

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

15 maggio 2025

1. Risolvere la seguente equazione

$$(z-2)\overline{(z-2)} + \frac{(1+i)^6}{(1-i)^3} = 2\bar{z}$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$y = \sqrt{3x - \ln(e^{2x} + e^x - 1)}.$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - 1}{\sin \sqrt{x} + 1 - \cos \sqrt[4]{x} + x^4}.$$

4. Studiare e disegnare il grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2|x|}.$$

5. Data la funzione

$$g(x) = \frac{2 \ln x + 1}{x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 3 \ln x - 1)},$$

- a) calcolarne l'integrale indefinito;

- b) applicando la definizione, calcolare $\int_0^1 g(x) dx$;

- c) applicando criterio di integrabilità in senso improprio, dire se è integrabile in s.i. in $[1, e[$.

Svolgimento

1. Poiché $\frac{(1+i)^6}{(1-i)^3} = \left(\frac{(1+i)^2}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{2i}{1-i}\right)^3 = \left[\frac{2i(1+i)}{2}\right]^3 = (-1+i)^3 = -1+3i+3-i-1 = 2+2i$

$$(\overline{z-2})(z-2) = |z-2|^2 = (a-2)^2 + b^2$$

dove $z = a+ib \Rightarrow z-2 = a-2+ib$,

e l'equazione diventa

$$(a-2)^2 + b^2 + 2 + 2i = 2a - 2bi \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 + 2 = 2a \\ 2 = -2b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 - 4a + 4 + 1 + 2 = 2a \\ b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 6a + 7 = 0 \\ b = -1 \end{cases} \quad a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}$$

L'equazione ha due soluzioni $z_1 = 3 + \sqrt{2} - i$ e $z_2 = 3 - \sqrt{2} - i$.

2. $3x - \ln(e^{2x} + e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} + e^x - 1 > 0 \\ 3x \geq \ln(e^{2x} + e^x - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} + e^x - 1 > 0 \\ e^{3x} \geq e^{2x} + e^x - 1 \end{cases}$

$e^x = y \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 1 > 0 \\ y^3 - y^2 - y + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 1 > 0 \\ (y^2 - 1)(y - 1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 1 > 0 \\ (y - 1)^2(y + 1) \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + y - 1 > 0 \\ y + 1 > 0 \end{cases} \quad \Delta = 1 + 4 \quad y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} y < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \vee y > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ y > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \vee e^x > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ e^x > -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \emptyset \vee x > \ln \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x > \ln \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad D = \left] \ln \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$$

3. Poiché $x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1 \sim x \ln x$ per $x \rightarrow 0$ (poiché $x \ln x \rightarrow 0$)
sen $\sqrt{x} \sim \sqrt{x}$, $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2 = \frac{1}{2}x$ per $x \rightarrow 0$

il limite diventa

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} \sqrt{x} \ln x = 0 \quad (\text{perché } \forall x > 0; \lim_{x \rightarrow 0} x^4 \ln x = 0)$$

trascurando x^4 infinitesimo più veloce di $\sqrt{x}$

4. ID: $x^2 + 2|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) \neq \pm f(x) \quad f$ né pari né dispari (2)

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x+\sqrt{x^2+2|x|} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x^2+2|x|} = -x \Rightarrow \begin{cases} -x \geq 0 \\ x^2+2|x| = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ |x|=0 \Rightarrow x=0 \end{cases}$$

(0,0) unico punto di intersezione con gli assi.

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2+2|x|} \geq -x \Rightarrow \begin{cases} x^2+2|x| \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x > 0 \\ x^2+2|x| \geq x^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ |x| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0 \vee x < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sqrt{x^2+2|x|} = -\infty + \infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+\sqrt{x^2-2x})(x-\sqrt{x^2-2x})}{x-\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x - 1 \times 1 \sqrt{1 - 2/x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x(1 + \sqrt{1 - 2/x})} = \frac{2}{2} = 1 \quad y=1 \text{ As. oz. } a=-\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \sqrt{x^2+2|x|} = +\infty + \infty = +\infty \quad \Delta \text{ as. oz. } a=+\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \sqrt{1+2/x})}{x} = 2 \quad \text{eventuale coeff angolare as. obliquo } a=+\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2x} - x = +\infty - \infty =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+2x} - x)(\sqrt{x^2+2x} + x)}{\sqrt{x^2+2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2}{x(\sqrt{1+2/x} + 1)} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{termine nullo as. obliquo}$$

$$y = 2x + 1 \quad \text{As. obliquo } a=+\infty$$

$$y' = 1 + \frac{2x + 2 \frac{x}{|x|}}{2\sqrt{x^2+2|x|}} = \begin{cases} 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2|x|}} & \text{se } x > 0 \\ 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2|x|}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$\text{ID}(y') = \mathbb{R} - \{0\}$$

Perché $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2|x|}} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2|x|}} = -\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'_+(0) = +\infty \wedge f'_-(0) = -\infty$
 $x=0$ Ato cuspidale

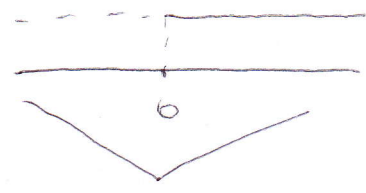
$$f'(x) > 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} > 0 \\ x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} > 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 0 \vee \begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x} + x - 1 > 0 \\ x < 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow x > 0 \vee \begin{cases} \emptyset \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

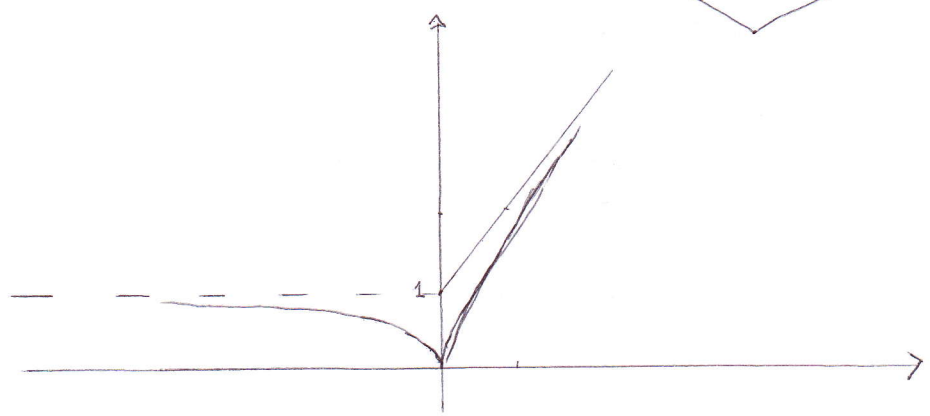
poiché $\begin{cases} 1-x < \sqrt{x^2-2x} \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x < 0 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-x > 0 \\ (1-x)^2 < x^2-2x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ x^2-2x+1 < x^2-2x \\ x < 0 \end{cases}$

$\emptyset \qquad \qquad \qquad \emptyset$

Segue che $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$



$x=0$ min. rel e ass.



5. Posto $t = \ln x$ e quindi $dt = \frac{1}{x} dx$ e integrale diventa

$$\begin{aligned} \int g(x) dx &= \int \frac{2t+1}{t^3-3t^2+3t-1} dt = \int \frac{2t+1}{(t-1)^3} dt = \int \frac{2s+2+1}{s^3} ds \quad \begin{matrix} s = t-1 \rightarrow \\ ds = dt \end{matrix} \\ &= 2 \int \frac{1}{s^2} ds + 3 \int \frac{1}{s^3} ds = -\frac{2}{s} - \frac{3}{2s^2} + C \\ &= -\frac{2}{\ln x - 1} - \frac{3}{(\ln x - 1)^2} + C. \end{aligned}$$

b) ID (g): $\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 1 \end{cases} \quad x > 0 \wedge x \neq e$ Applico la definizione di integrale in senso improprio di I° tipo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 g(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} [G(1) - G(\varepsilon)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[2 - 3 - \frac{2}{\ln \varepsilon - 1} - \frac{3}{(\ln \varepsilon - 1)^2} \right] \\ &= -1 \end{aligned}$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $0 \qquad \qquad \qquad 0$

c) La funzione è continua in $[1, e[$ ma $\lim_{x \rightarrow e^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \underbrace{\frac{2 \ln x + 1}{x}}_{\rightarrow 3/e} \cdot \underbrace{\frac{1}{(\ln x - 1)^3}}_{\rightarrow -\infty} = -\infty$

con ordine $3 > 1$ perché $\ln x - 1 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow e$ con ordine 1 (essendo

$\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{x} = \frac{1}{e} \in \mathbb{R}^*$) e quindi $(\ln x - 1)^3 \rightarrow 0$ per $x \rightarrow e$ con ordine 3. Segue che g non è integ. in ri. in $[1, e[$.