

Corso di laurea in Chimica
Esame di
ISTITUZIONI di MATEMATICHE I

23 aprile 2025

1. Risolvere la seguente equazione

$$4z^4 + 8\frac{1-2i}{1-i}z^2 + 9 - 6i = 0$$

2. Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{9^x - 3^x - 6}{\ln^2 |x| - \ln x^2}}.$$

3. Scrivere, se esiste, l'equazione della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x) = \arctan \frac{\sqrt[5]{x^4}}{1+x^4}$$

nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

4. Data la funzione

$$h(x) = x \ln \left(2 - e^{\frac{1}{x}} \right),$$

- i) studiarla e disegnarne il grafico approssimativo;
 - ii) dire se è integrabile in senso improprio in $]0, 1]$, in $[2, 4]$ e in $[4, +\infty)$.
5. Calcolare

$$\int \frac{1 + \sin^2 x}{1 + \cos^2 x} \sin x dx.$$

Svolgimento

1. Poiché $\frac{1-2i}{1-i} = \frac{(1-2i)(1+i)}{1-i^2} = \frac{1-2i+i-2i^2}{2} = \frac{3-i}{2}$, l'equazione diventa

$4z^4 + 4(3-i)z^2 + 9-6i = 0$ eq. biquadratica. Posto $w = z^2$ si ha

$4w^2 + 4(3-i)w + 9-6i = 0$ $\Delta = 4(3-i)^2 - 36 + 24i = 4(9-1-6i) - 36 + 24i = 32 - 24i - 36 + 24i = -4$

$w_{1/2} = \frac{-2(3-i) \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{-6+2i \pm 2i}{4} = \begin{cases} -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2} \\ \frac{-6+4i}{4} = \frac{-3+2i}{2} \end{cases}$

$z^2 = -\frac{3}{2} \Rightarrow z = \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$

$z^2 = \frac{-3+2i}{2} \Rightarrow z = \sqrt{-\frac{3}{2}+i} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2} (\cos \bar{\theta} + i \sin \bar{\theta})} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2}} (\cos \frac{\bar{\theta}+2k\pi}{2} + i \sin \frac{\bar{\theta}+2k\pi}{2})$
 $k \in \{0, 1\}$

$= \pm \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2}} (\cos \frac{\bar{\theta}}{2} + i \sin \frac{\bar{\theta}}{2})$ dove $\bar{\theta} \ni \begin{cases} \cos \bar{\theta} = \frac{-3/2}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ \sin \bar{\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}$

(si potrebbe calcolare $\cos \frac{\bar{\theta}}{2}$ e $\sin \frac{\bar{\theta}}{2}$ usando le formule di bisezione, ma non serve)

L'equazione ha 4 soluzioni $\pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\pm \sqrt{\frac{\sqrt{13}}{2}} (\cos \frac{\bar{\theta}}{2} + i \sin \frac{\bar{\theta}}{2})$.

2. $\frac{9^x - 3^x - 6}{\ln^2|x| - \ln x^2} \geq 0 \Leftrightarrow N \geq 0 \quad 3^{2x} - 3^x - 6 \geq 0 \quad 3^x \leq -2 \vee 3^x \geq 3 \Rightarrow x \geq 1$
 impon.

$D > 0 \quad \ln^2|x| - 2 \ln|x| > 0 \Leftrightarrow \ln|x| < 0 \vee \ln|x| > 2 \Leftrightarrow$

$|x| < 1 \vee |x| > e^2 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \wedge x \neq 0 \vee x < -e^2 \vee x > e^2$

$ID = (-e^2, -1) \cup [0, e^2) \cup (e^2, +\infty)$

3. $ID(g) = \mathbb{R}$

Poiché l'eq. retta tangente al grafico di g nel punto di

ascissa $x_0 = 0$ è $y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0)$ vedo se $\exists g'(0)$.

$g'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt[5]{x^4}}{1+x^4}\right)^2} = \frac{\frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}}(1+x^4) - x^{\frac{4}{5}}(4x^3)}{(1+x^4)^2} \quad \forall x \neq 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} g'(x) = \pm \infty$ (perché $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} x^{-\frac{1}{5}} = \pm \infty$) e quindi $g'(0) = -\infty$.

Segue che la retta tangente al grafico in $(x_0, g(x_0)) = (0, 0)$ ha equazione $x = 0$ (l'origine è una cuspidi discendente ).

4. ID: $2 - e^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \ln 2 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > \frac{1}{\ln 2}$

ID = $(-\infty, 0] \cup [\frac{1}{\ln 2}, +\infty)$

La funzione non è né pari né dispari
poiché ID non è simmetrico rispetto a 0

$y=0 \Leftrightarrow x \ln(2 - e^{\frac{1}{x}}) = 0 \Leftrightarrow \ln(2 - e^{\frac{1}{x}}) = 0 \Leftrightarrow 2 - e^{\frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 0 \nexists$
 A interse. con asse x e poiché $0 \notin \text{ID}$ A interse. con asse y

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x \ln(2 - e^{\frac{1}{x}}) = \pm \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\ln(1 + 1 - e^{\frac{1}{x}})}{1 - e^{\frac{1}{x}}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -1$ perché

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\ln(1 + 1 - e^{\frac{1}{x}})}{1 - e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = -1$.
 $y = 1 - e^{\frac{1}{x}}$ $y = \frac{1}{x}$

$y = -1$ Az. orizz. a $\pm \infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(2 - e^{\frac{1}{x}}) = 0 \cdot \ln 2 = 0$ A as. verticale

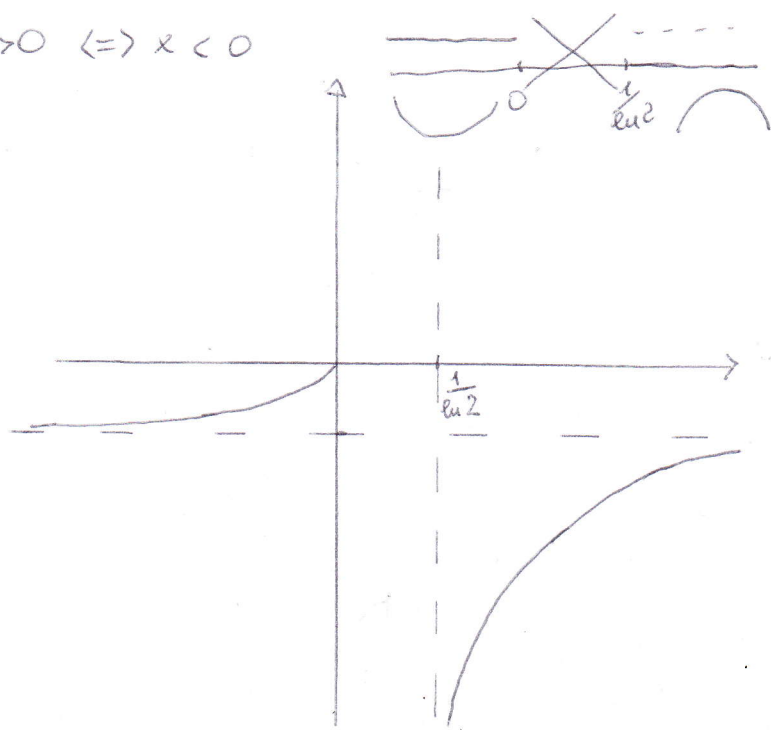
$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\ln 2})^+} x \ln(2 - e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = \frac{1}{\ln 2} (-\infty) = -\infty$ $x = \frac{1}{\ln 2}$ Az. V.

$y' = \ln(2 - e^{\frac{1}{x}}) + x \cdot \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{x}}} \cdot (-e^{\frac{1}{x}}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \ln(2 - e^{\frac{1}{x}}) + \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2 - e^{\frac{1}{x}}}$ ID(y') = ID(y)

Non si riesce a studiare il segno di y' (si noti che se $x > 0$ il 1° addendo è < 0 mentre il 2° è > 0 e si vedeva se $x < 0$ il 1° è > 0 e il 2° è < 0 ; non si capisce chi prevale sull'altro!).

$y'' = \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{x}}} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2 - e^{\frac{1}{x}}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})(2 - e^{\frac{1}{x}}) - e^{\frac{1}{x}}(-e^{\frac{1}{x}})(-\frac{1}{x^2})}{(2 - e^{\frac{1}{x}})^2} = -\frac{1}{x^3} \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{(2 - e^{\frac{1}{x}})^2}$

$y'' > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^3} > 0 \Leftrightarrow x < 0$



Segue che la funzione non ha estremi relativi; (altrimenti dovrebbe cambiare concavità per $x < 0$ o per $x > \frac{1}{\ln 2}$)

ii) Poiché $[0,1]$ non è contenuto in $ID(h)$ essendo $\frac{1}{\ln 2} > 1$, la funzione non è integrabile in $[0,1]$ perché non è definita in questo intervallo. La funzione è integrabile in $[2,4] \subset ID(h)$ essendo continua sull'intervallo chiuso e limitato.

In $[4, +\infty)$ h è continua ma non è integrabile in senso improprio perché
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -1 \neq 0$.

5)

$$\int \frac{1 + \tan^2 x}{1 + \cos^2 x} \tan x \, dx = \int \frac{2 - \cos^2 x}{1 + \cos^2 x} D(-\cos x) \, dx \quad \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x \, dx = dt \end{array}$$

$$= \int \frac{t^2 - 2}{t^2 + 1} \, dt = \int \left(1 - \frac{3}{t^2 + 1}\right) dt = t - 3 \arctan t + \text{cost} = 3 \cos x - 3 \arctan \cos x + c.$$