1 < -e^x \vee e^x - 1 > e^x \Rightarrow 2e^x < 1 \vee -1 > 0 \Rightarrow e^x < \frac{1}{2}$$

$$x < \ln \frac{1}{2}$$

Il int. con asse y poiché  $0 \notin D$

$$\begin{cases} y=0 \\ f(x)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \ln \frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$$

Asintoti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| = \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$$

$$y = \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right|$$

Il as. orizz. a  $-\infty$   
Vediamo se  $\exists$  as. obliquo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right|}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{e^x \cdot e^x - (e^x - 1)e^x}{(e^x)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{(e^x - 1)e^x} = -1 \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| + x = +\infty - \infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln |e^x - 1| - \ln |e^x| + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln |e^x - 1| - \cancel{x} + \cancel{x} = \ln 1 = 0 \quad y = -x \text{ as. obl. } a \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| = \ln 1 = 0 \quad y = 0 \text{ as. obl. } a \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \ln y = -\infty$$

$\downarrow y \rightarrow 0$   
 $y = \left| \frac{e^x - 1}{e^x} \right|$

$x = 0$  as. verticale

$$y' = \frac{e^x}{e^x - 1} \cdot \frac{e^{2x} - e^{2x} + e^x}{e^{2x}} = \frac{1}{e^x - 1}$$

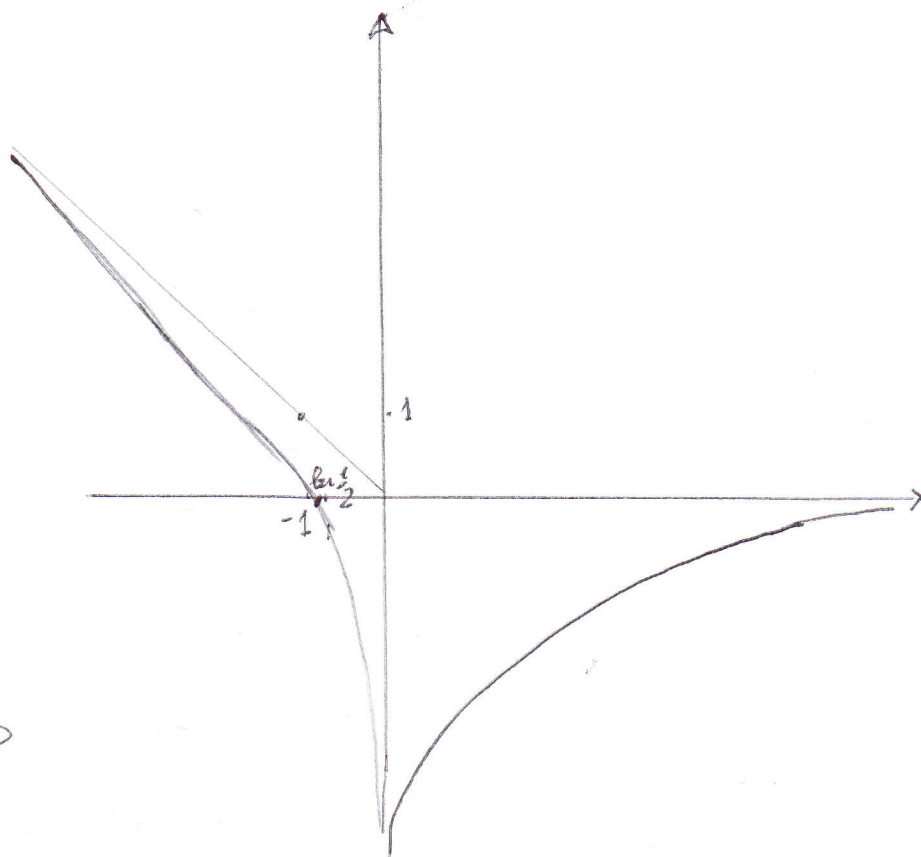
$$y' > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$$

f. st. cres. per  $x > 0$

$$y'' = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$y'' > 0 \quad \forall x \in D$$

f. concave per  $x < 0$  e per  $x > 0$



$$5. \int \frac{\ln(1+x^3)}{x^2} dx = \int \ln(1+x^3) D\left(-\frac{1}{x}\right) dx \stackrel{p.p.}{=} -\frac{\ln(1+x^3)}{x} + \int \frac{3x^2}{1+x^3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

Calcolo il 2° integrale con la formula di Ruffini

$$\frac{x}{1+x^3} = \frac{x}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A+C}{x^3+1}$$

e quindi dal principio di identità dei polinomi segue che

(4)

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=1 \\ A+C=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ -A-A-A=1 \\ C=-A \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} A &= -\frac{1}{3} \\ B &= C = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$3 \int \frac{x}{x^3+1} dx = -3 \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1} dx + 3 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx = -\ln|x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{2x+1+3}{x^2-x+1} dx$$

$$= -\ln|x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{4}{4x^2-4x+4} dx$$

$$= -\ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + 6 \int \frac{1}{(2x-1)^2+3} dx$$

$$= -\ln|1+x| + \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]} dx$$

$$= -\ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2-x+1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

b)  $g$  è continua per  $-1 < x < 0$  o  $x > 0$  dove è definita. In particolare:  
 • In  $(-1, -\frac{1}{2}]$   $g$  è continua ed è integrabile in s.i. perché

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(1+x^3)}{x^2} = \frac{-\infty}{1} = -\infty \text{ con ordine molto lento e quindi } < \infty < 1$$

• In  $[\frac{1}{2}, 0)$   $g$  è continua ed è integrabile in senso classico perché

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3}{x^2} = 0 \in \mathbb{R}$$

• In  $[1, +\infty)$   $g$  è continua ed è integrabile in s.i. perché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} = 0 \text{ con ordine "quasi" 2 perché al nume-}$$

ratore ho ordine molto lento al denom. =

ho ordine 2 quindi il rapporto è  $\times 2 - \epsilon$

$\forall \epsilon > 0$  posso a piacere. In particolare

l'ordine è  $> \frac{3}{2} > 1$ .