

Corso di laurea in Chimica

Esame di

ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

16 giugno 2025

1. Risolvere la seguente equazione nel campo complesso

$$i \left| z^2 - 2|z|^2 + \bar{z}^2 \right| + 4z = 1 - i^{2025}.$$

2. Calcolare gli asintoti della funzione

$$y = x^2 \sqrt{x^2 + x} - x^3 + \arctan \frac{e^x - 1}{|x|}.$$

3. Determinare il dominio della funzione

$$y = \left(\ln \log_{0,5} \frac{x+1}{x-1} \right)^\pi.$$

4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\ln^3 |x|}.$$

e disegnarne il grafico approssimativo.

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

i) calcolare l'integrale indefinito;

ii) stabilire, giustificando la risposta, se è integrabile in $[0, 2)$, $[2, 4]$ e in $[4, +\infty)$.

Svolgimento

1. Posto $z = x + iy$ si ha $z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi$
 $|z|^2 = x^2 + y^2$

e quindi, poiché $i^{2025} = (i^4)^{506} \cdot i = 1^{506} \cdot i = i$, l'equazione diventa

$$i |x^2 - y^2 + 2xyi - (x^2 - y^2 - 2xyi)| + 4x + 4yi = 1 - i$$

$$i |-4y^2| + 4x + 4yi = 1 - i \Leftrightarrow 4y^2 i + 4yi + 4x = 1 - i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4y^2 + 4y = -1 \\ 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2y+1)^2 = 0 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \text{L'equazione ha unica sol. } z = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}i$$

2. ID: $\begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ |x| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{ID} = (-\infty, -1] \cup]0, +\infty)$

As. Verticali:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \sqrt{x^2 + x} - x^3 + \text{and } g \frac{e^x - 1}{x} = \text{and } g \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (\text{N.B. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1)$$

$\Rightarrow$ As. Verticali

As. orizz.:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x^2 \sqrt{x^2 + x}}_{+\infty} - \underbrace{x^3}_{+\infty} + \underbrace{\text{and } g \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limitata}} = +\infty \quad \text{As. or. a } -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x^2 \sqrt{x^2 + x}}_{+\infty} - \underbrace{x^3}_{-\infty} + \underbrace{\text{and } g \frac{e^x - 1}{x}}_{\text{limitata}} = +\infty \quad \text{può}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x^2 + x} - x^3 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot |x| \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) - x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty. \quad \text{As. or. a } +\infty \end{aligned}$$

As. obliqui

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \sqrt{x^2 + x} - x^3 + \text{and } g \frac{e^x - 1}{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{x \sqrt{x^2 + x} - x^2}{x}}_{-\infty} + \underbrace{\frac{\text{and } g \frac{e^x - 1}{|x|}}{x}}_{-\infty} = -\infty$$

As. obliquo a $-\infty$

+ prodotto di 0 f. infinitesime per f. limitata

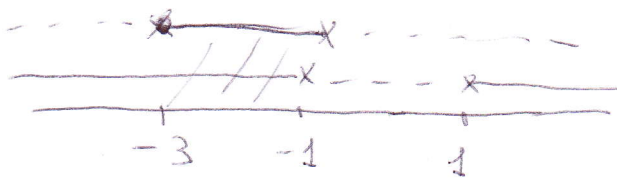
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{x^2 + x} - x^3 + \arctan \frac{e^x - 1}{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x \sqrt{x^2 + x} - x^2}_{+\infty - \infty} + \underbrace{\frac{1}{x} \arctan \frac{e^x - 1}{x}}_{0 \text{ come sopra}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) = +\infty$$

As. obbligo a $+\infty$. La funzione non ha asintoti.

$$3. \ln \log_{0,5} \frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \log_{0,5} \frac{x+1}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} > 0 \\ \frac{x+1}{x-1} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ \frac{2x+2-x+1}{2(x-1)} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < -1 \vee x > 1 \\ \frac{x+3}{2(x-1)} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow -3 \leq x < 1$$



$$D = [-3, 1[$$

$$4. ID: \begin{cases} |x| > 0 \\ \ln^3 |x| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \ln |x| \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ |x| \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \quad ID = \mathbb{R} - \{0, +1, -1\}$$

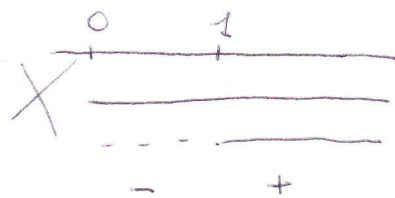
$$f(-x) = \frac{-x}{\ln^3 |x|} = -f(x) \quad \forall x \in ID$$

f è dispari. Basta studiare per $x > 0$ e poi ribaltare il grafico rispetto all'origine.

Positive:

$$\frac{x}{\ln^3 x} > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$\ln x > 0 \Rightarrow x > 1$$



f è positiva per $x \in]0, 1[$ e negativa per $x > 1$

Asintoti verticali

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln^3 x} = \frac{0}{-\infty} = 0 \quad \text{As. vert.} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln^3 x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad x=1 \text{ A.V.}$$

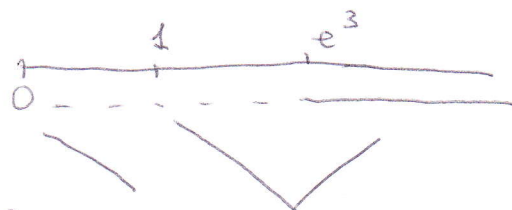
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln^3 x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \quad (\text{per gli ordini}) \quad \text{As. obliquo a } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^3 x} = 0 \quad \text{I as. obliqua } e + \infty$$

$$y' = D\left(\frac{x}{\ln^3 x}\right) = \frac{\ln^3 x - x \cdot 3(\ln^2 x) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^6 x} = \frac{\ln^2 x (\ln x - 3)}{\ln^6 x} = \frac{\ln x - 3}{\ln^4 x} \quad ID(y') = ID(y)$$

$$y' > 0 \quad \ln x - 3 > 0 \quad \ln x > 3 \quad x > e^3$$

$$\ln^6 x > 0 \quad \forall x \in ID$$



f decreases in $]0, 1[$ e in $]e^3, +\infty[$
 cresce in $[e^3, +\infty)$

$$u \begin{cases} x \geq e^3 \\ y = \frac{e^3}{(\ln e^3)^3} = \left(\frac{e}{3}\right)^3 \end{cases}$$

Per completezza calcolo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x - 3}{\ln^4 x} = \frac{-\infty}{+\infty} = 0 \quad (\text{per gli ordini})$$

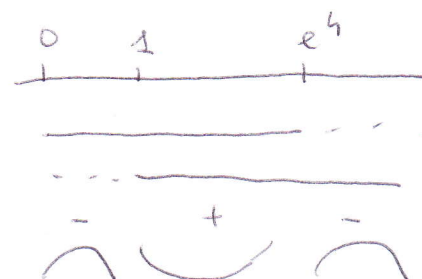
Dunque per $x \rightarrow 0^+$ $f(x) \rightarrow 0$ con tangente orizzontale

$$y'' = D\left(\frac{\ln x - 3}{\ln^4 x}\right) = \frac{\frac{1}{x} \ln^4 x - (\ln x - 3) 4 \ln^3 x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^8 x} = \frac{-3 \ln^4 x + 12 \ln^3 x}{x \ln^8 x}$$

$$= 3 \frac{\ln^3 x (-\ln x + 4)}{x \ln^8 x} = 3 \frac{4 - \ln x}{x \ln^5 x}$$

$$y'' > 0 \quad 4 - \ln x > 0 \quad \ln x < 4 \quad x < e^4$$

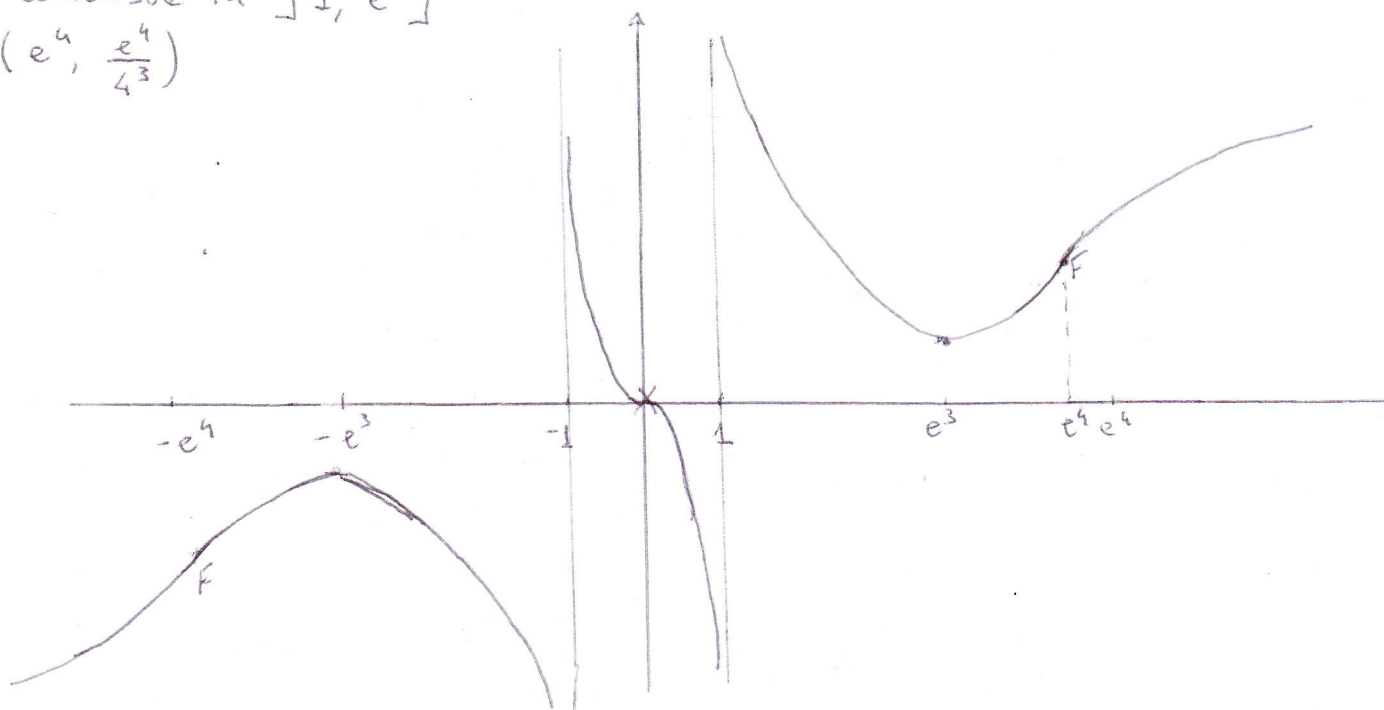
$$\ln^5 x > 0 \quad \ln x > 0 \quad x > 1$$



f concave in $]0, 1[$ e in $]e^4, +\infty[$

convessa in $[1, e^4]$

$$F\left(e^4, \frac{e^4}{4^3}\right)$$



5. $\int \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-4}} dx$

$\sqrt{x^2-4} = t \rightarrow x^2 = 4+t^2 \rightarrow x = \sqrt{4+t^2}$

$dx = \frac{t}{\sqrt{4+t^2}} dt$

$= \int \frac{\sqrt{4+t^2} (t^2+4+1)}{t} \cdot \frac{t}{\sqrt{4+t^2}} dt = \int (t^2+5) dt = \frac{t^3}{3} + 5t + C =$

$\frac{1}{3} \sqrt{(x^2-4)^3} + 5\sqrt{x^2-4} + C.$

ii) Poiché g è definita per $x^2-4 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

la funzione non è integrabile in $[0, 2)$ perché non è ivi definita.

In $[2, 4]$ invece g è integ. in d.i. perché continua e

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ con ord $\frac{1}{2} < 1$.

In $[4, +\infty)$ invece g non è integ. in d.i. perché è continua ma

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$ (per gli ordini)

Segue che l'integrale improprio di g tra 4 e $+\infty$ vale $+\infty$.